Cálculo

volumen 2

Cálculo volumen 2

AUTORES PRINCIPALES

GILBERT STRANG, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

EDWIN “JED” HERMAN, UNIVERSITY OF WISCONSIN-STEVENS POINT

openstax™

OpenStax
Rice University
6100 Main Street MS-375
Houston, Texas 77005

Para obtener más información sobre OpenStax, visite https://openstax.org.
Pueden adquirirse copias impresas individuales y pedidos al por mayor a través de nuestro sitio web.

VERSIÓN DE TAPA BLANDA ISBN-13	**978-1-711494-93-7**
VERSIÓN DIGITAL ISBN-13	**978-1-951693-52-7**
AÑO DE PUBLICACIÓN ORIGINAL	**2022**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 CJP 22

OpenStax

OpenStax ofrece libros de texto gratuitos, revisados por expertos y con licencia abierta para cursos de introducción a la universidad y del programa Advanced Placement®, así como software didáctico personalizado de bajo costo que apoyan el aprendizaje de los estudiantes. Es una iniciativa de tecnología educativa sin fines de lucro con sede en Rice University (Universidad Rice), que se compromete a brindarle acceso a los estudiantes a las herramientas que necesitan para terminar sus cursos y alcanzar sus objetivos educativos.

Rice University

OpenStax, OpenStax CNX y OpenStax Tutor son iniciativas de Rice University. Como universidad líder en investigación con un compromiso particular con la educación de pregrado, Rice University aspira a una investigación pionera, una enseñanza insuperable y contribuciones para mejorar nuestro mundo. Su objetivo es cumplir esta misión y cultivar una comunidad diversa de aprendizaje y descubrimiento que forme líderes en todo el ámbito del esfuerzo humano.

Apoyo Filantrópico

OpenStax agradece a nuestros generosos socios filantrópicos, que apoyan nuestra visión de mejorar las oportunidades educativas para todos los estudiantes. Para ver el impacto de nuestra comunidad de colaboradores y nuestra lista más actualizada de socios, visite openstax.org/impact.

Arnold Ventures
Chan Zuckerberg Initiative
Chegg, Inc.
Arthur and Carlyse Ciocca Charitable Foundation
Digital Promise
Ann and John Doerr
Bill & Melinda Gates Foundation
Girard Foundation
Google Inc.
The William and Flora Hewlett Foundation
The Hewlett-Packard Company
Intel Inc.
Rusty and John Jaggers
The Calvin K. Kazanjian Economics Foundation
Charles Koch Foundation
Leon Lowenstein Foundation, Inc.
The Maxfield Foundation
Burt and Deedee McMurtry
Michelson 20MM Foundation
National Science Foundation
The Open Society Foundations
Jumee Yhu and David E. Park III
Brian D. Patterson USA-International Foundation
The Bill and Stephanie Sick Fund
Steven L. Smith & Diana T. Go
Stand Together
Robin and Sandy Stuart Foundation
The Stuart Family Foundation
Tammy and Guillermo Treviño
Valhalla Charitable Foundation
White Star Education Foundation
Schmidt Futures
William Marsh Rice Universit

Contenido

Prefacio

Bienvenido a *Cálculo volumen 2*, un recurso de OpenStax. Este libro de texto fue escrito para aumentar el acceso de los estudiantes a material de aprendizaje de alta calidad, a la vez que se mantienen los más altos estándares de rigor académico a bajo costo o sin costo.

Acerca de OpenStax

OpenStax es una organización sin fines de lucro con sede en la Universidad Rice. Nuestra misión es brindarles a los estudiantes mayor acceso a la educación. Nuestro primer libro de texto universitario con licencia abierta se publicó en 2012. Desde entonces nuestra biblioteca se ha ampliado a más de 20 libros para cursos universitarios y de Colocación Avanzada (Advanced Placement, AP que consultan cientos de miles de estudiantes. Nuestra tecnología de aprendizaje adaptativo, diseñada para mejorar los resultados del aprendizaje a través de rutas educativas personalizadas, se está probando en cursos universitarios de todo el país. A través de nuestras asociaciones con fundaciones filantrópicas y nuestra alianza con otras organizaciones de recursos educativos, OpenStax rompe las barreras más comunes para el aprendizaje y otorga poder a estudiantes e instructores para que triunfen.

Sobre los recursos de OpenStax

Personalización

Cálculo volumen 2 tiene una licencia de Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA), lo que significa que puede distribuir, mezclar y construir sobre el contenido, siempre y cuando proporcione la atribución a OpenStax y sus colaboradores de contenido, no utilice el contenido para fines comerciales y distribuya el contenido conforme a la misma licencia CC-BY-NC-SA.

Dado que nuestros libros tienen licencia abierta, usted es libre de utilizar todo el libro o de elegir las secciones que sean más relevantes para las necesidades de su curso. Siéntase libre de remezclar el contenido asignando a sus estudiantes determinados capítulos y secciones de su programa de estudios, en el orden que usted prefiera. Incluso puede proporcionar un enlace directo en su programa de estudios a las secciones en la vista web de su libro.

Los instructores también tienen la opción de crear una versión personalizada de su libro de OpenStax. La versión personalizada se puede poner a disposición de los estudiantes en formato impreso o digital de bajo costo a través de la librería de su campus. Visite la página de su libro en openstax.org para obtener más información.

Errata

Todos los libros de texto de OpenStax se someten a un riguroso proceso de revisión. Sin embargo, como cualquier libro de texto de nivel profesional, a veces se producen errores. Dado que nuestros libros están en línea, podemos hacer actualizaciones periódicas cuando se considere pedagógicamente necesario. Si tiene una corrección que sugerir, envíela a través del enlace de la página de su libro en openstax.org. Los expertos en la materia revisan todas las sugerencias de erratas. OpenStax se compromete a ser transparente en todas las actualizaciones, por lo que también encontrará una lista de los cambios de erratas anteriores en la página de su libro en openstax.org.

Formato

Puede acceder a este libro de texto de forma gratuita en vista web o en PDF a través de openStax.org, y por un bajo costo en versión impresa.

Sobre *Cálculo volumen 2*

Cálculo está diseñado para el típico curso de cálculo general de dos o tres semestres, incorporando características innovadoras para mejorar el aprendizaje del estudiante. El libro guía a los estudiantes a través de los conceptos básicos del cálculo y los ayuda a entender cómo esos conceptos se aplican a sus vidas y al mundo que los rodea. Debido al carácter exhaustivo del material, ofrecemos el libro en tres volúmenes para mayor flexibilidad y eficacia. El volumen 2 abarca integración, ecuaciones diferenciales, secuencias y series y ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.

Cobertura y alcance

Nuestro libro de texto de *Cálculo volumen 2* se adhiere al alcance y la secuencia de la mayoría de los cursos de cálculo general en todo el país. Hemos trabajado para que el cálculo sea interesante y accesible para los estudiantes, a la vez que se mantiene el rigor matemático inherente a la asignatura. Con este objetivo en mente, el contenido de los tres volúmenes de *Cálculo* se han desarrollado y organizado para proporcionar una progresión lógica desde los conceptos fundamentales hasta los más avanzados, con base en lo que los estudiantes ya han aprendido y haciendo hincapié en las conexiones entre los temas y entre la teoría y las aplicaciones. La meta de cada sección es que los estudiantes no solo reconozcan los conceptos, sino que trabajen con estos de forma que les resulten útiles en cursos posteriores y en sus futuras carreras. La organización y las características pedagógicas se desarrollaron y examinaron con los aportes de educadores de matemáticas dedicados al proyecto.

Volumen 1

- Capítulo 1: Funciones y gráficos
- Capítulo 2: Límites
- Capítulo 3: Derivadas
- Capítulo 4: Aplicaciones de las derivadas
- Capítulo 5: Integración
- Capítulo 6: Aplicaciones de la integración

Volumen 2

- Capítulo 1: Integración
- Capítulo 2: Aplicaciones de la integración
- Capítulo 3: Técnicas de integración
- Capítulo 4: Introducción a las ecuaciones diferenciales
- Capítulo 5: Secuencias y series
- Capítulo 6: Serie de potencias
- Capítulo 7: Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Volumen 3

- Capítulo 1: Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares
- Capítulo 2: Vectores en el espacio
- Capítulo 3: Funciones de valores factoriales
- Capítulo 4: Diferenciación de funciones de varias variables
- Capítulo 5: Integración múltiple
- Capítulo 6: Cálculo vectorial
- Capítulo 7: Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Fundamentos pedagógicos

En *Cálculo volumen 2* encontrará ejemplos y ejercicios que presentan ideas y técnicas clásicas, así como aplicaciones y métodos modernos. Las derivaciones y explicaciones se basan en años de experiencia en el aula por parte de profesores de cálculo de larga trayectoria, que se esfuerzan por lograr un equilibrio de claridad y rigor que ha demostrado ser exitoso con sus estudiantes. Las aplicaciones motivacionales abarcan temas importantes de probabilidad, biología, ecología, negocios y economía, así como áreas de física, química, ingeniería e informática. Los **proyectos estudiantiles** de cada capítulo ofrecen a los estudiantes la oportunidad de explorar interesantes aspectos secundarios de las matemáticas puras y aplicadas: desde demostrar que el número e es irracional hasta calcular el centro de masa del Skywalk del Gran Cañón o la velocidad límite de un paracaidista. En **Aplicaciones de apertura del capítulo** se plantean problemas que se resuelven más adelante mediante las ideas tratadas en ese capítulo. Los problemas incluyen la fuerza hidráulica contra la presa Hoover y la comparación de la intensidad relativa de dos terremotos. Se destacan **definiciones, reglas** y **teoremas** a lo largo del texto, lo que incluye más de 60 **pruebas** de teoremas.

Evaluaciones que refuerzan los conceptos clave

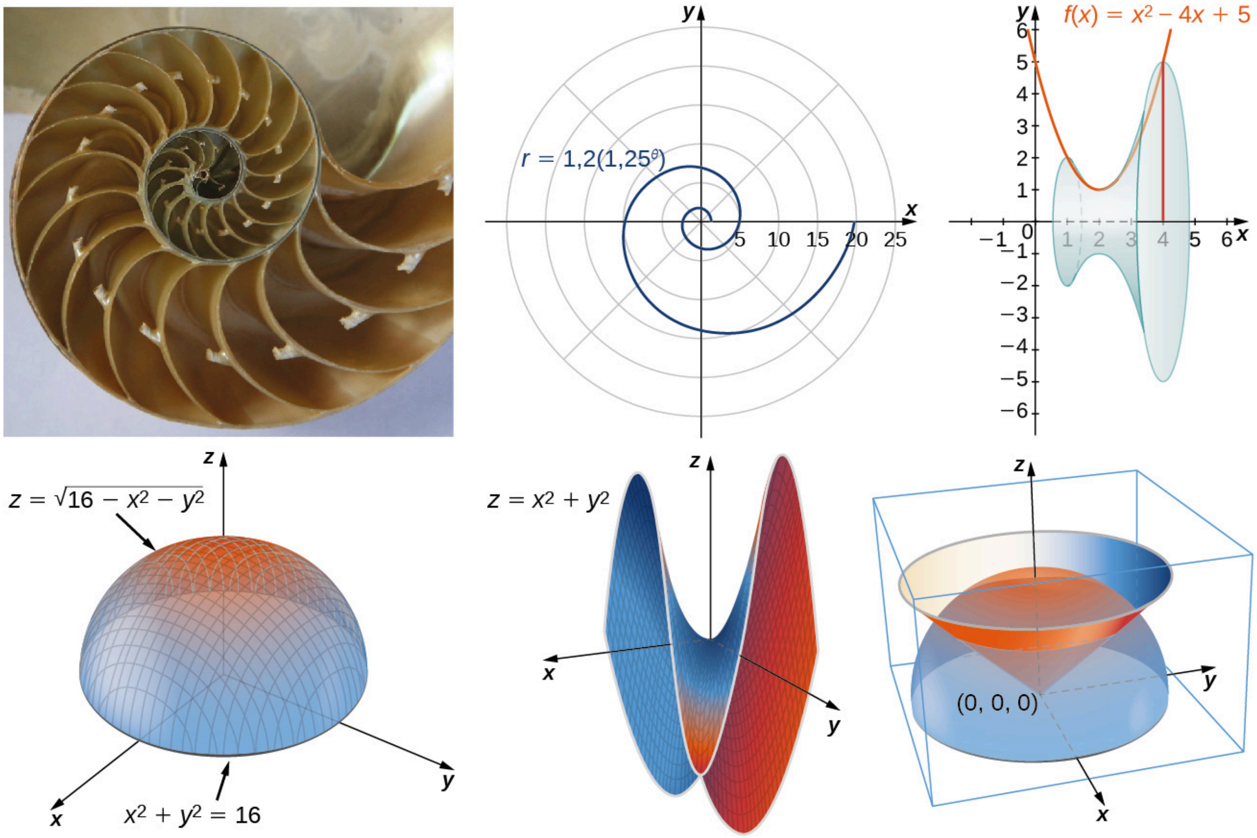
Los **ejemplos** en el capítulo guían a los estudiantes a través de los problemas planteando una pregunta, exponiendo una solución y luego pidiendo a los estudiantes que practiquen la habilidad con un componente de "Compruebe lo que ha aprendido". El libro también incluye evaluaciones al final de cada capítulo, para que los estudiantes apliquen lo que han aprendido a través de problemas de práctica. Muchos ejercicios están marcados con una **[T]** para indicar que se pueden resolver con ayuda de la tecnología, lo que incluye calculadoras o sistemas de álgebra computacional (Computer Algebra Systems, CAS). Las respuestas de los ejercicios seleccionados están disponibles en una **Clave de respuestas** al final del libro. El libro también incluye evaluaciones al final de cada capítulo, para que los estudiantes apliquen lo que han aprendido a través de problemas de práctica.

Momentos trascendentales tempranos o tardíos

Cálculo volumen 2 está diseñado para dar cabida a los enfoques trascendentales tempranos y tardíos del cálculo. Las funciones exponenciales y logarítmicas se presentan en el capítulo 2. La integración de estas funciones se trata en el capítulo 1 para los instructores que quieran incluirlas con otros tipos de funciones. Estas discusiones, sin embargo, se encuentran en secciones separadas que pueden ser omitidas por los instructores que prefieren esperar hasta que se den las definiciones integrales antes de enseñar las derivaciones de cálculo de exponenciales y logaritmos.

Amplio programa artístico

Nuestro programa artístico está diseñado para mejorar la comprensión de los estudiantes de los conceptos a través de ilustraciones, diagramas y fotografías claros y eficaces.



Recursos adicionales

Recursos para estudiantes e instructores

Hemos recopilado recursos adicionales tanto para estudiantes como para instructores, lo que incluye guías de inicio, un manual de soluciones para el instructor y láminas de PowerPoint. Los recursos para instructores requieren una cuenta de instructor verificada, que puede solicitarse en su inicio de sesión en openstax.org. Aproveche estos recursos para complementar su libro de OpenStax.

Recursos para socios

Los socios de OpenStax son nuestros aliados en la misión de hacer asequible y accesible el material de aprendizaje de alta calidad a los estudiantes e instructores de todo el mundo. Sus herramientas se integran perfectamente con nuestros títulos de OpenStax a un bajo costo. Para acceder a los recursos para socios de su texto, visite la página de su libro en openstax.org.

Sobre los autores

Autores colaboradores principales

Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology

El Dr. Strang obtuvo su doctorado en la UCLA en 1959 y desde entonces enseña matemáticas en el MIT. Su libro de texto de Cálculo en línea es uno de los once que ha publicado y es la base de la que se ha derivado nuestro producto final, actualizado para el estudiante de hoy. Strang es un matemático condecorado y antiguo becario de Rhodes en la Oxford University.

Edwin "Jed" Herman, University of Wisconsin-Stevens Point

El Dr. Herman se licenció en Matemáticas en Harvey Mudd College en 1985, obtuvo una maestría en Matemáticas en la UCLA en 1987 y un doctorado en Matemáticas en la University of Oregon en 1997. Actualmente es profesor en la University of Wisconsin-Stevens Point. Tiene más de 20 años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas en la universidad, es un mentor de investigación de los estudiantes, tiene experiencia en el desarrollo/diseño de cursos, y también es un ávido diseñador y jugador de juegos de mesa.

Autores colaboradores

Catherine Abbott, Keuka College
Nicoleta Virginia Bila, Fayetteville State University

Sheri J. Boyd, Rollins College
Joyati Debnath, Winona State University
Valeree Falduto, Palm Beach State College
Joseph Lakey, New Mexico State University
Julie Levandosky, Framingham State University
David McCune, William Jewell College
Michelle Merriweather, Bronxville High School
Kirsten R. Messer, Colorado State University - Pueblo
Alfred K. Mulzet, Florida State College at Jacksonville
William Radulovich (retired), Florida State College at Jacksonville
Erica M. Rutter, Arizona State University
David Smith, University of the Virgin Islands
Elaine A. Terry, Saint Joseph's University
David Torain, Hampton University

Revisores

Marwan A. Abu-Sawwa, Florida State College at Jacksonville
Kenneth J. Bernard, Virginia State University
John Beyers, University of Maryland
Charles Buehrle, Franklin & Marshall College
Matthew Cathey, Wofford College
Michael Cohen, Hofstra University
William DeSalazar, Broward County School System
Murray Eisenberg, University of Massachusetts Amherst
Kristyanna Erickson, Cecil College
Tiernan Fogarty, Oregon Institute of Technology
David French, Tidewater Community College
Marilyn Gloyer, Virginia Commonwealth University
Shawna Haider, Salt Lake Community College
Lance Hemlow, Raritan Valley Community College
Jerry Jared, The Blue Ridge School
Peter Jipsen, Chapman University
David Johnson, Lehigh University
M.R. Khadivi, Jackson State University
Robert J. Krueger, Concordia University
Tor A. Kwembe, Jackson State University
Jean-Marie Magnier, Springfield Technical Community College
Cheryl Chute Miller, SUNY Potsdam
Bagisa Mukherjee, Penn State University, Worthington Scranton Campus
Kasso Okoudjou, University of Maryland College Park
Peter Olszewski, Penn State Erie, The Behrend College
Steven Purtee, Valencia College
Alice Ramos, Bethel College
Doug Shaw, University of Northern Iowa
Hussain Elalaoui-Talibi, Tuskegee University
Jeffrey Taub, Maine Maritime Academy
William Thistleton, SUNY Polytechnic Institute
A. David Trubatch, Montclair State University
Carmen Wright, Jackson State University
Zhenbu Zhang, Jackson State University

1 INTEGRACIÓN



Figura 1.1 La navegación sobre hielo es un deporte de invierno muy popular en algunas zonas del norte de Estados Unidos y Europa (créditos: modificación del trabajo de Carter Brown, Flickr).

Esquema del capítulo

Introducción

Los botes deslizadores sobre hielo son una visión habitual en los lagos de Wisconsin y Minnesota los fines de semana de invierno. Estos botes son similares a los de vela, pero están equipados con patines y están diseñados para deslizarse sobre el hielo, en vez de sobre el agua. Pueden desplazarse muy rápidamente, y muchos entusiastas de la navegación sobre hielo se sienten atraídos por este deporte debido a la velocidad. Los mejores navegadores de estas embarcaciones pueden alcanzar velocidades de hasta cinco veces la velocidad del viento. Si sabemos a qué velocidad se mueve un bote deslizador sobre hielo, podemos utilizar la integración para determinar la distancia que recorre. Volveremos a tratar esta

cuestión más adelante en el capítulo (consulte el Ejemplo 1.27).

Determinar la distancia a partir de la velocidad es solo una de las muchas aplicaciones de la integración. De hecho, las integrales se utilizan en una gran variedad de aplicaciones mecánicas y físicas. En este capítulo, comenzaremos presentando la teoría detrás de la integración y utilizaremos las integrales para calcular áreas. A partir de ahí, desarrollaremos el teorema fundamental del cálculo, que relaciona la diferenciación y la integración. A continuación, estudiaremos algunas técnicas básicas de integración y examinamos brevemente algunas aplicaciones.

1.1 Aproximación de áreas

Objetivos de aprendizaje

1.1.1 Utilizar la notación sigma (notación de sumatoria) para calcular sumas y potencias de números enteros.
1.1.2 Utilizar la suma de áreas rectangulares para aproximar el área bajo una curva.
1.1.3 Utilizar las sumas de Riemann para aproximar el área.

AArquímedes le fascinaba calcular las áreas de diversas formas, es decir, la cantidad de espacio dentro de la forma. Utilizó un procedimiento que llegó a conocerse como el *método de agotamiento* que utilizaba formas cada vez más pequeñas, cuyas áreas podían calcularse con exactitud, para rellenar una región irregular y obtener así aproximaciones cada vez más cercanas al área total. En este proceso, un área delimitada por curvas se rellena con rectángulos, triángulos y formas con fórmulas de área exactas. Estas áreas se suman para hacer una aproximación del área de la región curva.

En esta sección, desarrollaremos técnicas para aproximar el área entre una curva, definida por una función $f(x)$, y el eje *x* en un intervalo cerrado $[a, b]$. Al igual que Arquímedes, primero aproximamos el área bajo la curva utilizando formas de área conocida (es decir, rectángulos). Utilizando rectángulos cada vez más pequeños, conseguimos aproximaciones cada vez más cercanas al área. Tomar un límite nos permite calcular el área exacta bajo la curva.

Empecemos por introducir algunas notaciones para facilitar los cálculos. A continuación, consideraremos el caso en el que $f(x)$ es continua y no negativa. Más adelante en el capítulo, atenuaremos algunas de estas restricciones y desarrollaremos técnicas que se aplican en casos más generales.

Notación sigma (notación de sumatoria)

Como dijimos, utilizaremos formas de área conocida para aproximar el área de una región irregular limitada por curvas. Este proceso suele requerir la suma de largas cadenas de números. Para facilitar la escritura de estas largas sumas, aquí veremos una nueva notación, llamada **notación sigma** (también conocida como **notación de sumatoria**). La letra mayúscula griega Σ, sigma, se utiliza para expresar sumas largas de valores de forma compacta. Por ejemplo, si queremos sumar todos los enteros del 1 al 20 sin notación sigma, tenemos que escribir

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20.$$

Probablemente omitiríamos la escritura de un par de términos y escribiríamos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 19 + 20,$$

que es mejor, pero sigue siendo engorroso. Con la notación sigma, escribimos esta suma como

$$\sum_{i=1}^{20} i,$$

que es mucho más compacta.

Normalmente, la notación sigma se presenta en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

donde a_i describe los términos a añadir, y la *i* se denomina *índice*. Se evalúa cada término y luego se suman todos los valores, empezando por el valor cuando $i = 1$ y terminando con el valor cuando $i = n$. Por ejemplo, una expresión como $\sum_{i=2}^{7} s_i$ se interpreta como $s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7$. Tenga en cuenta que el índice solo se utiliza para llevar la cuenta de los términos que se van a sumar; no entra en el cálculo de la suma en sí. Por lo tanto, el índice se denomina *variable ficticia*. Podemos utilizar la letra que queramos para el índice. Normalmente, los matemáticos utilizan *i*, *j*, *k*, *m* y *n* para los índices.

Probemos un par de ejemplos de uso de la notación sigma.

EJEMPLO 1.1

Uso de la notación sigma

a. Escriba en notación sigma y evalúe la suma de términos 3^i por $i = 1, 2, 3, 4, 5.$

b. Escriba la suma en notación sigma

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}.$$

Solución

a. Escriba

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} 3^i &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 \\ &= 363. \end{aligned}$$

b. El denominador de cada término es un cuadrado perfecto. Utilizando la notación sigma, esta suma puede escribirse como $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$.

1.1 Escriba en notación sigma y evalúe la suma de los términos 2^i para $i = 3, 4, 5, 6.$

Las propiedades asociadas al proceso de suma se dan en la siguiente regla.

Regla: propiedades de la notación sigma

Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ representan dos secuencias de términos y supongamos *c* una constante. Las siguientes propiedades se cumplen para todos los enteros positivos *n* y para los enteros *m*, con $1 \le m \le n.$

1.
$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{1.1}$$

2.
$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1.2}$$

3.
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{1.3}$$

4.
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{1.4}$$

5.
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \tag{1.5}$$

Prueba

Demostramos aquí las propiedades 2. y 3., y dejamos la demostración de las demás propiedades para los Ejercicios.

2. Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i .\end{aligned}$$

3. Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i .\end{aligned}$$

□

Unas cuantas fórmulas más para las funciones más frecuentes simplifican aún más el proceso de suma. Estas se muestran en la siguiente regla: **sumas y potencias de números enteros**, y las utilizamos en el siguiente conjunto de ejemplos.

Regla: sumas de potencias de números enteros

1. La suma de *n* números enteros viene dada por
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. La suma de enteros consecutivos al cuadrado viene dada por
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. La suma de enteros consecutivos elevada al cubo viene dada por
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

EJEMPLO 1.2

Evaluación mediante la notación sigma

Escriba utilizando la notación sigma y evalúe:

a. La suma de los términos $(i-3)^2$ por $i = 1, 2, \ldots, 200$.
b. La suma de los términos $\left(i^3 - i^2\right)$ por $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Solución

a. Multiplicando $(i-3)^2$, podemos descomponer la expresión en tres términos

$$\sum_{i=1}^{200}(i-3)^2 = \sum_{i=1}^{200}\left(i^2-6i+9\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - \sum_{i=1}^{200} 6i + \sum_{i=1}^{200} 9 \\
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - 6\sum_{i=1}^{200} i + \sum_{i=1}^{200} 9 \\
&= \frac{200(200+1)(400+1)}{6} - 6\left[\frac{200(200+1)}{2}\right] + 9\,(200) \\
&= 2686700 - 120.600 + 1800 \\
&= 2567900
\end{aligned}$$

b. Utilice la propiedad iv de la notación sigma y las reglas de la suma de términos al cuadrado y las de la suma de términos al cubo

$$\sum_{i=1}^{6}\left(i^3-i^2\right) = \sum_{i=1}^{6} i^3 - \sum_{i=1}^{6} i^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6^2(6+1)^2}{4} - \frac{6(6+1)(2(6)+1)}{6} \\
&= \frac{1764}{4} - \frac{546}{6} \\
&= 350
\end{aligned}$$

1.2 Halle la suma de los valores de $4 + 3i$ por $i = 1, 2, \ldots, 100$.

EJEMPLO 1.3

Hallar la suma de los valores de la función

Halle la suma de los valores de $f(x) = x^3$ sobre los enteros $1, 2, 3, \ldots, 10$.

Solución

Con la fórmula tenemos

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = \frac{(10)^2(10+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{100(121)}{4} \\
&= 3025.
\end{aligned}$$

1.3 Evalúe la suma indicada por la notación $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)$.

Aproximación del área

Ahora que tenemos la notación necesaria, volvamos al problema que nos ocupa: aproximar el área bajo una curva. Supongamos que $f(x)$ es una función continua y no negativa definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Queremos aproximar el área *A* delimitada por $f(x)$ arriba, el *eje* abajo, la línea $x = a$ a la izquierda, y la línea $x = b$ a la derecha

(Figura 1.2).

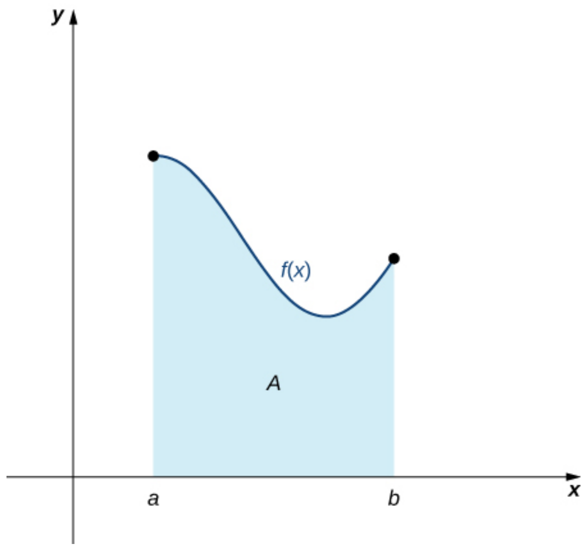


Figura 1.2 El área (región sombreada) delimitada por la curva $f(x)$ en la parte superior, el eje *x* en la parte inferior, la línea $x = a$ a la izquierda, y la línea $x = b$ a la derecha.

¿Cómo podemos aproximar el área que está debajo esta curva? El enfoque es geométrico. Al dividir una región en muchas formas pequeñas que tienen fórmulas de área conocidas, podemos sumar estas áreas y obtener una estimación razonable del área verdadera. Comenzamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en *n* subintervalos de anchos iguales, $\frac{b-a}{n}$. Lo hacemos seleccionando puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ con la $x_0 = a, x_n = b$, y

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

por $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Denotamos la anchura de cada subintervalo con la notación Δ*x*, por lo que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

por $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Esta noción de dividir un intervalo $[a, b]$ en subintervalos mediante la selección de puntos dentro del intervalo se utiliza con bastante frecuencia en la aproximación del área bajo una curva, así que vamos a definir alguna terminología relevante.

Definición

Un conjunto de puntos $P = \{x_i\}$ por $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, que divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de la forma $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ se llama una **partición** de $[a, b]$. Si todos los subintervalos tienen la misma anchura, el conjunto de puntos forma una **partición regular** del intervalo $[a, b]$.

Podemos utilizar esta partición regular como base de un método para estimar el área bajo la curva. A continuación examinamos dos métodos: aproximación en el punto del extremo izquierdo y la aproximación en el punto del extremo derecho.

Regla: aproximación del extremo izquierdo

En cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ (para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$), construya un rectángulo con anchura Δ*x* y altura igual a $f\left(x_{i-1}\right)$, que es el valor de la función en el punto del extremo izquierdo del subintervalo. Entonces el área de este rectángulo es $f\left(x_{i-1}\right)\Delta x$. Al sumar las áreas de todos estos rectángulos, obtenemos un valor aproximado de *A* (Figura 1.3). Utilizamos la notación L_n para denotar que se trata de una **aproximación del punto del extremo izquierdo** de *A* utilizando *n* subintervalos.

$$A \approx L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x \qquad (1.6)$$

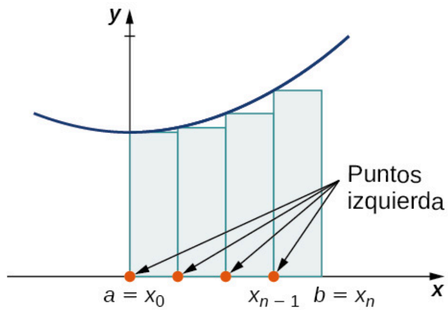


Figura 1.3 En la aproximación del punto del extremo izquierdo del área bajo una curva, la altura de cada rectángulo está determinada por el valor de la función a la izquierda de cada subintervalo.

El segundo método para aproximar el área bajo una curva es la aproximación del punto del extremo derecho. Es casi lo mismo que la aproximación del punto del extremo izquierdo, pero ahora las alturas de los rectángulos están determinadas por los valores de la función a la derecha de cada subintervalo.

Regla: aproximación del extremo derecho

Construir un rectángulo en cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, solo que esta vez la altura del rectángulo está determinada por el valor de la función $f(x_i)$ en el punto del extremo derecho del subintervalo. Entonces, el área de cada rectángulo es $f(x_i)\Delta x$ y la aproximación para *A* está dada por

$$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x. \qquad (1.7)$$

La notación R_n indica que se trata de una **aproximación en el punto del extremo derecho** de *A* (Figura 1.4).

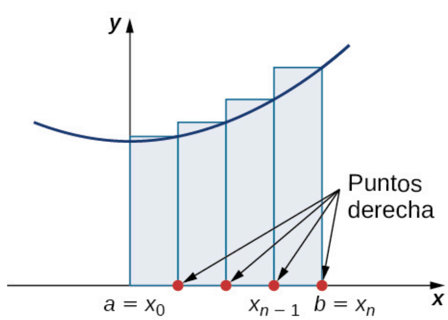


Figura 1.4 En la aproximación del punto del extremo derecho del área bajo una curva, la altura de cada rectángulo está determinada por el valor de la función a la derecha de cada subintervalo. Nótese que la aproximación del punto del extremo derecho difiere de la aproximación del punto del extremo izquierdo en la Figura 1.3.

Los gráficos de la Figura 1.5 representan la curva $f(x) = \frac{x^2}{2}$. En el gráfico (a) dividimos la región representada por el intervalo $[0, 3]$ en seis subintervalos, cada uno de ellos con una anchura de 0,5. Así, $\Delta x = 0{,}5$. A continuación, formamos seis rectángulos trazando líneas verticales perpendiculares al x_{i-1}, punto del extremo izquierdo de cada subintervalo. Determinamos la altura de cada rectángulo calculando $f\left(x_{i-1}\right)$ por $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Los intervalos son $[0, 0{,}5], [0{,}5, 1], [1, 1{,}5], [1{,}5, 2], [2, 2{,}5], [2{,}5, 3]$. Encontramos el área de cada rectángulo multiplicando la altura por la anchura. Entonces, la suma de las áreas rectangulares se aproxima al área entre $f(x)$ y el eje *x*. Cuando se utilizan los puntos del extremo izquierdo para calcular la altura, tenemos una aproximación del punto del extremo izquierdo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A \approx L_6 &= \sum_{i=1}^{6} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + f(x_5)\Delta x \\ &= f(0)\,0{,}5 + f(0{,}5)\,0{,}5 + f(1)\,0{,}5 + f(1{,}5)\,0{,}5 + f(2)\,0{,}5 + f(2{,}5)\,0{,}5 \\ &= (0)\,0{,}5 + (0{,}125)\,0{,}5 + (0{,}5)\,0{,}5 + (1{,}125)\,0{,}5 + (2)\,0{,}5 + (3{,}125)\,0{,}5 \\ &= 0 + 0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}5625 + 1 + 1{,}5625 \\ &= 3{,}4375. \end{aligned}$$

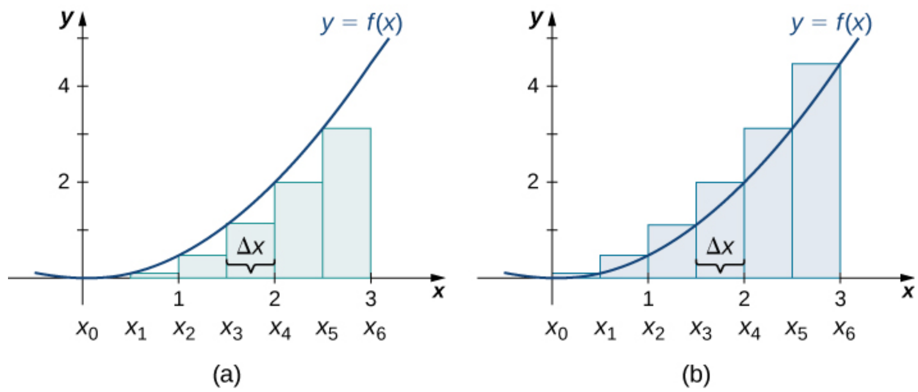


Figura 1.5 Métodos de aproximación del área bajo una curva utilizando (a) los puntos extremos de la izquierda y (b) los puntos extremos de la derecha.

En la Figura 1.5(b), dibujamos líneas verticales perpendiculares a x_i de manera que x_i es el punto final derecho de cada subintervalo, y calculamos $f(x_i)$ por $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Multiplicamos cada $f(x_i)$ por Δx para hallar las áreas rectangulares, y luego sumarlas. Se trata de una aproximación del punto del extremo derecho del área bajo $f(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A \approx R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + f(x_5)\Delta x + f(x_6)\Delta x \\ &= f(0{,}5)\,0{,}5 + f(1)\,0{,}5 + f(1{,}5)\,0{,}5 + f(2)\,0{,}5 + f(2{,}5)\,0{,}5 + f(3)\,0{,}5 \\ &= (0{,}125)\,0{,}5 + (0{,}5)\,0{,}5 + (1{,}125)\,0{,}5 + (2)\,0{,}5 + (3{,}125)\,0{,}5 + (4{,}5)\,0{,}5 \\ &= 0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}5625 + 1 + 1{,}5625 + 2{,}25 \\ &= 5{,}6875. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.4

Aproximación del área bajo una curva

Utilice las aproximaciones del punto del extremo izquierdo y del punto del extremo derecho para aproximar el área bajo la curva de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$; utilice $n = 4$.

Solución

En primer lugar, divida el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos iguales. Utilizando $n = 4$, $\Delta x = \frac{(2-0)}{4} = 0{,}5$. Esta es la anchura de cada rectángulo. Los intervalos $[0, 0{,}5]$, $[0{,}5, 1]$, $[1, 1{,}5]$, $[1{,}5, 2]$ se muestran en la Figura 1.6. Utilizando una aproximación al punto del extremo izquierdo, las alturas son $f(0) = 0$, $f(0{,}5) = 0{,}25$, $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 2{,}25$. Entonces,

$$\begin{aligned} L_4 &= f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x \\ &= 0\,(0{,}5) + 0{,}25\,(0{,}5) + 1\,(0{,}5) + 2{,}25\,(0{,}5) \\ &= 1{,}75. \end{aligned}$$

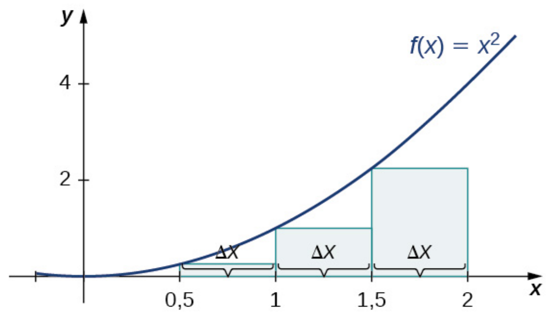


Figura 1.6 El gráfico muestra la aproximación de los puntos del extremo izquierdo del área bajo $f(x) = x^2$ de 0 a 2.

La aproximación del punto del extremo derecho se muestra en la Figura 1.7. Los intervalos son los mismos, $\Delta x = 0{,}5$, pero ahora se utiliza el punto del extremo derecho para calcular la altura de los rectángulos. Tenemos

$$\begin{aligned} R_4 &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x \\ &= 0{,}25\,(0{,}5) + 1\,(0{,}5) + 2{,}25\,(0{,}5) + 4\,(0{,}5) \\ &= 3{,}75. \end{aligned}$$

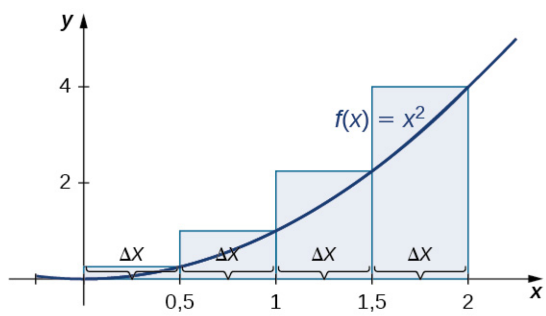


Figura 1.7 El gráfico muestra la aproximación del punto del extremo derecho del área bajo $f(x) = x^2$ de 0 a 2.

La aproximación del extremo izquierdo es 1,75; la aproximación del extremo derecho es 3,75.

1.4 Esbozar las aproximaciones del punto del extremo izquierdo y del punto del extremo derecho para $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$; utilice $n = 4$. Aproxime el área utilizando ambos métodos.

Al observar la Figura 1.5 y los gráficos en el Ejemplo 1.4, podemos ver que cuando utilizamos un número pequeño de intervalos, ni la aproximación del punto del extremo izquierdo ni la aproximación del punto del extremo derecho son una estimación especialmente precisa del área bajo la curva. Sin embargo, parece lógico que si aumentamos el número de puntos en nuestra partición, nuestra estimación de *A* mejorará. Tendremos más rectángulos, pero cada rectángulo será más fino, por lo que podremos ajustar los rectángulos a la curva con mayor precisión.

Podemos demostrar la mejora de la aproximación obtenida mediante intervalos más pequeños con un ejemplo. Exploremos la idea de aumentar *n*, primero con una aproximación del punto del extremo izquierdo con cuatro rectángulos, luego con ocho rectángulos y finalmente con 32 rectángulos. A continuación, hagamos lo mismo en una aproximación del punto del extremo derecho, utilizando los mismos conjuntos de intervalos de la misma región curva. La Figura 1.8 muestra el área de la región bajo la curva $f(x) = (x-1)^3 + 4$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando una aproximación del punto del extremo izquierdo donde $n = 4$. La anchura de cada rectángulo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}.$$

El área se aproxima por la suma de las áreas de los rectángulos, o

$$\begin{aligned} L_4 &= f(0)(0{,}5) + f(0{,}5)(0{,}5) + f(1)(0{,}5) + f(1{,}5)0{,}5 \\ &= 7{,}5. \end{aligned}$$

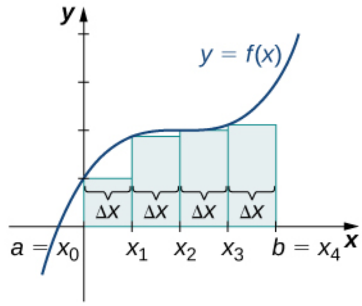


Figura 1.8 Con una aproximación al extremo izquierdo y dividiendo la región de *a* a *b* en cuatro intervalos iguales, el área bajo la curva es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos.

La Figura 1.9 muestra la misma curva dividida en ocho subintervalos. Al comparar el gráfico con cuatro rectángulos en la Figura 1.8 con este gráfico con ocho rectángulos, observamos que aparentemente hay menos espacio en blanco bajo la curva cuando $n = 8$. Este espacio en blanco es el área bajo la curva que no podemos incluir utilizando nuestra aproximación. El área de los rectángulos es

$$\begin{aligned} L_8 &= f(0)(0{,}25) + f(0{,}25)(0{,}25) + f(0{,}5)(0{,}25) + f(0{,}75)(0{,}25) \\ &\quad + f(1)(0{,}25) + f(1{,}25)(0{,}25) + f(1{,}5)(0{,}25) + f(1{,}75)(0{,}25) \\ &= 7{,}75. \end{aligned}$$

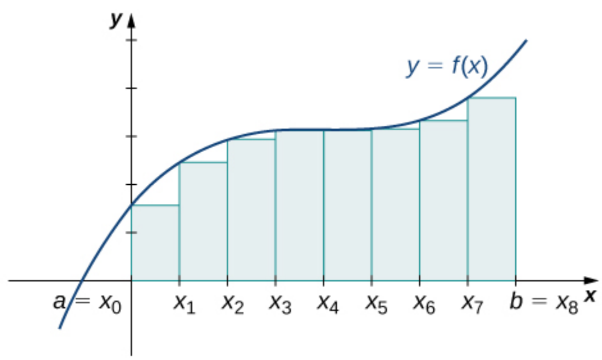


Figura 1.9 La región bajo la curva se divide en áreas rectangulares $n = 8$ de igual anchura para una aproximación al extremo izquierdo.

El gráfico en la Figura 1.10 muestra la misma función con 32 rectángulos inscritos bajo la curva. Parece que queda poco espacio en blanco. El área ocupada por los rectángulos es

$$\begin{aligned} L_{32} &= f(0)(0{,}0625) + f(0{,}0625)(0{,}0625) + f(0{,}125)(0{,}0625) + \cdots + f(1{,}9375)(0{,}0625) \\ &= 7{,}9375. \end{aligned}$$

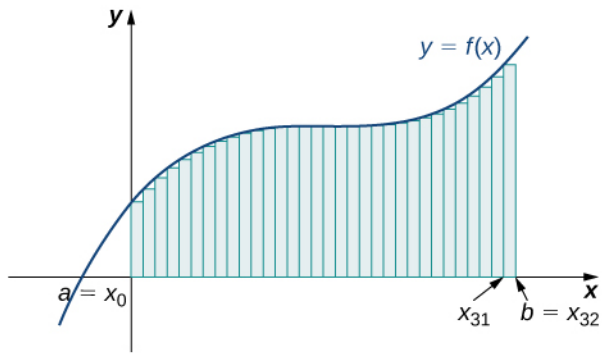


Figura 1.10 En este caso, se inscriben 32 rectángulos bajo la curva para una aproximación al punto del extremo izquierdo.

Podemos realizar un proceso similar para el método de aproximación del punto del extremo derecho. Una aproximación al extremo derecho de la misma curva, utilizando cuatro rectángulos (Figura 1.11), produce un área

$$\begin{aligned} R_4 &= f(0{,}5)(0{,}5) + f(1)(0{,}5) + f(1{,}5)(0{,}5) + f(2)(0{,}5) \\ &= 8{,}5. \end{aligned}$$

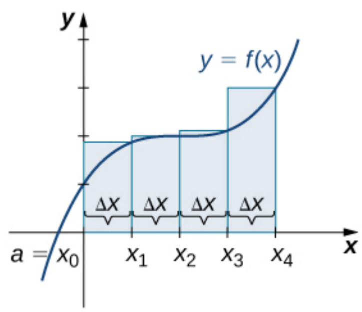


Figura 1.11 Ahora dividimos el área bajo la curva en cuatro subintervalos iguales para una aproximación al punto del extremo derecho.

Dividiendo la región en el intervalo $[0, 2]$ en ocho rectángulos da como resultado $\Delta x = \frac{2-0}{8} = 0{,}25$. El gráfico se muestra en la Figura 1.12. El área es

$$\begin{aligned} R_8 &= f(0{,}25)(0{,}25) + f(0{,}5)(0{,}25) + f(0{,}75)(0{,}25) + f(1)(0{,}25) \\ &\quad + f(1{,}25)(0{,}25) + f(1{,}5)(0{,}25) + f(1{,}75)(0{,}25) + f(2)(0{,}25) \\ &= 8{,}25. \end{aligned}$$

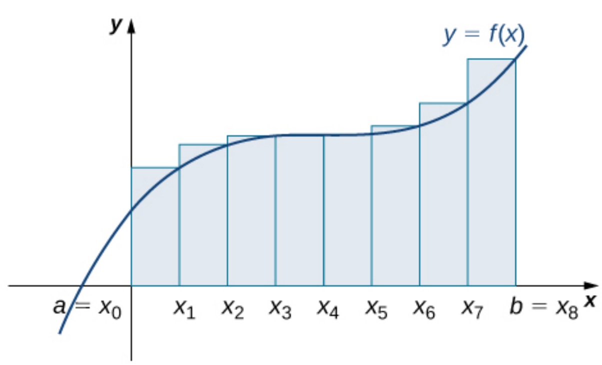


Figura 1.12 Aquí utilizamos la aproximación del punto del extremo derecho para un área dividida en ocho subintervalos iguales.

Por último, la aproximación del punto del extremo derecho con $n = 32$ se acerca al área real (Figura 1.13). El área es aproximadamente

$$\begin{aligned} R_{32} &= f(0{,}0625)(0{,}0625) + f(0{,}125)(0{,}0625) + f(0{,}1875)(0{,}0625) + \cdots + f(2)(0{,}0625) \\ &= 8{,}0625. \end{aligned}$$

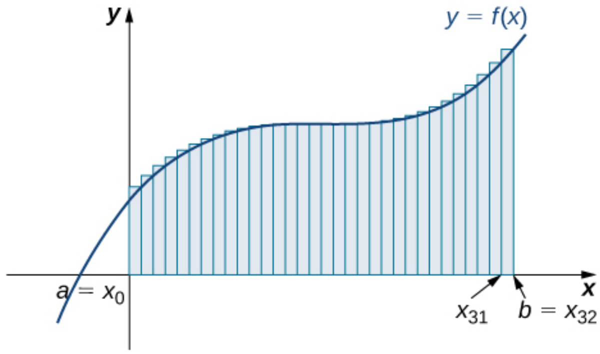


Figura 1.13 La región se divide en 32 subintervalos iguales para una aproximación al extremo derecho.

Con base en estas cifras y cálculos, parece que vamos por buen camino; los rectángulos parecen aproximarse mejor al área bajo la curva a medida que *n* aumenta. Además, a medida que aumenta *n*, tanto la aproximación del punto del extremo izquierdo como la del derecho parecen acercarse a un área de 8 unidades cuadradas. La Tabla 1.1 muestra una comparación numérica de los métodos del punto del extremo izquierdo y del derecho. La idea de que las aproximaciones del área bajo la curva son cada vez mejores a medida que *n* se hace más grande es muy importante, y exploraremos esa idea con más detalle.

Los valores de *n*	Área aproximada L_n	Área aproximada R_n
$n = 4$	7,5	8,5
$n = 8$	7,75	8,25
$n = 32$	7,94	8,06

Tabla 1.1 Valores convergentes de las aproximaciones de los puntos del extremo izquierdo y derecho cuando *n* aumenta.

Formulación de sumas de Riemann

Hasta ahora utilizamos rectángulos para aproximar el área bajo una curva. Las alturas de estos rectángulos se determinaron evaluando la función en los extremos derecho o izquierdo del subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. En realidad, no hay ninguna razón para restringir la evaluación de la función solo a uno de estos dos puntos. Podríamos evaluar la función en cualquier punto x_i del subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, y usamos $f\left(x_i^*\right)$ como la altura de nuestro rectángulo. Esto nos da una estimación del área de la forma

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Una suma de esta forma se llama suma de Riemann, en honor al matemático del siglo XIX Bernhard Riemann, que desarrolló la idea.

Definición

Supongamos que $f(x)$ se define en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que *P* sea una partición regular de $[a, b]$. Sea Δx la anchura de cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ y para cada *i*, supongamos que x_i^* es cualquier punto en $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Una **suma de Riemann** se define para $f(x)$ como

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Recordemos que con las aproximaciones de los puntos extremos izquierdo y derecho, las estimaciones parecen ser cada vez mejores a medida que *n* se hace más grande. Lo mismo ocurre con las sumas de Riemann. Estas sumas dan mejores aproximaciones para valores mayores de *n*. Ahora estamos preparados para definir el área bajo una curva en términos

de sumas de Riemann.

Definición

Supongamos que $f(x)$ es una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$, y supongamos que $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$ es una suma de Riemann para $f(x)$. Entonces, el **área bajo la curva** $y = f(x)$ sobre $[a, b]$ viene dada por

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

MEDIOS

Vea una demostración gráfica (http://www.openstax.org/l/20_riemannsums) de la construcción de una suma de Riemann.

Vale la pena hablar sobre algunas sutilezas. En primer lugar, hay que tener en cuenta que tomar el límite de una suma difiere un poco de tomar el límite de una función $f(x)$ a medida que x llega al infinito. Los límites de las sumas se analizan en detalle en el capítulo Secuencias y series; pero por ahora podemos asumir que las técnicas computacionales que usamos para calcular límites de funciones también se pueden usar para calcular límites de sumas.

En segundo lugar, debemos considerar qué hacer si la expresión converge a límites diferentes para distintas elecciones de $\left\{x_i^*\right\}$. Afortunadamente, esto no ocurre. Aunque la prueba está fuera del alcance de este texto, se puede demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$ existe y es único (es decir, no depende de la opción de $\left\{x_i^*\right\}$).

En breve veremos algunos ejemplos, pero antes dediquemos un momento para hablar de algunas opciones específicas para $\left\{x_i^*\right\}$. Aunque cualquier opción para $\left\{x_i^*\right\}$ nos da una estimación del área bajo la curva, no sabremos necesariamente si esa estimación es demasiado alta (sobreestimación) o demasiado baja (subestimación). Si es importante saber si nuestra estimación es alta o baja, podemos seleccionar nuestro valor para $\left\{x_i^*\right\}$ a fin de garantizar un resultado u otro.

Si queremos una sobreestimación, por ejemplo, podemos elegir $\left\{x_i^*\right\}$ tal que para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $f\left(x_i^*\right) \geq f(x)$ para todo $x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. En otras palabras, elegimos $\left\{x_i^*\right\}$ de manera que para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $f\left(x_i^*\right)$ es el valor máximo de la función en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Si seleccionamos $\left\{x_i^*\right\}$ de esta manera, entonces la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$ se denomina **suma superior**. Del mismo modo, si queremos una subestimación, podemos elegir $\left\{x_i^*\right\}$ de manera que para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $f\left(x_i^*\right)$ es el valor mínimo de la función en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. En este caso, la suma de Riemann correspondiente se llama **suma inferior**. Observe que si $f(x)$ aumenta o disminuye a lo largo del intervalo $[a, b]$, entonces los valores máximos y mínimos de la función se encuentran en los puntos de los extremos de los subintervalos, por lo que las sumas superiores e inferiores son iguales a las aproximaciones de los puntos de los extremos izquierdo y derecho.

EJEMPLO 1.5

Hallar sumas inferiores y superiores

Halle una suma inferior para $f(x) = 10 - x^2$ en $[1, 2]$; supongamos que $n = 4$ subintervalos.

Solución

Con $n = 4$ en el intervalo $[1, 2]$, $\Delta x = \frac{1}{4}$. Podemos enumerar los intervalos como $[1, 1{,}25]$, $[1{,}25, 1{,}5]$, $[1{,}5, 1{,}75]$, $[1{,}75, 2]$. Ya que la función es decreciente en el intervalo $[1, 2]$, la Figura 1.14 muestra que se obtiene una suma inferior utilizando los puntos del extremo derecho.

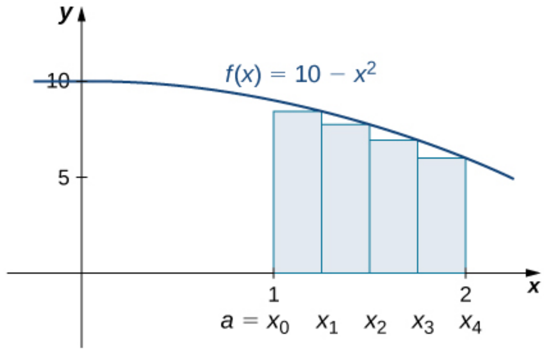


Figura 1.14 El gráfico de $f(x) = 10 - x^2$ se establece para una aproximación del punto del extremo derecho del área limitada por la curva y el eje *x* en $[1, 2]$, y muestra una suma inferior.

La suma de Riemann es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}\left(10 - x^2\right)(0{,}25) &= 0{,}25\left[10 - (1{,}25)^2 + 10 - (1{,}5)^2 + 10 - (1{,}75)^2 + 10 - (2)^2\right] \\ &= 0{,}25\,[8{,}4375 + 7{,}75 + 6{,}9375 + 6] \\ &= 7{,}28.\end{aligned}$$

La superficie de 7,28 es una suma inferior y una subestimación.

1.5 a. Halle una suma superior para $f(x) = 10 - x^2$ en $[1, 2]$; supongamos que $n = 4$.
b. Dibuje la aproximación.

EJEMPLO 1.6

Halle sumas inferiores y superiores para $f(x) = \operatorname{sen} x$

Halle una suma inferior para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; supongamos que $n = 6$.

Solución

Veamos primero el gráfico en la Figura 1.15 para tener una mejor idea del área de interés.

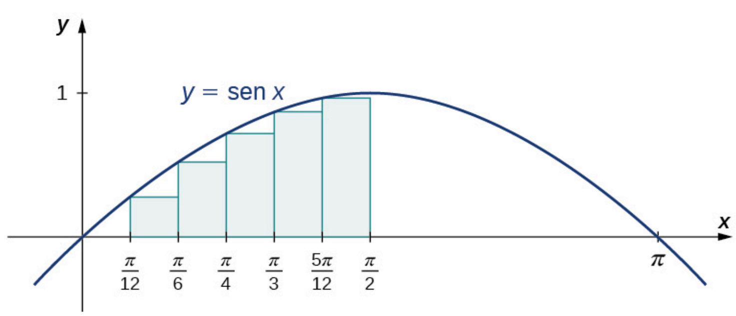


Figura 1.15 El gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ se divide en seis regiones: $\Delta x = \frac{\pi/2}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Los intervalos son $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$, $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right]$, y $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$. Observe que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que una aproximación al extremo izquierdo nos da la suma inferior. Una aproximación al extremo izquierdo es la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{5} \operatorname{sen} x_i \left(\frac{\pi}{12}\right)$. Tenemos

$$\begin{aligned}A &\approx \operatorname{sen}(0)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{5\pi}{12}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) \\ &= 0{,}863.\end{aligned}$$

1.6 Al utilizar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, halle una suma superior; supongamos que $n = 6$.

SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS

1. Indique si las sumas dadas son iguales o desiguales.

a. $\sum_{i=1}^{10} i$ y $\sum_{k=1}^{10} k$

b. $\sum_{i=1}^{10} i$ y $\sum_{i=6}^{15} (i-5)$ grandes.

c. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ y $\sum_{j=0}^{9} (j+1)j$

d. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ y $\sum_{k=1}^{10} \left(k^2 - k\right)$

En los siguientes ejercicios, utilice las reglas de las sumas de potencias de números enteros para calcular las sumas.

2. $\sum_{i=5}^{10} i$

3. $\sum_{i=5}^{10} i^2$

Supongamos que $\sum_{i=1}^{100} a_i = 15$ *y* $\sum_{i=1}^{100} b_i = -12$. *En los siguientes ejercicios, calcule las sumas.*

4. $\sum_{i=1}^{100} (a_i + b_i)$ grandes.

5. $\sum_{i=1}^{100} (a_i - b_i)$ grandes.

6. $\sum_{i=1}^{100} (3a_i - 4b_i)$ grandes.

7. $\sum_{i=1}^{100} (5a_i + 4b_i)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, utilice las propiedades de la suma y las fórmulas para reescribir y evaluar las sumas.

8. $\sum_{k=1}^{20} 100\left(k^2 - 5k + 1\right)$ grandes.

9. $\sum_{j=1}^{50} \left(j^2 - 2j\right)$ grandes.

10. $\sum_{j=11}^{20} \left(j^2 - 10j\right)$ grandes.

11. $\sum_{k=1}^{25} \left[(2k)^2 - 100k\right]$

Supongamos que L_n denota la suma del punto del extremo izquierdo utilizando n subintervalos y que R_n denotan la suma correspondiente del punto del extremo derecho. En los siguientes ejercicios, calcule las sumas a la izquierda y a la derecha indicadas para las funciones dadas en el intervalo indicado.

12. L_4 para $f(x) = \frac{1}{x-1}$ sobre $[2, 3]$

13. R_4 para $g(x) = \cos(\pi x)$ sobre $[0, 1]$

14. L_6 para $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ sobre $[2, 5]$

15. R_6 para $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ sobre $[2, 5]$

16. R_4 para $\frac{1}{x^2+1}$ sobre $[-2, 2]$

17. L_4 para $\frac{1}{x^2+1}$ sobre $[-2, 2]$

18. R_4 para $x^2 - 2x + 1$ sobre $[0, 2]$

19. L_8 para $x^2 - 2x + 1$ sobre $[0, 2]$

20. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_4 y R_4, respectivamente, para $f(x) = (2 - |x|)$ sobre $[-2, 2]$. Calcule su valor promedio medio y compárelo con el área bajo el gráfico de *f*.

21. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_6 y R_6, respectivamente, para $f(x) = (3 - |3 - x|)$ sobre $[0, 6]$. Calcule su valor promedio medio y compárelo con el área bajo el gráfico de *f*.

22. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_4 y R_4, respectivamente, para $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$ y compare sus valores.

23. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_6 y R_6, respectivamente, para $f(x) = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$ en $[0, 6]$ y compare sus valores.

Exprese las siguientes sumas de puntos finales en notación sigma, pero no las evalúe.

24. L_{30} para $f(x) = x^2$ en $[1, 2]$

25. L_{10} para $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$

26. R_{20} para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

27. R_{100} para $\ln x$ en $[1, e]$

En los siguientes ejercicios, grafique la función y luego utilice una calculadora o un programa de computadora para evaluar las siguientes sumas de los extremos izquierdo y derecho. ¿El área bajo la curva en el intervalo dado se aproxima mejor mediante la suma de Riemann izquierda o la suma de Riemann derecha? Si los dos están de acuerdo, coloque "ninguno".

28. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = x^2 - 3x + 1$ en el intervalo $[-1, 1]$

29. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$

30. **[T]** L_{50} y R_{50} para $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ en el intervalo $[2, 4]$

31. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$

32. **[T]** L_{50} y R_{50} para $y = \tan(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

33. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = e^{2x}$ en el intervalo $[-1, 1]$

34. Sea t_j el tiempo que tardó Tejay van Garteren en recorrer la etapa *j* del Tour de Francia en 2014. Si hubiera un total de 21 etapas, interprete $\sum_{j=1}^{21} t_j$.

35. Supongamos que r_j denota la precipitación total en Portland en el día *j* del año en 2009. Interprete $\sum_{j=1}^{31} r_j$.

36. Supongamos que d_j denotan las horas de luz y δ_j el aumento de las horas de luz desde el día $j-1$ hasta el día *j* en Fargo, Dakota del Norte, en el día *j* del año. Interprete $d_1 + \sum_{j=2}^{365} \delta_j$.

37. Para ponerse en forma, Joe recibe un nuevo par de zapatillas para correr. Si Joe corre 1 mi cada día en la semana 1 y añade $\frac{1}{10}$ mi a su rutina diaria cada semana, ¿cuál es el millaje total de los zapatos de Joe después de 25 semanas?

38. La siguiente tabla ofrece valores aproximados de la tasa promedio anual del aumento del dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera por cada década desde 1960, en partes por millón (ppm). Calcule el aumento total del CO_2 atmosférico entre 1964 y 2013.

Década	Ppm/año
1964-1973	1,07
1974-1983	1,34
1984-1993	1,40
1994-2003	1,87
2004-2013	2,07

Tabla 1.2 Aumento anual promedio del CO_2 atmosférico, 1964-2013
Fuente: http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/.

39. La siguiente tabla indica el aumento aproximado del nivel del mar en pulgadas a lo largo de 20 años a partir de un año determinado. Calcule el cambio neto en el nivel medio del mar desde 1870 hasta 2010.

Año de inicio	Cambio en 20 años
1870	0,3
1890	1,5
1910	0,2
1930	2,8
1950	0,7
1970	1,1
1990	1,5

Tabla 1.3 Aumentos aproximados del nivel del mar en 20 años, 1870-1990
Fuente: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10712-011-9119-1

40. La siguiente tabla muestra el aumento aproximado en dólares del precio promedio del galón de gasolina por década desde 1950. Si el precio promedio de un galón de gasolina en 2010 era de 2,60 dólares, ¿cuál era el precio promedio de un galón de gasolina en 1950?

Año de inicio	Cambio en 10 años
1950	0,03
1960	0,05
1970	0,86
1980	−0,03
1990	0,29
2000	1,12

Tabla 1.4 Aumentos aproximados del precio del gas en 10 años, 1950-2000 *Fuente*: http://epb.lbl.gov/homepages/Rick_Diamond/docs/lbnl55011-trends.pdf.

41. La siguiente tabla indica el porcentaje de crecimiento de la población estadounidense a partir de julio del año indicado. Si la población de Estados Unidos era de 281.421.906 habitantes en julio de 2000, calcule la población de Estados Unidos en julio de 2010.

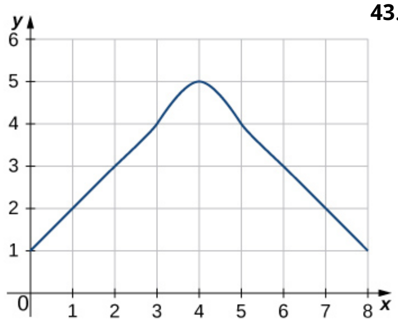
Año	% de cambio/año
2000	1,12
2001	0,99
2002	0,93
2003	0,86
2004	0,93
2005	0,93
2006	0,97
2007	0,96
2008	0,95
2009	0,88

Tabla 1.5 Crecimiento porcentual anual de la población estadounidense, 2000-2009 *Fuente*: http://www.census.gov/popest/data.

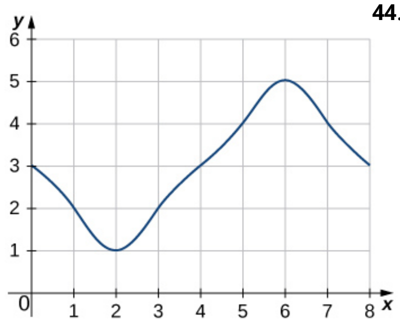
(*Pista:* Para obtener la población en julio de 2001, multiplique la población en julio de 2000 por 1,0112 para obtener 284.573.831).

En los siguientes ejercicios, estime las áreas bajo las curvas calculando las sumas de Riemann de la izquierda, L_8.

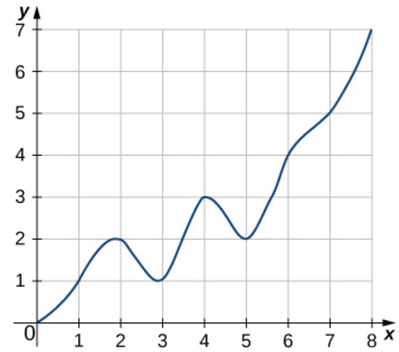
42.



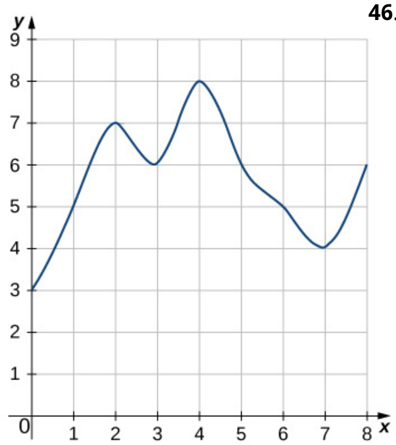
43.



44.



45.



46. **[T]** Utiliza un sistema de álgebra computacional para calcular la suma de Riemann, L_N, por $N = 10, 30, 50$ por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $[-1, 1]$.

47. **[T]** Utilice un sistema de álgebra computacional para calcular la suma de Riemann, L_N, para $N = 10, 30, 50$ por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ en $[-1, 1]$.

48. **[T]** Utilice un sistema de álgebra computacional para calcular la suma de Riemann, L_N, para $N = 10, 30, 50$ por $f(x) = \text{sen}^2 x$ en $[0, 2\pi]$. Compara estas estimaciones con π.

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora o un programa de computadora para evaluar las sumas de los puntos finales R_N y L_N para $N = 1,10,100$. ¿Cómo se comparan estas estimaciones con las respuestas exactas que puede hallar mediante la geometría?

49. **[T]** $y = \cos(\pi x)$ en el intervalo $[0, 1]$

50. **[T]** $y = 3x + 2$ en el intervalo $[3, 5]$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora o un programa de ordenador para evaluar las sumas de los puntos finales R_N y L_N para $N = 1{,}10{,}100$.

51. **[T]** $y = x^4 - 5x^2 + 4$ en el intervalo $[-2, 2]$, que tiene un área exacta de $\frac{32}{15}$

52. **[T]** $y = \ln x$ en el intervalo $[1, 2]$, que tiene un área exacta de $2\ln(2) - 1$

53. Explique por qué, si $f(a) \geq 0$ y f es creciente en $[a, b]$, que la estimación del punto del extremo izquierdo es un límite inferior para el área bajo el gráfico de f en $[a, b]$.

54. Explique por qué, si $f(b) \geq 0$ y f es decreciente en $[a, b]$, que la estimación del punto del extremo izquierdo es un límite superior para el área bajo el gráfico de f en $[a, b]$.

55. Demuestre que, en general, $R_N - L_N = (b\text{–}a) \times \frac{f(b)-f(a)}{N}$.

56. Explique por qué, si f es creciente en $[a, b]$, el error entre L_N o R_N y el área A bajo el gráfico de f es como máximo $(b\text{–}a)\,\frac{f(b)-f(a)}{N}$.

57. Para cada uno de los tres gráficos:

a. Obtenga un límite inferior $L(A)$ para el área encerrada por la curva sumando las áreas de los cuadrados *encerrados completamente* por la curva.
b. Obtener un límite superior $U(A)$ para el área añadiendo a $L(A)$ las áreas $B(A)$ de los cuadrados *encerrados parcialmente* por la curva
.

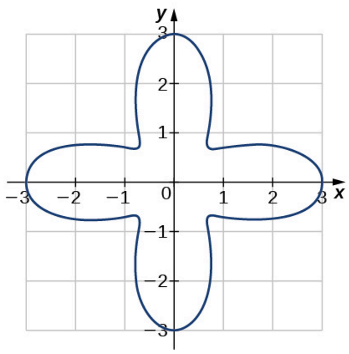


Gráfico 1

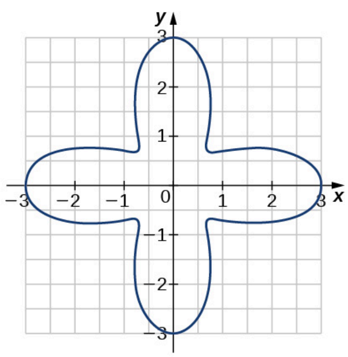


Gráfico 2

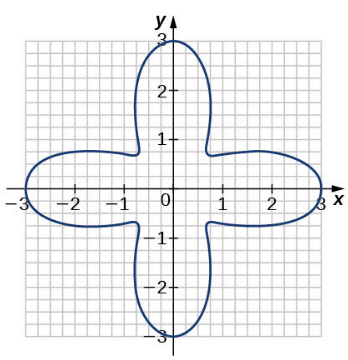
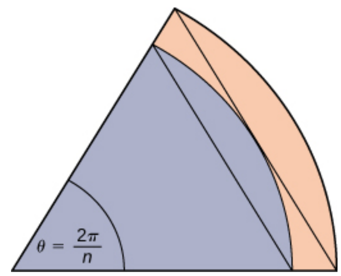


Gráfico 3

58. En el ejercicio anterior, explique por qué $L(A)$ no se hace más pequeño mientras $U(A)$ no se hace más grande al subdividir los cuadrados en cuatro casillas de áreas iguales.

59. Un círculo unitario está formado por cuñas *n* equivalentes a la cuña interior de la figura. La base del triángulo interior es 1 unidad y su altura es $\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\pi}\right)$. La base del triángulo exterior es $B = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ y la altura es $H = B\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Utiliza esta información para argumentar que el área de un círculo unitario es igual a *π*.



1.2 La integral definida

Objetivos de aprendizaje

1.2.1 Enunciar la definición de la integral definida.
1.2.2 Explicar los términos integrando, límites de integración y variable de integración.
1.2.3 Explicar cuándo una función es integrable.
1.2.4 Describir la relación entre la integral definida y el área neta.
1.2.5 Utilizar la geometría y las propiedades de las integrales definidas para evaluarlas.
1.2.6 Calcular el valor promedio de una función.

En el apartado anterior definimos el área bajo una curva en términos de las sumas de Riemann:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Sin embargo, esta definición tenía restricciones. Necesitábamos que $f(x)$ fuera continua y no negativa. Desafortunadamente, los problemas del mundo real no siempre se ajustan a estas restricciones. En esta sección, veremos cómo aplicar el concepto de área bajo la curva a un conjunto más amplio de funciones mediante el uso de la integral definida.

Definición y notación

La integral definida generaliza el concepto de área bajo una curva. Eliminamos los requisitos de que $f(x)$ sea continua y no negativa, y definimos la integral definida como sigue.

Definición

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo $[a, b]$, la **integral definida** de *f* de *a* a *b* viene dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x, \tag{1.8}$$

siempre que exista el límite. Si este límite existe, la función $f(x)$ se dice que es integrable en $[a, b]$, o que es una **función integrable**.

El símbolo de la integral en la definición anterior debería resultar familiar. Hemos visto una notación similar en el capítulo Aplicaciones de las derivadas (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/4-introduccion), donde utilizamos el símbolo de integral indefinida (sin la *a* y la *b* arriba y abajo) para representar una antiderivada. Aunque la notación para las integrales indefinidas puede parecer similar a la notación para una integral definida, no son lo mismo. Una integral definida es un número. Una integral indefinida es una familia de funciones. Más adelante en este capítulo examinaremos cómo se relacionan estos conceptos. Sin embargo, siempre hay que prestar mucha atención a la notación para saber si estamos trabajando con una integral definida o con una indefinida.

La notación integral se remonta a finales del siglo XVII y es una de las aportaciones de Gottfried Wilhelm Leibniz, a quien se suele considerar el codescubridor del cálculo, junto con Isaac Newton. El símbolo de integración ∫ es una S alargada, que indica sigma o suma. En una integral definida, por encima y por debajo del símbolo de la suma están los límites del intervalo, $[a, b]$. Los números *a* y *b* son valores de *x* y se denominan **límites de integración**; específicamente, *a* es el límite inferior y *b* es el límite superior. Para precisar, estamos utilizando la palabra *límite* de dos maneras diferentes en el contexto de la integral definida. En primer lugar, hablamos del límite de una suma dado que $n \to \infty$. En segundo lugar, los límites de la región se denominan *límites de integración*.

Llamamos a la función $f(x)$ el **integrando**, y la *dx* indica que $f(x)$ es una función con respecto a *x*, que se denomina **variable de integración**. Tenga en cuenta que, al igual que el índice en una suma, la variable de integración es una variable ficticia, y no tiene ninguna consecuencia en el cálculo de la integral. Podemos utilizar cualquier variable que queramos como variable de integración:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(u)\, du$$

Anteriormente, discutimos el hecho de que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces el límite $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$ existe y es único. Esto nos conduce al siguiente teorema, que enunciamos sin pruebas.

Teorema 1.1

Las funciones continuas son integrables

Si los valores de $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces *f* es integrable en $[a, b]$.

Funciones que no son continuas en $[a, b]$ puede seguir siendo integrable, lo que depende de la naturaleza de las discontinuidades. Por ejemplo, las funciones con un número finito de discontinuidades de salto en un intervalo cerrado son integrables.

También cabe destacar aquí que hemos mantenido el uso de una partición regular en las sumas de Riemann. Esta restricción no es estrictamente necesaria. Puede utilizarse cualquier partición para formar una suma de Riemann. Sin embargo, si se utiliza una partición no regular para definir la integral definida, no basta con tomar el límite a medida que el número de subintervalos llega al infinito. En cambio, debemos tomar el límite a medida que la anchura del subintervalo más grande llega a cero. Esto introduce una notación un poco más compleja en nuestros límites y hace los cálculos más difíciles sin obtener realmente mucha información adicional, así que nos quedamos con las particiones regulares para las sumas de Riemann.

EJEMPLO 1.7

Evaluación de una integral mediante la definición

Utilice la definición de la integral definida para evaluar $\int_0^2 x^2 \, dx$. Utilice una aproximación al extremo derecho para generar la suma de Riemann.

Solución

Primero queremos establecer una suma de Riemann. Con base en los límites de integración, tenemos $a = 0$ y $b = 2$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[0, 2]$. Entonces

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2}{n}.$$

Como estamos utilizando una aproximación al punto del extremo derecho para generar sumas de Riemann, para cada *i*, necesitamos calcular el valor de la función en el punto del extremo derecho del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. El punto del extremo derecho del intervalo es x_i, y como *P* es una partición regular,

$$x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + i\left[\frac{2}{n}\right] = \frac{2i}{n}.$$

Por lo tanto, el valor de la función en el extremo derecho del intervalo es

$$f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2}.$$

Entonces la suma de Riemann toma la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Utilizando la fórmula de la suma para $\sum_{i=1}^{n} i^2$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] \\ &= \frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3} \\ &= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}. \end{aligned}$$

Ahora, para calcular la integral definida, necesitamos tomar el límite dado que $n \to \infty$. Obtenemos

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{6n^2}\right) \\ &= \frac{8}{3}+0+0=\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

1.7 Utilice la definición de la integral definida para evaluar $\int_0^3 (2x-1)\,dx$. Utilice una aproximación al extremo derecho para generar la suma de Riemann.

Evaluación de integrales definidas

Evaluar las integrales definidas de esta manera puede ser bastante tedioso debido a la complejidad de los cálculos. Más adelante en este capítulo desarrollaremos técnicas para evaluar integrales definidas *sin* tomar límites de las sumas de Riemann. Sin embargo, por ahora podemos confiar en el hecho de que las integrales definidas representan el área bajo la curva, y podemos evaluar las integrales definidas utilizando fórmulas geométricas para calcular esa área. Hacemos esto para confirmar que las integrales definidas representan en efecto áreas, de modo que podamos discutir qué hacer en el caso de una curva de una función que cae por debajo del eje *x*.

EJEMPLO 1.8

Uso de fórmulas geométricas para calcular integrales definidas

Utilice la fórmula del área de un círculo para evaluar $\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$.

Solución

La función describe un semicírculo con radio 3. Para hallar

$$\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx,$$

queremos hallar el área bajo la curva en el intervalo $[3, 6]$. La fórmula del área de un círculo es $A = \pi r^2$. El área de un semicírculo es justo la mitad del área de un círculo, o $A = \left(\frac{1}{2}\right)\pi r^2$. El área sombreada en la Figura 1.16 cubre la mitad

del semicírculo, o $A = \left(\frac{1}{4}\right) \pi r^2$. Por lo tanto,

$$\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2} = \frac{1}{4}\pi(3)^2 = \frac{9}{4}\pi \approx 7{,}069.$$

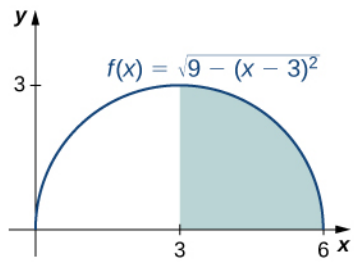


Figura 1.16 El valor de la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[3, 6]$ es el área de la región sombreada.

1.8 Utilice la fórmula del área de un trapecio para evaluar $\int_2^4 (2x+3)\,dx$.

El área y la integral definida

Cuando definimos la integral definida, eliminamos el requisito de que $f(x)$ sea no negativo. Pero ¿cómo interpretamos "el área bajo la curva" cuando $f(x)$ es negativo?

Área neta señalada

Volvamos a la suma de Riemann. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = 2 - 2x^2$ (que se muestra en la Figura 1.17) en el intervalo $[0, 2]$. Utilice $n = 8$ y elegir $\{x_i^*\}$ como punto del extremo izquierdo de cada intervalo. Construya un rectángulo en cada subintervalo de altura $f(x_i^*)$ y de anchura Δ*x*. Cuando $f(x_i^*)$ es positivo, el producto $f(x_i^*)\Delta x$ representa el área del rectángulo, igual que antes. Cuando $f(x_i^*)$ es negativo, sin embargo, el producto $f(x_i^*)\Delta x$ representa el *negativo* del área del rectángulo. La suma de Riemann se convierte entonces en

$$\sum_{i=1}^{8} f(x_i^*)\Delta x = (\text{Área de los rectángulos sobre el eje } x) - (\text{Área de los rectángulos por debajo del eje } x)$$

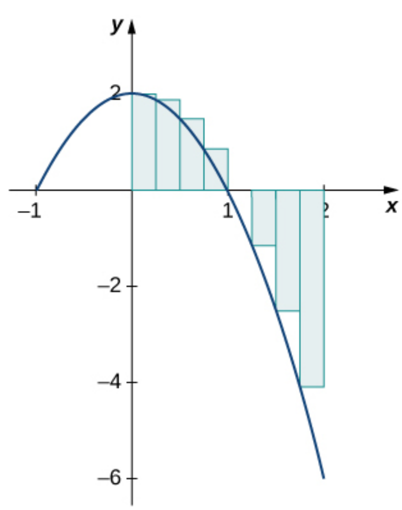


Figura 1.17 Para una función que es parcialmente negativa, la suma de Riemann es el área de los rectángulos por

encima del eje *x* menos el área de los rectángulos por debajo del eje *x*.

Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, la suma de Riemann se aproxima al área entre la curva por encima del eje *x* y el eje *x*, menos el área entre la curva por debajo del eje *x* y el eje *x*, como se muestra en la Figura 1.18. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\ &= A_1 - A_2. \end{aligned}$$

La cantidad $A_1 - A_2$ se denomina **área neta señalada**.

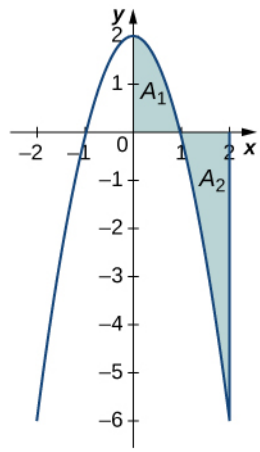


Figura 1.18 En el límite, la integral definida es igual al área A_1 menos el área A_2, o el área neta señalada.

Observe que el área neta señalada puede ser positiva, negativa o cero. Si el área sobre el eje *x* es mayor, el área neta señalada es positiva. Si el área bajo el eje *x* es mayor, el área neta señalada es negativa. Si las áreas por encima y por debajo del eje *x* son iguales, el área neta señalada es cero.

EJEMPLO 1.9

Hallar el área neta señalada

Calcule el área neta señalada entre la curva de la función $f(x) = 2x$ y el eje *x* en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución

La función produce una línea recta que forma dos triángulos: uno de $x = -3$ al $x = 0$ y el otro de $x = 0$ hasta $x = 3$ (Figura 1.19). Utilizando la fórmula geométrica del área de un triángulo, $A = \frac{1}{2}bh$, el área del triángulo A_1, sobre el eje, es

$$A_1 = \frac{1}{2}3(6) = 9,$$

donde 3 es la base y $2(3) = 6$ es la altura. El área del triángulo A_2, por debajo del eje, es

$$A_2 = \frac{1}{2}(3)(6) = 9,$$

donde 3 es la base y 6 la altura. Así, el área neta es

$$\int_{-3}^{3} 2x dx = A_1 - A_2 = 9 - 9 = 0.$$

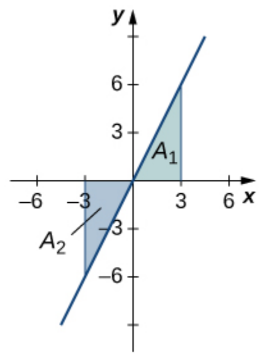
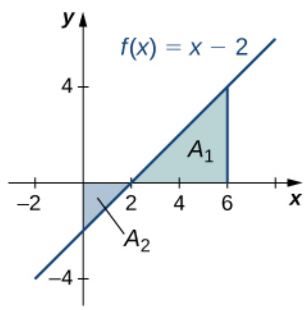


Figura 1.19 El área por encima de la curva y por debajo del eje *x* es igual al área por debajo de la curva y por encima del eje *x*.

Análisis

Si A_1 es el área por encima del eje *x* y A_2 es el área por debajo del eje *x*, entonces el área neta es $A_1 - A_2$. Como las áreas de los dos triángulos son iguales, el área neta es cero.

1.9 Halle el área neta señalada de $f(x) = x - 2$ en el intervalo $[0, 6]$, que se ilustra en la siguiente imagen.



Área total

Una aplicación de la integral definida es hallar el desplazamiento cuando se da una función de velocidad. Si los valores de $v(t)$ represente la velocidad de un objeto en función del tiempo, donde el área bajo la curva nos dice lo lejos que está el objeto de su posición original. Esta es una aplicación muy importante de la integral definida, y más adelante en el capítulo la examinamos con más detalle. Por ahora, solo vamos a ver algunos aspectos básicos para tener una idea de cómo funciona esto al estudiar las velocidades constantes.

Cuando la velocidad es una constante, el área bajo la curva es simplemente la velocidad por el tiempo. Esta idea es bastante conocida. Si un automóvil se aleja de su posición inicial en línea recta a una velocidad de 70 mph durante 2 horas, entonces se aleja 140 mi de su posición original (Figura 1.20). Utilizando la notación integral, tenemos

$$\int_0^2 70dt = 140.$$

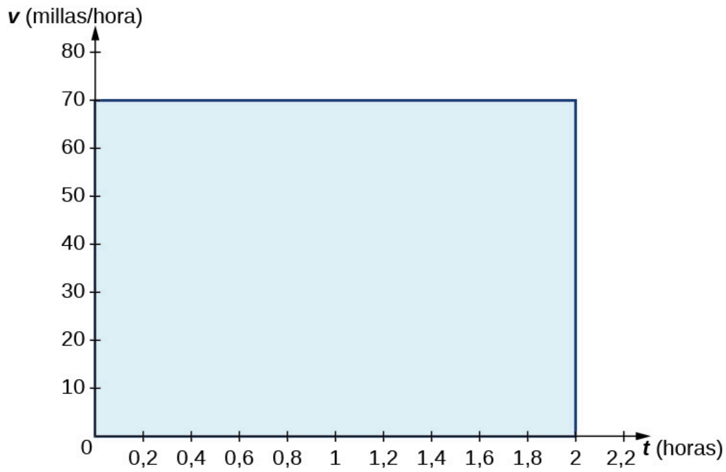


Figura 1.20 El área bajo la curva $v(t) = 75$ nos indica a qué distancia se encuentra el automóvil desde su punto de partida en un momento dado.

En el contexto del desplazamiento, el área neta señalada nos permite tener en cuenta la dirección. Si un automóvil viaja en línea recta hacia el norte a una velocidad de 60 mph durante 2 horas, se encuentra a 120 millas al norte de su posición inicial. Si el automóvil da la vuelta y viaja hacia el sur a una velocidad de 40 mph durante 3 horas, volverá a su posición inicial (Figura 1.21). De nuevo, utilizando la notación integral, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^2 60dt + \int_2^5 -40dt &= 120 - 120 \\ &= 0, \end{aligned}$$

En este caso el desplazamiento es cero.

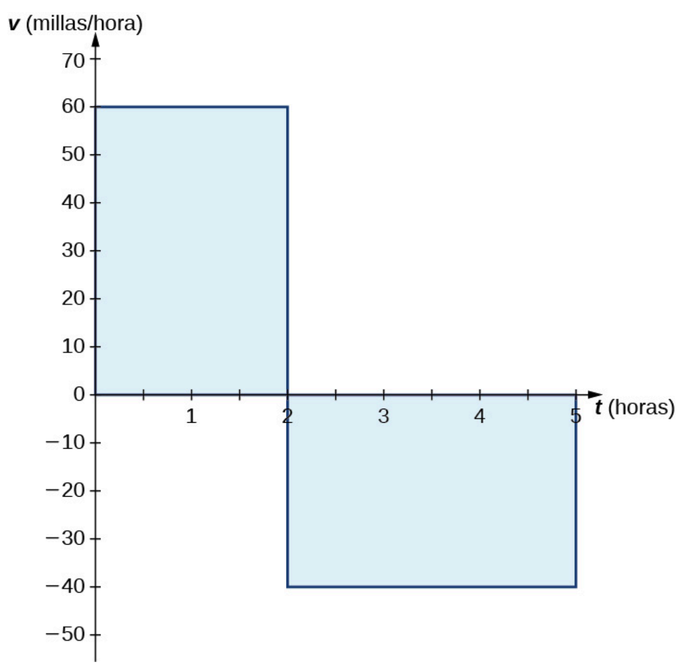


Figura 1.21 El área por encima del eje y el área por debajo del eje son iguales, por lo que el área neta señalada es cero.

Supongamos que queremos saber qué distancia recorre el automóvil en total, sin importar su dirección. En este caso, queremos conocer el área entre la curva y el eje *x*, independientemente de que esa área esté por encima o por debajo del eje. Esto se denomina el **área total**.

Gráficamente, es más fácil pensar en calcular el área total sumando las áreas por encima del eje y las áreas por debajo del eje (en vez de restar las áreas por debajo del eje, como hicimos con el área neta señalada). Para lograrlo matemáticamente, utilizamos la función de valor absoluto. Por lo tanto, la distancia total recorrida por el automóvil es

$$\int_0^2 |60|\, dt + \int_2^5 |-40|\, dt = \int_0^2 60dt + \int_2^5 40dt = 120 + 120 = 240.$$

Integrando estas ideas formalmente, enunciamos las siguientes definiciones.

Definición

Supongamos que $f(x)$ es una función integrable definida en un intervalo $[a, b]$. Supongamos que A_1 representa el área entre $f(x)$ y el eje *x* que se encuentra *por encima* del eje y que A_2 representa el área entre $f(x)$ y el eje *x* que se encuentra *debajo* del eje. Entonces, el **área neta señalada** entre $f(x)$ y el eje *x* viene dado por

$$\int_a^b f(x)\, dx = A_1 - A_2.$$

El **área total** entre $f(x)$ y el eje *x* viene dado por

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = A_1 + A_2.$$

EJEMPLO 1.10

Hallar el área total

Halle el área total entre $f(x) = x - 2$ y el eje *x* en el intervalo $[0, 6]$.

Solución

Calcule la intersección *x* como $(2, 0)$ (establezca $y = 0$, resuelva para *x*). Para hallar el área total, tome el área bajo el eje *x* sobre el subintervalo $[0, 2]$ y añádalo al área sobre el eje *x* en el subintervalo $[2, 6]$ (Figura 1.22).

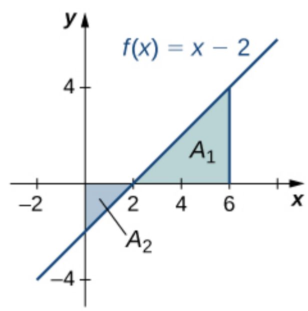


Figura 1.22 El área total entre la línea y el eje x sobre $[0, 6]$ es A_2 más A_1.

Tenemos

$$\int_0^6 |(x-2)|\, dx = A_2 + A_1.$$

Entonces, utilizando la fórmula del área de un triángulo, obtenemos

$$A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}.2.2 = 2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}.4.4 = 8.$$

El área total, entonces, es

$$A_1 + A_2 = 8 + 2 = 10.$$

1.10 Halle el área total entre la función $f(x) = 2x$ y el eje *x* en el intervalo $[-3, 3]$.

Propiedades de la integral definida

Las propiedades de las integrales indefinidas se aplican también a las integrales definidas. Las integrales definidas también tienen propiedades relacionadas con los límites de integración. Estas propiedades, junto con las reglas de integración que examinaremos más adelante en este capítulo, nos ayudan a manipular expresiones para evaluar integrales definidas.

Regla: propiedades de la integral definida

1. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad (1.9)$$

   Si los límites de integración son los mismos, la integral es solo una línea y no contiene área.

2. $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad (1.10)$$

   Si los límites se invierten, se coloca un signo negativo delante de la integral.

3. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad (1.11)$$

   La integral de una suma es la suma de las integrales.

4. $$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \quad (1.12)$$

   La integral de una diferencia es la diferencia de las integrales.

5. $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x) \quad (1.13)$$

   para la constante *c*. La integral del producto de una constante y una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

6. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (1.14)$$

   Aunque esta fórmula se aplica normalmente cuando *c* está entre *a* y *b*, la fórmula es válida para todos los valores de *a*, *b* y *c*, siempre que $f(x)$ sea integrable en el intervalo mayor.

EJEMPLO 1.11

Usar las propiedades de la integral definida

Utilice las propiedades de la integral definida para expresar la integral definida de $f(x) = -3x^3 + 2x + 2$ en el intervalo $[-2, 1]$ como la suma de tres integrales definidas.

Solución

Utilizando la notación integral, tenemos $\int_{-2}^{1} \left(-3x^3 + 2x + 2\right) dx$. Aplicamos las propiedades 3. y 5. para obtener

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\left(-3x^3+2x+2\right)dx &= \int_{-2}^{1}-3x^3dx+\int_{-2}^{1}2xdx+\int_{-2}^{1}2dx\\ &= -3\int_{-2}^{1}x^3dx+2\int_{-2}^{1}xdx+\int_{-2}^{1}2dx.\end{aligned}$$

1.11 Utilice las propiedades de la integral definida para expresar la integral definida de $f(x)=6x^3-4x^2+2x-3$ en el intervalo $[1,3]$ como la suma de cuatro integrales definidas.

EJEMPLO 1.12

Usar las propiedades de la integral definida

Si se sabe que $\int_0^8 f(x)\,dx=10$ y $\int_0^5 f(x)\,dx=5$, halle el valor de $\int_5^8 f(x)\,dx$.

Solución

Por la propiedad 6.,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^8 f(x)\,dx &= \int_0^5 f(x)\,dx+\int_5^8 f(x)\,dx\\ 10 &= 5+\int_5^8 f(x)\,dx\\ 5 &= \int_5^8 f(x)\,dx.\end{aligned}$$

1.12 Si se sabe que $\int_1^5 f(x)\,dx=-3$ y $\int_2^5 f(x)\,dx=4$, halle el valor de $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Propiedades de comparación de las integrales

A veces, una imagen puede decirnos más sobre una función que los resultados de los cálculos. La comparación de las funciones por sus gráficos y sus expresiones algebraicas puede dar a menudo un nuevo enfoque del proceso de integración. Intuitivamente, podríamos decir que si una función $f(x)$ está por encima de otra función $g(x)$, entonces el área entre $f(x)$ y el eje x es mayor que el área entre $g(x)$ y el eje x. Esto es cierto según el intervalo en el que se hace la comparación. Las propiedades de las integrales definidas son válidas si $a<b$, $a=b$, o $a>b$. Las siguientes propiedades, sin embargo, solo se refieren al caso $a\le b$, y se utilizan cuando queremos comparar los tamaños de las integrales.

Teorema 1.2

Teorema de comparación

i. Si los valores de $f(x)\ge 0$ por $a\le x\le b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge 0.$$

ii. Si $f(x)\ge g(x)$ para $a\le x\le b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx.$$

iii. Si m y M son constantes tales que $m \leq f(x) \leq M$ por $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\leq M(b-a).$$

EJEMPLO 1.13

Comparación de dos funciones en un intervalo dado

Compare $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1+x}$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

Es necesario graficar estas funciones para entender cómo se comparan en el intervalo $[0, 1]$. Inicialmente, cuando se grafica en una calculadora gráfica, $f(x)$ parece estar por encima de $g(x)$ en todas partes. Sin embargo, en el intervalo $[0, 1]$, los gráficos parecen estar superpuestos. Tenemos que acercarnos para ver que, en el intervalo $[0, 1]$, $g(x)$ está por encima de $f(x)$. Las dos funciones se intersecan en $x = 0$ y $x = 1$ (Figura 1.23).

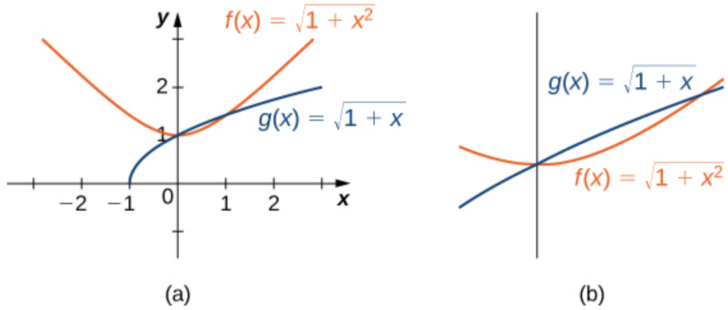


Figura 1.23 (a) La función $f(x)$ aparece sobre la función $g(x)$ excepto en el intervalo $[0, 1]$ (b) La visualización del mismo gráfico con una mayor ampliación lo muestra más claramente.

Podemos ver en el gráfico que en el intervalo $[0, 1]$, $g(x) \geq f(x)$. Comparación de las integrales en el intervalo especificado $[0, 1]$, también vemos que $\int_0^1 g(x)\,dx \geq \int_0^1 f(x)\,dx$ (Figura 1.24). La zona delgada y sombreada en rojo muestra cuánta diferencia hay entre estas dos integrales en el intervalo $[0, 1]$.

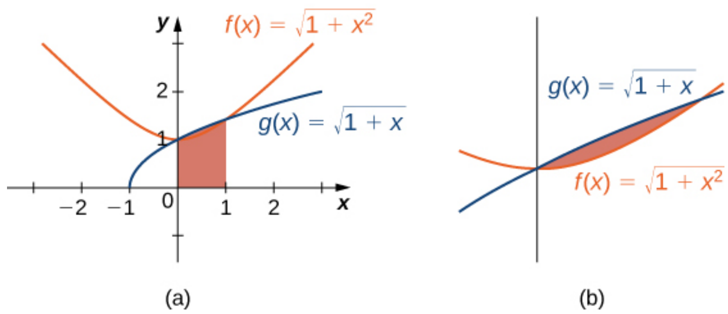


Figura 1.24 (a) El gráfico muestra que en el intervalo $[0, 1]$, $g(x) \geq f(x)$, donde la igualdad se mantiene solo en los puntos extremos del intervalo. (b) La visualización del mismo gráfico con una mayor ampliación muestra esto más claramente.

Valor promedio de una función

A menudo necesitamos hallar el promedio de un conjunto de números, como la nota promedio de un examen. Supongamos que obtuvo las siguientes puntuaciones en su clase de álgebra: 89, 90, 56, 78, 100 y 69. La nota del semestre es el promedio de los resultados de los exámenes y quiere saber qué nota obtendrá. Podemos hallar el promedio sumando todas las puntuaciones y dividiendo por el número de puntuaciones. En este caso, hay seis resultados de pruebas. Por lo tanto,

$$\frac{89 + 90 + 56 + 78 + 100 + 69}{6} = \frac{482}{6} \approx 80{,}33.$$

Por lo tanto, la nota promedio del examen es de aproximadamente 80,33, lo que se traduce en una calificación notable en la mayoría de las escuelas.

Supongamos, sin embargo, que tenemos una función $v(t)$ que nos da la velocidad de un objeto en cualquier momento *t*, y queremos hallar la rapidez media del objeto. La función $v(t)$ adopta un número infinito de valores, por lo que no podemos utilizar el proceso que acabamos de describir. Por fortuna, podemos utilizar una integral definida para hallar el valor promedio de una función como esta.

Supongamos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que $[a, b]$ se divide en *n* subintervalos de anchura $\Delta x = (b\text{–}a)/n$. Elija un representante x_i^* en cada subintervalo y calcule $f\left(x_i^*\right)$ por $i = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras, considere cada $f\left(x_i^*\right)$ como un muestreo de la función en cada subintervalo. El valor promedio de la función puede entonces aproximarse como

$$\frac{f\left(x_1^*\right) + f\left(x_2^*\right) + \cdots + f\left(x_n^*\right)}{n},$$

que es básicamente la misma expresión utilizada para calcular la media de los valores discretos.

Pero sabemos que $\Delta x = \frac{b\text{–}a}{n}$, por lo que $n = \frac{b\text{–}a}{\Delta x}$, y obtenemos

$$\frac{f\left(x_1^*\right) + f\left(x_2^*\right) + \cdots + f\left(x_n^*\right)}{n} = \frac{f\left(x_1^*\right) + f\left(x_2^*\right) + \cdots + f\left(x_n^*\right)}{\frac{(b\text{–}a)}{\Delta x}}.$$

Siguiendo con el álgebra, el numerador es una suma que se representa como $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)$, y estamos dividiendo por una fracción. Para dividir por una fracción, invierta el denominador y multiplique. Así, un valor aproximado del valor promedio de la función viene dado por

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)}{\frac{(b\text{–}a)}{\Delta x}} = \left(\frac{\Delta x}{b\text{–}a}\right) \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)$$

$$= \left(\frac{1}{b\text{–}a}\right) \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann. Luego, para obtener el valor promedio *exacto*, se toma el límite a medida que *n* llega al infinito. Así, el valor promedio de una función viene dado por

$$\frac{1}{b\text{–}a} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x = \frac{1}{b\text{–}a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Definición

Supongamos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces, el **valor promedio de la función** $f(x)$ (o $\boldsymbol{f_{\text{ave}}}$) en $[a, b]$ viene dada por

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b\text{–}a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

EJEMPLO 1.14

Hallar el valor promedio de una función lineal

Calcule el valor promedio de $f(x) = x + 1$ en el intervalo $[0, 5]$.

Solución

En primer lugar, grafique la función en el intervalo indicado, como se muestra en la Figura 1.25.

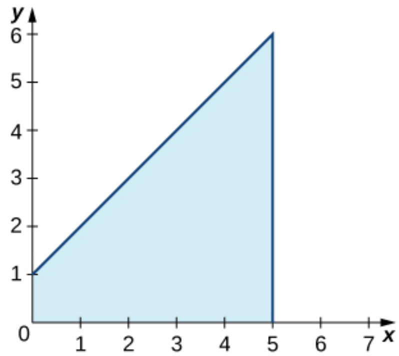


Figura 1.25 El gráfico muestra el área bajo la función $f(x) = x + 1$ en $[0, 5]$.

La región es un trapecio recostado sobre su lado, por lo que podemos utilizar la fórmula del área de un trapecio $A = \frac{1}{2}h(a + b)$, donde h representa la altura, y a y b representan los dos lados paralelos. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^5 x + 1dx &= \tfrac{1}{2}h(a + b)\\ &= \tfrac{1}{2}.5.(1 + 6)\\ &= \tfrac{35}{2}.\end{aligned}$$

Así, el valor promedio de la función es

$$\frac{1}{5 - 0}\int_0^5 x + 1dx = \frac{1}{5}.\frac{35}{2} = \frac{7}{2}.$$

1.13 Calcule el valor promedio de $f(x) = 6 - 2x$ en el intervalo $[0, 3]$.

SECCIÓN 1.2 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, expresa los límites como integrales.

60. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)\,\Delta x$ en $[1, 3]$

61. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(5(x_i^*)^2 - 3(x_i^*)^3\right)\Delta x$ en $[0, 2]$

62. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \text{sen}^2(2\pi x_i^*)\,\Delta x$ en $[0, 1]$

63. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \cos^2(2\pi x_i^*)\,\Delta x$ en $[0, 1]$

En los siguientes ejercicios, dados L_n o R_n como se indica, exprese sus límites dado que $n \to \infty$ como integrales definidas, identificando los intervalos correctos.

64. $L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i - 1}{n}$

65. $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$

66. $L_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + 2\frac{i - 1}{n}\right)$

grandes.

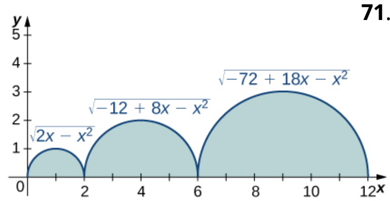
67. $R_n \text{ n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3+3\frac{i}{n}\right)$
grandes.

68. $L_n = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}2\pi\frac{i-1}{n}\cos\left(2\pi\frac{i-1}{n}\right)$
grandes.

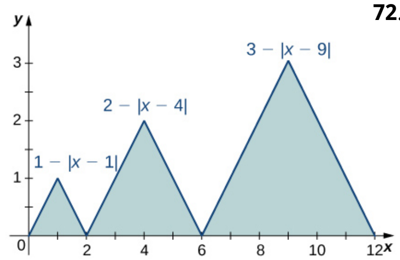
69. $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\log\left(\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\right)$
grandes.

En los siguientes ejercicios, evalúe las integrales de las funciones graficadas utilizando las fórmulas de áreas de triángulos y círculos, y restando las áreas bajo el eje x.

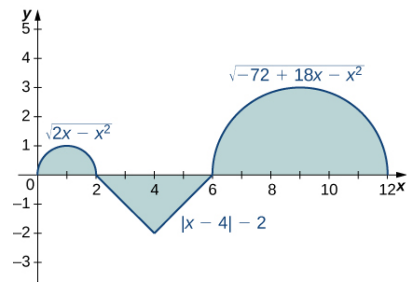
70.



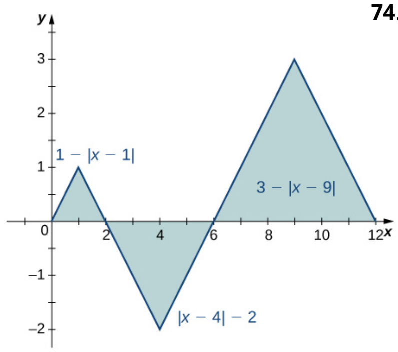
71.



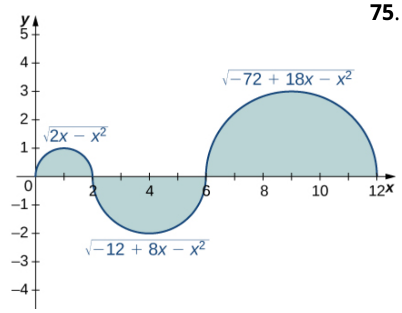
72.



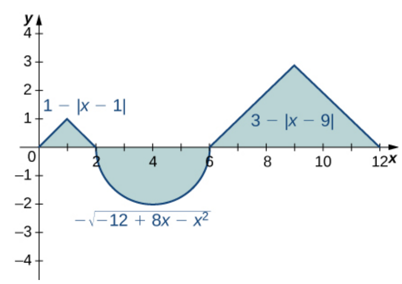
73.



74.



75.



En los siguientes ejercicios, evalúe la integral utilizando las fórmulas de área.

76. $\int_0^3 (3-x)\,dx$

77. $\int_2^3 (3-x)\,dx$

78. $\int_{-3}^3 (3-|x|)\,dx$

79. $\int_0^6 (3-|x-3|)\,dx$

80. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}dx$

81. $\int_1^5 \sqrt{4-(x-3)^2}dx$

82. $\int_0^{12} \sqrt{36-(x-6)^2}dx$

83. $\int_{-2}^3 (3-|x|)\,dx$

En los siguientes ejercicios, utilice los promedios de los valores en los extremos izquierdo (L) y derecho (R) para calcular las integrales de las funciones lineales a trozos con gráficos que pasan por la lista de puntos dada en los intervalos indicados.

84. $\{(0,0),(2,1),(4,3),(5,0),(6,0),(8,3)\}$ en $[0,8]$

85. $\{(0,2),(1,0),(3,5),(5,5),(6,2),(8,0)\}$ en $[0,8]$

86. $\{(-4,-4), (-2,0), (0,-2), (3,3), (4,3)\}$ en $[-4, 4]$

87. $\{(-4,0), (-2,2), (0,0), (1,2), (3,2), (4,0)\}$ en $[-4, 4]$

Supongamos que $\int_0^4 f(x)\,dx = 5$ *y* $\int_0^2 f(x)\,dx = -3$, *y* $\int_0^4 g(x)\,dx = -1$ *y* $\int_0^2 g(x)\,dx = 2$. *En los siguientes ejercicios, calcule las integrales.*

88. $\int_0^4 (f(x) + g(x))\,dx$

89. $\int_2^4 (f(x) + g(x))\,dx$

90. $\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx$

91. $\int_2^4 (f(x) - g(x))\,dx$

92. $\int_0^2 (3f(x) - 4g(x))\,dx$

93. $\int_2^4 (4f(x) - 3g(x))\,dx$

En los siguientes ejercicios, utilice la identidad $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \int_{-A}^{0} f(x)\,dx + \int_0^A f(x)\,dx$ *para calcular las integrales.*

94. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + t^2}\,dt$
(Pista: $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t)$).
grandes.

95. $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \frac{t}{1 + \cos t}\,dt$

En los siguientes ejercicios, halle el área neta señalada entre $f(x)$ *y el eje x.*

96. $\int_1^3 (2 - x)\,dx$ (*Pista:* Mire el gráfico de *f*).

97. $\int_2^4 (x - 3)^3\,dx$ (*Pista:* Mire el gráfico de *f*.)

En los siguientes ejercicios, dado que $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, *y* $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$, *calcular las integrales.*

98. $\int_0^1 \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\,dx$

99. $\int_0^1 \left(1 - x + x^2 - x^3\right)\,dx$

100. $\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$

101. $\int_0^1 (1 - 2x)^3\,dx$

102. $\int_0^1 \left(6x - \frac{4}{3}x^2\right)\,dx$

103. $\int_0^1 \left(7 - 5x^3\right)\,dx$

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema de comparación.

104. Demuestre que $\int_0^3 \left(x^2 - 6x + 9\right)\,dx \geq 0.$

105. Demuestre que $\int_{-2}^{3} (x - 3)(x + 2)\,dx \leq 0.$

106. Demuestre que $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx.$

107. Demuestre que $\int_1^2 \sqrt{1 + x}\,dx \leq \int_1^2 \sqrt{1 + x^2}\,dx.$

108. Demuestre que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt \geq \frac{\pi}{4}.$
(Pista: $\operatorname{sen} t \geq \frac{2t}{\pi}$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

109. Demuestre que $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t\,dt \geq \pi\sqrt{2}/4.$

En los siguientes ejercicios, halle el valor promedio f_{ave} de f entre a y b, y halle un punto c, donde $f(c) = f_{\text{ave}}$.

110. $f(x) = x^2, a = -1, b = 1$

111. $f(x) = x^5, a = -1, b = 1$

112. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, a = 0, b = 2$

113. $f(x) = (3 - |x|), a = -3, b = 3$

114. $f(x) = \operatorname{sen} x, a = 0, b = 2\pi$

115. $f(x) = \cos x, a = 0, b = 2\pi$

En los siguientes ejercicios, aproxime el valor promedio utilizando las sumas de Riemann L_{100} and R_{100}. ¿Cómo se compara su respuesta con la respuesta exacta dada?

116. **[T]** $y = \ln(x)$ en el intervalo $[1, 4]$; la solución exacta es $\frac{\ln(256)}{3} - 1$.

117. **[T]** $y = e^{x/2}$ en el intervalo $[0, 1]$; la solución exacta es $2\left(\sqrt{e} - 1\right)$.

118. **[T]** $y = \tan x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; la solución exacta es $\frac{2\ln(2)}{\pi}$.

119. **[T]** $y = \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ en el intervalo $[-1, 1]$; la solución exacta es $\frac{\pi}{6}$.

En los siguientes ejercicios, calcule el valor promedio utilizando las sumas de Riemann izquierdas L_N para $N = 1, 10, 100$. ¿Cómo se compara la exactitud con el valor exacto dado?

120. **[T]** $y = x^2 - 4$ en el intervalo $[0, 2]$; la solución exacta es $-\frac{8}{3}$.

121. **[T]** $y = xe^{x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$; la solución exacta es $\frac{1}{4}\left(e^4 - 1\right)$.

122. **[T]** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en el intervalo $[0, 4]$; la solución exacta es $\frac{15}{64\ln(2)}$.

123. **[T]** $y = x \operatorname{sen}\left(x^2\right)$ en el intervalo $[-\pi, 0]$; la solución exacta es $\frac{\cos\left(\pi^2\right) - 1}{2\pi}$.

124. Supongamos que $A = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t dt$ y $B = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$. Demuestre que $A + B = 2\pi$ y $A = B$.

125. Supongamos que $A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t dt = \pi$ y $B = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 t dt$. Demuestre que $A - B = \frac{\pi}{2}$.

126. Demuestre que el valor promedio de $\operatorname{sen}^2 t$ en $[0, 2\pi]$ es igual a 1/2. Sin hacer más cálculos, determine si el valor promedio de $\operatorname{sen}^2 t$ en $[0, \pi]$ también es igual a 1/2.

127. Demuestre que el valor promedio de $\cos^2 t$ en $[0, 2\pi]$ es igual a 1/2. Sin hacer más cálculos, determine si el valor promedio de $\cos^2(t)$ en $[0, \pi]$ también es igual a $1/2$.

128. Explique por qué los gráficos de una función cuadrática (parábola) $p(x)$ y una función lineal $\ell(x)$ pueden intersecarse como máximo en dos puntos. Supongamos que $p(a) = \ell(a)$ y $p(b) = \ell(b)$, y que $\int_a^b p(t)\, dt > \int_a^b \ell(t)\, dt$. Explique por qué $\int_c^d p(t) > \int_c^d \ell(t)\, dt$ siempre que $a \le c < d \le b$.

129. Supongamos que la parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$ se abre hacia abajo ($a < 0$) y tiene un vértice de $y = \frac{-b}{2a} > 0$. ¿Para qué intervalo $[A, B]$ es $\int_A^B \left(ax^2 + bx + c\right) dx$ lo más grande posible?

130. Supongamos que $[a, b]$ se puede subdividir en subintervalos $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N = b$ de manera que $f \geq 0$ en $\left[a_{i-1}, a_i\right]$ o $f \leq 0$ en $\left[a_{i-1}, a_i\right]$. Establezca $A_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,dt$.

a. Explique por qué $\int_a^b f(t)\,dt = A_1 + A_2 + \cdots + A_N$.

b. Luego, explique por qué $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

131. Supongamos que *f* y *g* son funciones continuas tales que $\int_c^d f(t)\,dt \leq \int_c^d g(t)\,dt$ para cada subintervalo $[c, d]$ de $[a, b]$. Explique por qué $f(x) \leq g(x)$ para todos los valores de *x*.

132. Supongamos que el valor promedio de *f* sobre $[a, b]$ es 1 y el valor promedio de *f* sobre $[b, c]$ es 1 donde $a < c < b$. Demuestre que el valor promedio de *f* sobre $[a, c]$ también es 1.

133. Supongamos que $[a, b]$ se puede dividir. Al tomar $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ tal que el valor promedio de *f* en cada subintervalo $\left[a_{i-1}, a_i\right] = 1$ es igual a 1 por cada $i = 1, \ldots, N$. Explique por qué el valor promedio de *f* sobre $[a, b]$ también es igual a 1.

134. Supongamos que para cada *i* tal que $1 \leq i \leq N$ se tiene $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt = i$. Demuestre que $\int_0^N f(t)\,dt = \frac{N(N+1)}{2}$.

135. Supongamos que para cada *i* tal que $1 \leq i \leq N$ se tiene $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt = i^2$. Demuestre que $\int_0^N f(t)\,dt = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

136. **[T]** Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha L_{10} y R_{10} y su promedio $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ por $f(t) = t^2$ en $[0, 1]$. Dado que $\int_0^1 t^2\,dt = 0{,}\overline{33}$, ¿hasta cuántos decimales es $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ precisa?

137. **[T]** Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_{10} y R_{10}, y su promedio $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ por $f(t) = \left(4 - t^2\right)$ en $[1, 2]$. Dado que $\int_1^2 \left(4 - t^2\right) dt = 1\overline{66}$, ¿hasta cuántos decimales es $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ precisa?

138. Si los valores de $\int_1^5 \sqrt{1 + t^4}\,dt = 41{,}7133\ldots$, ¿qué es $\int_1^5 \sqrt{1 + u^4}\,du$?

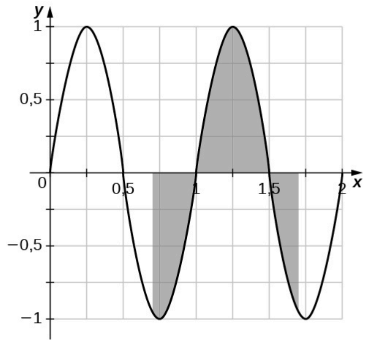
139. Estime $\int_0^1 t\,dt$ utilizando las sumas de los extremos izquierdo y derecho, cada una con un solo rectángulo. ¿Cómo se compara el promedio de estas sumas de los extremos izquierdo y derecho con el valor real $\int_0^1 t\,dt$?

140. Estime $\int_0^1 t\,dt$ por comparación con el área de un único rectángulo con altura igual al valor de *t* en el punto medio $t = \frac{1}{2}$. ¿Cómo se compara esta estimación del punto medio con el valor real $\int_0^1 t\,dt$?

141. A partir del gráfico de $\text{sen}\,(2\pi x)$ que se muestra:

a. Explique por qué $\int_0^1 \text{sen}\,(2\pi t)\,dt = 0.$

b. Explique por qué, en general, $\int_a^{a+1} \text{sen}\,(2\pi t)\,dt = 0$ para cualquier valor de *a*.



142. Si *f* es 1-periódica $(f\,(t+1) = f\,(t))$, impar, e integrable sobre $[0, 1]$, ¿es siempre cierto que $\int_0^1 f\,(t)\,dt = 0$?

143. Si *f* es 1-periódica y $\int_0^1 f\,(t)\,dt = A$, ¿es necesariamente cierto que $\int_a^{1+a} f\,(t)\,dt = A$ para todos las *A*?

1.3 El teorema fundamental del cálculo

Objetivos de aprendizaje

1.3.1 Describir el significado del teorema del valor medio para integrales.
1.3.2 Indicar el significado del teorema fundamental del cálculo, parte 1.
1.3.3 Utilizar el teorema fundamental del cálculo, parte 1, para evaluar derivadas de integrales.
1.3.4 Indicar el significado del teorema fundamental del cálculo, parte 2.
1.3.5 Utilizar el teorema fundamental del cálculo, parte 2, para evaluar integrales definidas.
1.3.6 Explicar la relación entre diferenciación e integración.

En los dos apartados anteriores vimos la integral definida y su relación con el área bajo la curva de una función. Desafortunadamente, hasta ahora las únicas herramientas de que disponemos para calcular el valor de una integral definida son las fórmulas geométricas de área y los límites de las sumas de Riemann, y ambas aproximaciones son extremadamente engorrosas. En esta sección veremos algunas técnicas más potentes y útiles para evaluar integrales definidas.

Estas nuevas técnicas se basan en la relación entre diferenciación e integración. Esta relación fue descubierta y explorada tanto por Sir Isaac Newton como por Gottfried Wilhelm Leibniz (entre otros) a finales de 1600 y principios de 1700, y está codificada en lo que ahora llamamos el **teorema fundamental del cálculo**, que tiene dos partes que examinamos en esta sección. Su propio nombre indica lo fundamental que es este teorema para todo el desarrollo del cálculo.

MEDIOS

Las aportaciones de Isaac Newtona las matemáticas y la física cambiaron nuestra forma de ver el mundo. Las relaciones que descubrió, codificadas como las leyes de Newton y la ley de la gravitación universal, se siguen enseñando como material fundamental en la física actual, y su cálculo ha dado lugar a ámbitos completos dentro de las matemáticas. Para saber más, lea una breve biografía (http://www.openstax.org/l/20_newtonbio) de Newton con videos multimedia.

Sin embargo, antes de llegar a este teorema crucial, vamos a examinar otro teorema importante, el teorema del valor medio para integrales, que es necesario para demostrar el teorema fundamental del cálculo.

Teorema del valor medio para integrales

El **teorema del valor medio para integrales** afirma que una función continua en un intervalo cerrado toma su valor medio en algún punto de ese intervalo. El teorema garantiza que si $f\,(x)$ es continua, existe un punto *c* en un intervalo

$[a, b]$ tal que el valor de la función en *c* es igual al valor medio de $f(x)$ en $[a, b]$. Enunciamos este teorema matemáticamente con la ayuda de la fórmula del valor medio de una función que presentamos al final del apartado anterior.

Teorema 1.3

Teorema del valor medio para integrales

Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces hay al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.15}$$

Esta fórmula también puede expresarse como

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Prueba

Dado que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, por el teorema del valor extremo (consulte Máximos y mínimos (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/4-3-maximos-y-minimos)), asume valores mínimos y máximos —*m* y *M*, respectivamente— en $[a, b]$. Entonces, para toda *x* en $[a, b]$, tenemos $m \le f(x) \le M$. Por lo tanto, por el teorema de comparación (consulte La integral definida), tenemos

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Al dividir entre $b-a$ nos da

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Dado que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ es un número entre *m* y *M*, y ya que $f(x)$ es continua y asume los valores *m* y *M* en $[a, b]$, por el teorema del valor intermedio (consulte Continuidad (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/2-4-continuidad)), existe un número *c* en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx,$$

y la prueba está completa.

□

EJEMPLO 1.15

Encontrar el valor medio de una función

Calcule el valor promedio de la función $f(x) = 8 - 2x$ en el intervalo $[0, 4]$ y halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de la función sobre $[0, 4]$.

Solución

La fórmula indica el valor medio de $f(x)$ está dada por

$$\frac{1}{4-0} \int_0^4 (8-2x)\,dx.$$

Podemos ver en la Figura 1.26 que la función representa una línea recta y forma un triángulo rectángulo delimitado por los ejes *x* y *y*. El área del triángulo es $A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$. Tenemos

$$A = \frac{1}{2}(4)(8) = 16.$$

El valor medio se obtiene multiplicando el área por $1/(4-0)$. Así, el valor medio de la función es

$$\frac{1}{4}(16) = 4.$$

Establezca el valor medio igual a $f(c)$ y resuelva para *c*.

$$\begin{aligned} 8 - 2c &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

A $c = 2, f(2) = 4.$

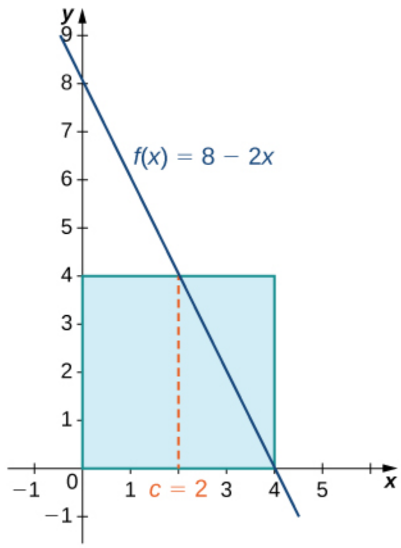


Figura 1.26 Por el teorema del valor medio, la función continua $f(x)$ toma su valor medio en *c* al menos una vez en un intervalo cerrado.

1.14 Calcule el valor promedio de la función $f(x) = \frac{x}{2}$ en el intervalo $[0, 6]$ y halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de la función sobre $[0, 6]$.

EJEMPLO 1.16

Cómo encontrar el punto en el que una función toma su valor medio

Dados $\int_0^3 x^2\,dx = 9$, halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$.

Solución

Buscamos el valor de *c* tal que

$$f(c) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}(9) = 3.$$

Sustitución de $f(c)$ con c^2, tenemos

$$\begin{aligned} c^2 &= 3 \\ c &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dado que $-\sqrt{3}$ está fuera del intervalo, toma solo el valor positivo. Así, $c = \sqrt{3}$ (Figura 1.27).

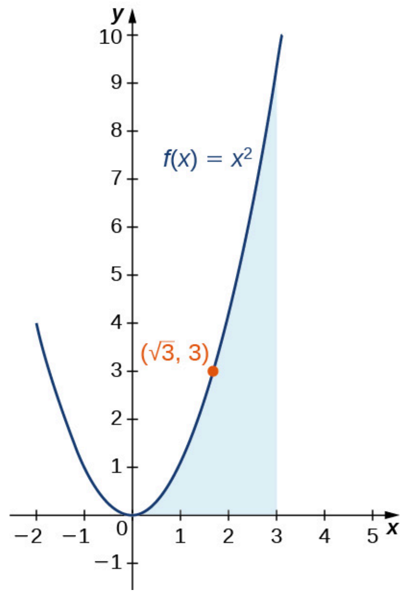


Figura 1.27 En el intervalo $[0, 3]$, la función $f(x) = x^2$ adquiere su valor medio en $c = \sqrt{3}$.

1.15 Dados $\int_0^3 \left(2x^2 - 1\right) dx = 15$, halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de $f(x) = 2x^2 - 1$ en $[0, 3]$.

Teorema fundamental del cálculo, parte 1: Integrales y antiderivadas

Como se dijo anteriormente, el teorema fundamental del cálculo es un teorema extremadamente poderoso que establece la relación entre la diferenciación y la integración, y nos da una manera de evaluar integrales definidas sin usar sumas de Riemann o calcular áreas. El teorema consta de dos partes, la primera de las cuales, el **teorema fundamental del cálculo, parte 1**, se enuncia aquí. La Parte 1 establece la relación entre diferenciación e integración.

Teorema 1.4

Teorema fundamental del cálculo, parte 1

Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, y la función $F(x)$ se define por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \tag{1.16}$$

entonces $F'(x) = f(x)$ en $[a, b]$.

Antes de profundizar en la prueba, vale la pena mencionar un par de sutilezas. En primer lugar, un comentario sobre la notación. Observe que hemos definido una función, $F(x)$, como la integral definida de otra función, $f(t)$, desde el punto *a* hasta el punto *x*. A primera vista es confuso, porque hemos dicho varias veces que una integral definida es un número, y aquí parece que es una función. La clave aquí es darse cuenta que para cualquier valor particular de *x*, la integral definida es un número. Así que la función $F(x)$ responde con un número (el valor de la integral definida) para cada valor de *x*.

En segundo lugar, merece la pena comentar algunas de las implicaciones clave de este teorema. Por algo se llama teorema *fundamental* del cálculo. No solo establece una relación entre integración y diferenciación, sino que también garantiza que cualquier función integrable tiene una antiderivada. En concreto, garantiza que cualquier función continua tiene una antiderivada.

Prueba

Al aplicar la definición de la derivada, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Si observamos atentamente esta última expresión, vemos $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ es solo el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[x, x+h]$. Por lo tanto, por el Teorema del valor medio para integrales, hay algún número c en $[x, x+h]$ tal que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(c).$$

Además, como c está entre x y $x + h$, c se aproxima a x a medida que h se acerca a cero. Además, como $f(x)$ es continua, tenemos $\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$. Uniendo todas estas piezas, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

y la prueba está completa.

□

EJEMPLO 1.17

Halle una derivada con el teorema fundamental del cálculo

Utilice el Teorema fundamental del cálculo, parte 1 para encontrar la derivada de

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt.$$

Solución

Según el teorema fundamental del cálculo, la derivada viene dada por

$$g'(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

1.16 Utilice el teorema fundamental del cálculo, parte 1 para encontrar la derivada de $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2+4}\,dx$.

EJEMPLO 1.18

Uso del teorema fundamental y la regla de la cadena para calcular derivadas

Supongamos que $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t\,dt$. Calcule $F'(x)$.

Solución

Suponiendo que $u(x) = \sqrt{x}$, tenemos $F(x) = \int_1^{u(x)} \operatorname{sen} t\,dt$. Así, por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \operatorname{sen}(u(x))\frac{du}{dx} \\ &= \operatorname{sen}(u(x)) . \left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

1.17 Supongamos que $F(x) = \int_1^{x^3} \cos t\,dt$. Calcule $F'(x)$.

EJEMPLO 1.19

Uso del teorema fundamental del cálculo con los límites de integración de dos variables

Supongamos que $F(x) = \int_x^{2x} t^3\,dt$. Calcule $F'(x)$.

Solución

Tenemos $F(x) = \int_x^{2x} t^3\,dt$. Ambos límites de integración son variables, por lo que necesitamos dividir esto en dos integrales. Obtenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} t^3\,dt \\ &= \int_x^{0} t^3\,dt + \int_0^{2x} t^3\,dt \\ &= -\int_0^{x} t^3\,dt + \int_0^{2x} t^3\,dt. \end{aligned}$$

Al diferenciar el primer término, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3\,dt\right] = -x^3.$$

A diferenciar el segundo término, primero suponemos que $u(x) = 2x$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3\,dt\right] &= \frac{d}{dx}\left[\int_0^{u(x)} t^3\,dt\right] \\ &= (u(x))^3\frac{du}{dx} \\ &= (2x)^3 . 2 \\ &= 16x^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \tfrac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3\,dt\right] + \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3\,dt\right] \\ &= -x^3 + 16x^3 \\ &= 15x^3. \end{aligned}$$

1.18 Supongamos que $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,dt$. Calcule $F'(x)$.

Teorema fundamental del cálculo, parte 2: El teorema de evaluación

El teorema fundamental del cálculo, parte 2, es quizás el teorema más importante del cálculo. Tras los incansables esfuerzos de los matemáticos durante aproximadamente 500 años, surgieron nuevas técnicas que proporcionaron a los científicos las herramientas necesarias para explicar muchos fenómenos. Gracias al cálculo, los astrónomos al fin pudieron determinar las distancias en el espacio y trazar las órbitas planetarias. Los problemas financieros cotidianos, como el cálculo de los costos marginales o la predicción de los beneficios totales, podían ahora tratarse con sencillez y precisión. Los ingenieros podían calcular la resistencia a la flexión de los materiales o el movimiento tridimensional de los objetos. Nuestra visión del mundo cambió para siempre con el cálculo.

Después de encontrar las áreas aproximadas sumando las áreas de rectángulos *n*, la aplicación de este teorema es sencilla por comparación. Casi parece demasiado sencillo que el área de toda una región curva pueda calcularse simplemente evaluando una antiderivada en el primer y último punto final de un intervalo.

Teorema 1.5

El teorema fundamental del cálculo, parte 2

Si *f* es continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \quad \textbf{(1.17)}$$

A menudo vemos la notación $F(x)|_a^b$ para denotar la expresión $F(b) - F(a)$. Utilizamos esta barra vertical y los límites *a* y *b* asociados para indicar que debemos evaluar la función $F(x)$ en el límite superior (en este caso, *b*), y restar el valor de la función $F(x)$ evaluado en el límite inferior (en este caso, *a*).

El **teorema fundamental del cálculo, parte 2** (también conocido como el **teorema de evaluación**) establece que si podemos encontrar una antiderivada para el integrando, entonces podemos evaluar la integral definida evaluando la antiderivada en los puntos extremos del intervalo y restando.

Prueba

Supongamos que $P = \{x_i\}, i = 0, 1, \ldots, n$ es una partición regular de $[a, b]$. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \ldots + [F(x_1) - F(x_0)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F\left(x_{i-1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que *F* es una antiderivada de *f* en $[a, b]$, así que mediante el teorema del valor medio (consulte el [teorema del valor medio (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/4-4-el-teorema-del-valor-medio)](http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/4-4-el-teorema-del-valor-medio)) para $i = 0, 1, \ldots, n$ podemos encontrar c_i en $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ tal que

$$F(x_i) - F\left(x_{i-1}\right) = F'(c_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) = f(c_i)\,\Delta x.$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x.$$

Tomando el límite de ambos lados cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1.20

Evaluación de una integral con el teorema fundamental del cálculo

Utilice el El teorema fundamental del cálculo, parte 2 para evaluar

$$\int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt.$$

Solución

Recordemos la regla de la potencia para las antiderivadas (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/4-10-antiderivadas):

$$\text{Si } y = x^n, \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Utilice esta regla para encontrar la antiderivada de la función y luego aplique el teorema. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt &= \frac{t^3}{3} - 4t\Big|_{-2}^{2} \\ &= \left[\frac{(2)^3}{3} - 4(2)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 4(-2)\right] \\ &= \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) \\ &= \frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 \\ &= \frac{16}{3} - 16 \\ &= -\frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Análisis

Observe que no incluimos el término "+ *C*" cuando escribimos la antiderivada. La razón es que, según el teorema fundamental del cálculo, parte 2, *cualquier* antiderivada funciona. Así que, por comodidad, elegimos la antiderivada con $C = 0$. Si hubiéramos elegido otra antiderivada, el término constante se habría anulado. Esto siempre ocurre al evaluar una integral definida.

La región del área que acabamos de calcular se representa en la Figura 1.28. Note que toda la región entre la curva y el eje *x* está por debajo del eje *x*. El área es siempre positiva, pero una integral definida puede producir un número negativo (un área neta con signo). Por ejemplo, si se tratara de una función de beneficios, un número negativo indica que la empresa está operando con pérdidas en el intervalo dado.

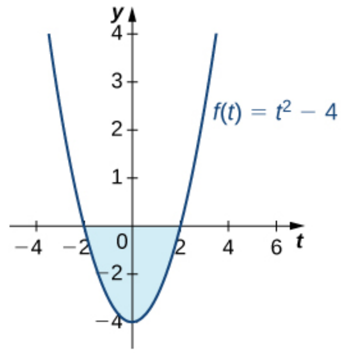


Figura 1.28 La evaluación de una integral definida puede producir un valor negativo aunque el área sea siempre positiva.

EJEMPLO 1.21

Evaluación de una integral definida mediante el teorema fundamental del cálculo, parte 2

Evalúe la siguiente integral utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx.$$

Solución

Primero elimine el radical reescribiendo la integral usando exponentes racionales. Luego, separe los términos del numerador escribiendo cada uno sobre el denominador:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{x^{1/2}} dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}} \right) dx.$$

Utilice las propiedades de los exponentes para simplificar:

$$\int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}} \right) dx = \int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2} \right) dx.$$

Ahora, integre usando la regla de la potencia:

$$\begin{aligned} \int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2} \right) dx &= \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|_1^9 \\ &= \left[\frac{(9)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(9)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right] - \left[\frac{(1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \left[\frac{2}{3}(27) - 2(3) \right] - \left[\frac{2}{3}(1) - 2(1) \right] \\ &= 18 - 6 - \frac{2}{3} + 2 \\ &= \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Vea el Figura 1.29.

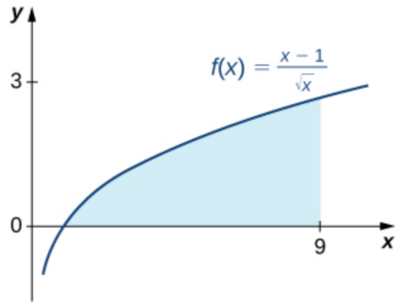


Figura 1.29 El área bajo la curva de $x = 1$ a $x = 9$ se puede calcular evaluando una integral definida.

1.19 Utilice El teorema fundamental del cálculo, parte 2 (teorema fundamental del cálculo) para evaluar $\int_1^2 x^{-4}\,dx.$

EJEMPLO 1.22

Una carrera de patinaje

James y Kathy están patinando. Lo hacen a lo largo de una pista larga y recta, y quien llegue más lejos después de 5 segundos gana un premio. Si James puede patinar a una velocidad de $f(t) = 5 + 2t$ ft/s y Kathy puede patinar a una velocidad de $g(t) = 10 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ ft/s, ¿quién va a ganar la carrera?

Solución

Tenemos que integrar ambas funciones en el intervalo $[0, 5]$ y ver qué valor es mayor. Con respecto a James, queremos calcular

$$\int_0^5 (5 + 2t)\,dt.$$

Utilizando la regla de la potencia, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^5 (5 + 2t)\,dt &= \left(5t + t^2\right)\Big|_0^5 \\ &= (25 + 25) = 50.\end{aligned}$$

Así, James patinó 50 ft en 5 segundos. Volviendo a Kathy, queremos calcular

$$\int_0^5 10 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt.$$

Sabemos que $\operatorname{sen} t$ es una antiderivada de $\cos t$, por lo que es razonable esperar que una antiderivada de $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ implicaría $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Sin embargo, cuando diferenciamos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, obtenemos $\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ como resultado de la regla de la cadena, por lo que tenemos que tener en cuenta este coeficiente adicional cuando integramos. Obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^5 10 + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)dt &= \left(10t + \tfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right)\Big|_0^5 \\ &= \left(50 + \tfrac{2}{\pi}\right) - \left(0 - \tfrac{2}{\pi}\operatorname{sen} 0\right) \\ &\approx 50{,}6.\end{aligned}$$

Kathy patinó aproximadamente 50,6 ft en 5 segundos. ¡Kathy gana, pero no por mucho!

1.20 Supongamos que James y Kathy tienen una revancha, pero esta vez el árbitro detiene la contienda a solo 3 segundos. ¿Cambia esto el resultado?

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Un paracaidista en caída libre



Figura 1.30 Los paracaidistas pueden ajustar la velocidad de su inmersión cambiando la posición de su cuerpo durante la caída libre (créditos: Jeremy T. Lock).

Julie es una paracaidista apasionada. Tiene más de 300 saltos en su haber y ha dominado el arte de cambiar la posición de su cuerpo en el aire para controlar la velocidad de caída. Si arquea la espalda y apunta su vientre hacia el suelo, alcanza una velocidad límite de aproximadamente 120 mph (176 ft/s). Si más bien orienta su cuerpo con la cabeza hacia abajo, cae más rápido, alcanzando una velocidad límite de 150 mph (220 ft/s).

Como Julie se moverá (caerá) en dirección descendente, asumimos que la dirección descendente es positiva para simplificar nuestros cálculos. Julie ejecuta sus saltos desde una altitud de 12.500 ft. Al saltar de la aeronave, inmediatamente comienza a caer a una velocidad dada por $v(t) = 32t$. Ella continúa acelerando según esta función de velocidad hasta que alcanza la velocidad límite. Cuando alcanza la velocidad límite, su velocidad se mantiene constante hasta que tira de la cuerda de seguridad y reduce la velocidad para aterrizar.

En su primer salto del día, Julie se orienta en la posición más lenta "panza abajo" (la velocidad límite es de 176 ft/s). Con esta información, responda las siguientes preguntas.

1. ¿Cuánto tiempo después de saltar del avión Julie alcanza la velocidad límite?
2. Con base en su respuesta a la pregunta 1, establezca una expresión que implique una o más integrales que representen la distancia a la que cae Julie después de 30 segundos.
3. Si Julie tira de su cuerda de seguridad a una altitud de 3.000 ft, ¿cuánto tiempo pasa en caída libre?
4. Julie tira de su cuerda de seguridad a 3.000 ft. El paracaídas tarda 5 segundos en abrirse por completo y en frenar, tiempo durante el cual cae otros 400 ft. Después de que su casquete está completamente abierto, su velocidad se reduce a 16 ft/s. Halle el tiempo total que Julie pasa en el aire, desde que sale del avión hasta que sus pies tocan el suelo.
   En el segundo salto del día, Julie decide que quiere caer un poco más rápido y se orienta en la posición "cabeza abajo". Su velocidad límite en esta posición es de 220 ft/s. Responda a estas preguntas con base en esta velocidad:
5. En este caso ¿cuánto tarda Julie en alcanzar la velocidad límite?

6. Antes de tirar de la cuerda de seguridad, Julie reorienta su cuerpo en la posición "panza abajo" para no moverse tan rápido cuando se abra el paracaídas. Si comienza esta maniobra a una altitud de 4.000 ft, ¿cuánto tiempo pasa en caída libre antes de comenzar la reorientación?
   Algunos saltadores llevan "trajes de alas" (vea la Figura 1.31). Estos trajes tienen paneles de tela entre los brazos y las piernas y permiten al usuario deslizarse en caída libre, como una ardilla voladora. (De hecho, los trajes se llaman a veces "trajes de ardilla voladora"). Cuando se llevan estos trajes, la velocidad límite puede reducirse a unos 30 mph (44 ft/s), lo que permite a los usuarios un tiempo mucho más largo en el aire. Los pilotos de wingsuit (traje de alas) siguen utilizando paracaídas para aterrizar; aunque las velocidades verticales están dentro del margen de seguridad, las horizontales pueden superar las 70 mph, demasiado rápido para aterrizar con seguridad.



Figura 1.31 Los paneles de tela de los brazos y las piernas de un wingsuit sirven para reducir la velocidad vertical de caída de un paracaidista (créditos: Richard Schneider).

Responda la siguiente pregunta con base en la velocidad con un wingsuit.

7. Si Julie se pone un wingsuit antes de su tercer salto del día y hala su cuerda de seguridad a una altitud de 3.000 ft, ¿cuánto tiempo puede pasar planeando en el aire?

SECCIÓN 1.3 EJERCICIOS

144. Considere la posibilidad de que dos atletas corran a velocidades variables $v_1(t)$ y $v_2(t)$. Los corredores comienzan y terminan una carrera exactamente a la misma hora. Explique por qué los dos corredores deben ir a la misma velocidad en algún momento.

145. Dos alpinistas comienzan su ascenso en el campamento base y toman dos rutas diferentes, una más empinada que la otra, y llegan a la cima exactamente al mismo tiempo. ¿Es necesariamente cierto que, en algún momento, ambos escaladores aumentaron su altitud al mismo ritmo?

146. Para entrar en una determinada autopista de peaje, un conductor debe llevar una tarjeta en la que figura el punto de entrada de la milla. La tarjeta también tiene una marca de tiempo. Al dirigirse a la salida y pagar el peaje, el conductor se sorprende al recibir una multa por exceso de velocidad junto con el peaje. Explique cómo pudo ocurrir eso.

147. Establezca $F(x) = \int_1^x (1-t)\,dt.$ Calcule $F'(2)$ y el valor promedio de F' en $[1, 2]$.

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema fundamental del cálculo, parte 1, para encontrar cada derivada.

148. $\frac{d}{dx}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

149. $\frac{d}{dx}\int_1^x e^{\cos t}\,dt$

150. $\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{9-y^2}\,dy$

151. $\frac{d}{dx}\int_4^x \frac{ds}{\sqrt{16-s^2}}$

152. $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} t\,dt$

153. $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} t\,dt$

154. $\frac{d}{dx}\int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

155. $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$

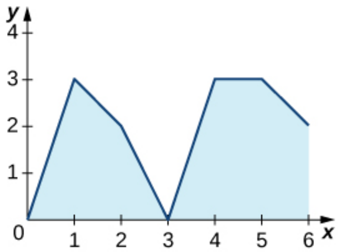
156. $\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$

157. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$

158. $\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} e^t\,dt$

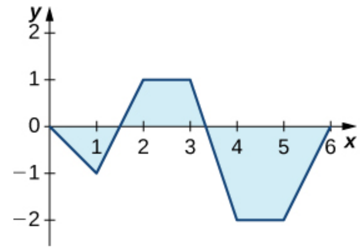
159. $\frac{d}{dx}\int_1^{e^x} \ln u^2\,du$

160. El gráfico de $y = \int_0^x f(t)dt$, donde f es una función constante a trozos, se muestra aquí.



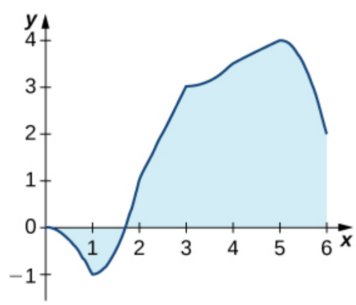
a. ¿En qué intervalos f es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En qué intervalos, si los hay, es igual a cero?
b. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de f?
c. ¿Cuál es el valor promedio de f?

161. El gráfico de $y = \int_0^x f(t)dt$, donde f es una función constante por partes, se muestra aquí.



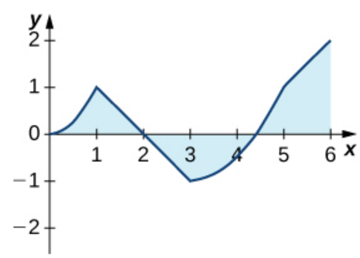
a. ¿En qué intervalos f es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En qué intervalos, si los hay, es igual a cero?
b. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de f?
c. ¿Cuál es el valor promedio de f?

162. El gráfico de $y = \int_0^x \ell(t)dt$, donde ℓ es una función lineal a trozos, se muestra aquí.



a. ¿En qué intervalos ℓ es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En cuáles, si hay alguno, es cero?
b. ¿En qué intervalos es ℓ creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? ¿En qué intervalo es constante, si es que lo es?
c. ¿Cuál es el valor promedio de ℓ?

163. El gráfico de $y = \int_0^x \ell(t)dt$, donde ℓ es una función lineal por partes, se muestra aquí.



a. ¿En qué intervalos ℓ es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En cuáles, si hay alguno, es cero?
b. ¿En qué intervalos es ℓ creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? ¿En qué intervalos, si los hay, es constante?
c. ¿Cuál es el valor promedio de ℓ?

En los siguientes ejercicios utilice una calculadora para estimar el área debajo de la curva calculando T_{10}, el promedio de las sumas de Riemann de los extremos izquierdo y derecho utilizando rectángulos $N = 10$. Luego, utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2, determine el área exacta.

164. **[T]** $y = x^2$ en $[0, 4]$

165. **[T]** $y = x^3 + 6x^2 + x - 5$ en $[-4, 2]$

166. **[T]** $y = \sqrt{x^3}$ en $[0, 6]$

167. **[T]** $y = \sqrt{x} + x^2$ en $[1, 9]$

168. **[T]** $\int (\cos x - \operatorname{sen} x)dx$ en $[0, \pi]$

169. **[T]** $\int \frac{4}{x^2}dx$ en $[1, 4]$

En los siguientes ejercicios, evalúe cada integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2.

170. $\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x\right) dx$

171. $\int_{-2}^{3} \left(x^2 + 3x - 5\right) dx$

172. $\int_{-2}^{3} (t + 2)(t - 3)\, dt$

173. $\int_{2}^{3} \left(t^2 - 9\right)\left(4 - t^2\right) dt$

174. $\int_{1}^{2} x^9\, dx$

175. $\int_{0}^{1} x^{99}\, dx$

176. $\int_{4}^{8} \left(4t^{5/2} - 3t^{3/2}\right) dt$

177. $\int_{1/4}^{4} \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

178. $\int_{1}^{2} \frac{2}{x^3}\, dx$

179. $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

180. $\int_{1}^{4} \frac{2 - \sqrt{t}}{t^2}\, dt$

181. $\int_{1}^{16} \frac{dt}{t^{1/4}}$

182. $\int_{0}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta$

183. $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

184. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2\theta\, d\theta$

185. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

186. $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \csc\theta \cot\theta\, d\theta$

187. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2\theta\, d\theta$

188. $\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt$

189. $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt$

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema de evaluación para expresar la integral como una función $F(x)$.

190. $\int_{a}^{x} t^2\, dt$

191. $\int_{1}^{x} e^t\, dt$

192. $\int_{0}^{x} \cos t\, dt$

193. $\int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t\, dt$

En los siguientes ejercicios, identifique las raíces del integrando para eliminar los valores absolutos, y luego evalúe utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2.

194. $\int_{-2}^{3} |x|\, dx$

195. $\int_{-2}^{4} \left|t^2 - 2t - 3\right| dt$

196. $\int_{0}^{\pi} |\cos t|\, dt$

197. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} t|\, dt$

198. Supongamos que el número de horas de luz en un día determinado en Seattle se modela mediante la función $-3{,}75\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 12{,}25,$ con *t* expresado en meses y $t = 0$ correspondiente al solsticio de invierno.

a. ¿Cuál es el número medio de horas de luz al año?
b. En qué momentos t_1 y t_2, donde $0 \le t_1 < t_2 < 12,$ ¿el número de horas de luz es igual al número promedio?
c. Escriba una integral que exprese el número total de horas de luz en Seattle entre t_1 y t_2.
d. Calcule la media de horas de luz en Seattle entre t_1 y t_2, donde $0 \le t_1 < t_2 < 12,$ y luego entre t_2 y t_1, y demuestre que el promedio de las dos es igual a la duración promedio del día.

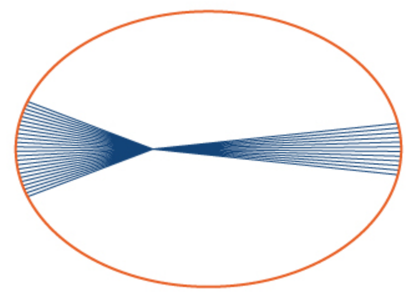
199. Supongamos que la tasa de consumo de gasolina a lo largo de un año en Estados Unidos puede modelarse mediante una función sinusoidal de la forma $\left(11{,}21 - \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) \times 10^9$ gal/mo.

a. ¿Cuál es el consumo promedio mensual y para qué valores de *t* la tasa en el momento *t* es igual a la tasa promedio?
b. ¿Cuál es el número de galones de gasolina que se consumen en Estados Unidos en un año?
c. Escriba una integral que exprese el consumo medio mensual de gasolina en Estados Unidos en la parte del año comprendida entre el comienzo de abril $(t = 3)$ y el final de septiembre $(t = 9)$.

200. Explique por qué, si *f* es continua sobre $[a, b]$, hay al menos un punto $c \in [a, b]$ de manera que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$

201. Explique por qué, si *f* es continua sobre $[a, b]$ y no es igual a una constante, hay al menos un punto $M \in [a, b]$ de manera que $f(M) > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$ y al menos un punto $m \in [a, b]$ de manera que $f(m) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$

202. La primera ley de Kepler establece que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto más cercano de una órbita planetaria al Sol se llama *perihelio* (en el caso de la Tierra, se produce actualmente alrededor del 3 de enero) y el punto más alejado se denomina *afelio* (en el caso de la Tierra, se produce actualmente alrededor del 4 de julio). La segunda ley de Kepler establece que los planetas barren áreas iguales de sus órbitas elípticas en tiempos iguales. Así, los dos arcos indicados en la siguiente figura se barren en tiempos iguales. ¿En qué momento del año la Tierra se mueve más rápido en su órbita? ¿Cuándo se mueve más lentamente?



203. Un punto de una elipse con eje mayor de longitud 2*a* y eje menor de longitud 2*b* tiene las coordenadas $(a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

a. Demuestre que la distancia de este punto al foco en $(-c, 0)$ ¿es $d(\theta) = a + c\cos\theta$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
b. Utilice estas coordenadas para demostrar que la distancia promedio $\overline{d}$ desde un punto de la elipse hasta el foco en $(-c, 0)$, con respecto al ángulo *θ*, es *a*.

204. Como se dijo antes, según las leyes de Kepler, la órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. El perihelio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es de 147.098.290 km y el afelio es de 152.098.232 km.

a. Colocando el eje mayor a lo largo del eje *x*, halle la distancia promedio de la Tierra al Sol.
b. La definición clásica de unidad astronómica (UA) es la distancia de la Tierra al Sol, y su valor se calculó como el promedio de las distancias del perihelio y del afelio. ¿Está justificada esta definición?

205. La fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y un planeta es $F(\theta) = \frac{GmM}{r^2(\theta)}$, donde *m* es la masa del planeta, *M* es la masa del Sol, *G* es una constante universal y $r(\theta)$ es la distancia entre el Sol y el planeta cuando éste se halla en un ángulo *θ* con el eje mayor de su órbita. Suponiendo que *M*, *m* y los parámetros de la elipse *a* y *b* (semilongitudes de los ejes mayor y menor) están dados, establezca —pero no evalúe— una integral que exprese en términos de G, m, M, a, b la fuerza gravitatoria promedio entre el Sol y el planeta.

206. El desplazamiento desde el reposo de una masa unida a un resorte satisface la ecuación de movimiento armónico simple $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, donde ϕ es una constante de fase, ω es la frecuencia angular y A es la amplitud. Halle la velocidad media, la rapidez media (magnitud de la velocidad), el desplazamiento medio y la distancia media desde el reposo (magnitud del desplazamiento) de la masa.

1.4 Fórmulas de integración y el teorema del cambio neto

Objetivos de aprendizaje

1.4.1 Aplicar las fórmulas básicas de integración.
1.4.2 Explicar el significado del teorema del cambio neto.
1.4.3 Utilizar el teorema del cambio neto para resolver problemas aplicados.
1.4.4 Aplicar las integrales de funciones pares e impares.

En esta sección, utilizaremos algunas fórmulas básicas de integración estudiadas anteriormente para resolver algunos problemas clave aplicados. Es importante señalar que estas fórmulas se presentan en términos de integrales *indefinidas*. Aunque las integrales definidas e indefinidas están estrechamente relacionadas, hay algunas diferencias clave que hay que tener en cuenta. Una integral definida es un número (cuando los límites de integración son constantes) o una función única (cuando uno o ambos límites de integración son variables). Una integral indefinida representa una familia de funciones, todas las cuales difieren en una constante. A medida que se vaya familiarizando con la integración, sabrá cuándo utilizar las integrales definidas o las indefinidas. Sin pensar demasiado en ello, seleccionará naturalmente el enfoque correcto para un determinado problema Sin embargo, mientras internaliza estos conceptos, piense cuidadosamente si necesita una integral definida o una indefinida y asegúrese de utilizar la notación adecuada según su elección.

Fórmulas básicas de integración

Recordemos las fórmulas de integración dadas en la tabla de antiderivadas (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/4-10-antiderivadas) y la regla sobre las propiedades de las integrales definidas. Veamos algunos ejemplos de cómo se aplican estas reglas.

EJEMPLO 1.23

Integración de una función mediante la regla de la potencia

Utilice la regla de la potencia para integrar la función $\int_1^4 \sqrt{t}\,(1+t)\,dt$.

Solución

El primer paso es reescribir la función y simplificarla para aplicar la regla de la potencia:

$$\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)dt = \int_1^4 t^{1/2}(1+t)dt$$

$$= \int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right) dt.$$

Ahora aplique la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right) dt &= \left(\tfrac{2}{3}t^{3/2}+\tfrac{2}{5}t^{5/2}\right)\Big|_1^4 \\ &= \left[\tfrac{2}{3}(4)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(4)^{5/2}\right]-\left[\tfrac{2}{3}(1)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(1)^{5/2}\right] \\ &= \tfrac{256}{15}.\end{aligned}$$

1.21 Calcule la integral definida de $f(x) = x^2 - 3x$ en el intervalo $[1, 3]$.

El teorema del cambio neto

El **teorema del cambio neto** considera la integral de un *tasa de cambio*. Dice que cuando una cantidad cambia, el nuevo valor es igual al valor inicial más la integral de la tasa de cambio de esa cantidad. La fórmula puede expresarse de dos maneras. La segunda nos es familiar; se trata simplemente de la integral definida.

Teorema 1.6

Teorema del cambio neto

El nuevo valor de una cantidad cambiante es igual al valor inicial más la integral de la tasa de cambio:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\,dx \tag{1.18}$$

o

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Restando $F(a)$ de ambos lados de la primera ecuación da como resultado la segunda ecuación. Puesto que son fórmulas equivalentes, la que utilicemos dependerá de la aplicación.

La importancia del teorema del cambio neto radica en los resultados. El cambio neto puede aplicarse al área, la distancia y el volumen, por nombrar solo algunas aplicaciones. El cambio neto contabiliza automáticamente las cantidades negativas sin tener que escribir más de una integral. Para ilustrarlo, aplicaremos el teorema del cambio neto a una función de velocidad en la que el resultado es el desplazamiento.

Vimos un ejemplo sencillo de esto en La integral definida. Supongamos que un auto va hacia el norte (la dirección positiva) a 40 mph entre las 2 p. m. y las 4 p. m., luego se dirige al sur a 30 mph entre las 4 p. m. y las 5 p. m. Podemos graficar este movimiento como se muestra en la Figura 1.32.

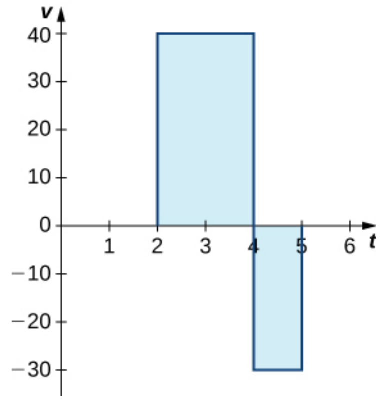


Figura 1.32 El gráfico muestra la velocidad en función del tiempo para el movimiento dado de un automóvil.

Al igual que antes, podemos utilizar integrales definidas para calcular el desplazamiento neto y la distancia total recorrida. El desplazamiento neto viene dado por

$$\begin{aligned}\int_2^5 v(t)dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 -30dt \\ &= 80 - 30 \\ &= 50.\end{aligned}$$

Así, a las 5 p. m., el auto está a 50 millas al norte de su posición de partida. La distancia total recorrida viene dada por

$$\begin{aligned}\int_2^5 |v(t)|\, dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 30dt \\ &= 80 + 30 \\ &= 110.\end{aligned}$$

Por lo tanto, entre las 2 p. m. y las 5 p. m., el auto recorrió un total de 110 millas.

En resumen, el desplazamiento neto puede incluir tanto valores positivos como negativos. En otras palabras, la función de velocidad toma en cuenta tanto la distancia hacia delante como hacia atrás. Para encontrar el desplazamiento neto, integre la función de velocidad en el intervalo. En cambio, la distancia total recorrida es siempre positiva. Para encontrar la distancia total recorrida por un objeto, independientemente de la dirección, tenemos que integrar el valor absoluto de la función de velocidad.

EJEMPLO 1.24

Hallar el desplazamiento neto

Dada una función de velocidad $v(t) = 3t - 5$ (en metros por segundo) para una partícula en movimiento desde el tiempo $t = 0$ hasta el tiempo $t = 3$, halle el desplazamiento neto de la partícula.

Solución

Si aplicamos el teorema del cambio neto, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^3 (3t-5)\, dt &= \left.\frac{3t^2}{2} - 5t\right|_0^3 \\ &= \left[\frac{3(3)^2}{2} - 5(3)\right] - 0 \\ &= \frac{27}{2} - 15 \\ &= \frac{27}{2} - \frac{30}{2} \\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

El desplazamiento neto es $-\frac{3}{2}$ m (Figura 1.33).

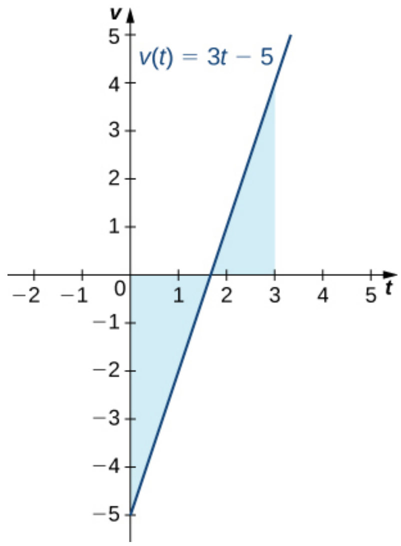


Figura 1.33 El gráfico muestra la velocidad en función del tiempo de una partícula que se mueve con una función de velocidad lineal.

EJEMPLO 1.25

Hallar la distancia total recorrida

Utilice el Ejemplo 1.24 para encontrar la distancia total recorrida por una partícula según la función de velocidad $v(t) = 3t - 5$ m/s en un intervalo de tiempo $[0, 3]$.

Solución

La distancia total recorrida incluye tanto los valores positivos como los negativos. Por eso debemos integrar el valor absoluto de la función de velocidad para encontrar la distancia total recorrida.

Para continuar con el ejemplo, utilice dos integrales para encontrar la distancia total. En primer lugar, halle la intersección *t*de la función, ya que allí se produce la división del intervalo. Establezca la ecuación igual a cero y resuelva para *t*. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 3t - 5 &= 0 \\ 3t &= 5 \\ t &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Los dos subintervalos son $\left[0, \frac{5}{3}\right]$ y $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$. Para encontrar la distancia total recorrida, integre el valor absoluto de la función. Como la función es negativa en el intervalo $\left[0, \frac{5}{3}\right]$, tenemos $|v(t)| = -v(t)$ en ese intervalo. En $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$, la función es positiva, por lo que $|v(t)| = v(t)$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^3 |v(t)|\,dt &= \int_0^{5/3} -v(t)dt + \int_{5/3}^3 v(t)dt \\ &= \int_0^{5/3} 5-3t dt + \int_{5/3}^3 3t-5dt \\ &= \left(5t-\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^{5/3} + \left(\frac{3t^2}{2}-5t\right)\Big|_{5/3}^3 \\ &= \left[5\left(\frac{5}{3}\right)-\frac{3(5/3)^2}{2}\right] - 0 + \left[\frac{27}{2}-15\right] - \left[\frac{3(5/3)^2}{2}-\frac{25}{3}\right] \\ &= \frac{25}{3}-\frac{25}{6}+\frac{27}{2}-15-\frac{25}{6}+\frac{25}{3} \\ &= \frac{41}{6}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es $\frac{41}{6}$ m.

1.22 Halle el desplazamiento neto y la distancia total recorrida en metros dada la función de velocidad $f(t) = \frac{1}{2}e^t - 2$ en el intervalo $[0, 2]$.

Aplicación del teorema del cambio neto

El teorema del cambio neto puede aplicarse al flujo y al consumo de fluidos, como se muestra en el Ejemplo 1.26.

EJEMPLO 1.26

¿Cuántos galones de gasolina se consumen?

Si el motor de una lancha se pone en marcha en $t = 0$ y la lancha consume gasolina a una tasa de $5–t^3$ gal/h, ¿qué cantidad de gasolina se consume en las primeras 2 horas?

Solución

Exprese el problema como una integral definida, integre y evalúe utilizando el teorema fundamental del cálculo. Los límites de la integración son los puntos extremos del intervalo $[0, 2]$. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(5–t^3\right)dt &= \left(5t–\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^2 \\ &= \left[5\left(2\right)–\frac{(2)^4}{4}\right]–0 \\ &= 10–\frac{16}{4} \\ &= 6\end{aligned}$$

Por lo tanto, la lancha consume 6 galones de gasolina en 2 horas.

EJEMPLO 1.27

Inicio del capítulo: Botes deslizadores sobre hielo



Figura 1.34 (créditos: modificación del trabajo de Carter Brown, Flickr).

Como vimos al principio del capítulo, los mejores corredores de botes de hielo (Figura 1.1) pueden alcanzar velocidades de hasta cinco veces la velocidad del viento. Sin embargo, Andrew es un navegador de nivel intermedio, por lo que alcanza velocidades equivalentes a solo el doble de la velocidad del viento. Supongamos que Andrew saca su bote una mañana en la que ha soplado una ligera brisa de 5 mph durante toda la mañana. Sin embargo, mientras prepara su bote de hielo, el viento empieza a arreciar. Durante su primera media hora de navegación sobre hielo, la velocidad del viento aumenta según la función $v(t) = 20t + 5$. En la segunda media hora de la salida de Andrew, el viento se mantiene estable en 15 mph. En otras palabras, la velocidad del viento viene dada por

$$v(t) = \begin{cases} 20t + 5 & \text{para} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 15 & \text{para} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Si recordamos que el bote de Andrew viaja al doble de la velocidad del viento, y suponemos que se mueve en línea recta desde su punto de partida, ¿a qué distancia de su punto de partida se encuentra después de 1 hora?

Solución

Para saber qué distancia ha recorrido Andrew, tenemos que integrar su velocidad, que es el doble de la velocidad del viento. Entonces

$$\text{Distancia} = \int_0^1 2v(t)\,dt.$$

Sustituyendo las expresiones proporcionadas para $v(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 2v(t)\,dt &= \int_0^{1/2} 2v(t)\,dt + \int_{1/2}^1 2v(t)\,dt \\ &= \int_0^{1/2} 2(20t+5)\,dt + \int_{1/3}^1 2(15)\,dt \\ &= \int_0^{1/2} (40t+10)\,dt + \int_{1/2}^1 30dt \\ &= \left[20t^2 + 10t\right]\Big|_0^{1/2} + [30t]\Big|_{1/2}^1 \\ &= \left(\frac{20}{4} + 5\right) - 0 + (30 - 15) \\ &= 25. \end{aligned}$$

Pasada 1 hora, Andrew está a 25 millas de su punto de partida.

1.23 Supongamos que, en vez de permanecer estable durante la segunda media hora de la salida de Andrés, el viento empieza a amainar según la función $v(t) = -10t + 15$. En otras palabras, la velocidad del viento viene dada por

$$v(t) = \begin{cases} 20t + 5 & \text{para} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -10t + 15 & \text{para} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

En estas condiciones, ¿a qué distancia de su punto de partida se encuentra Andrés después de 1 hora?

Integración de funciones pares e impares

En Funciones y gráficos (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/1-introduccion) vimos que una función par es aquella en la que $f(-x) = f(x)$ para toda *x* en el dominio, es decir, el gráfico de la curva no cambia cuando se sustituye *x* por −*x*. Los gráficos de las funciones pares son simétricas con respecto al eje *y*. Una función impar es aquella en la que $f(-x) = -f(x)$ para toda *x* en el dominio, y el gráfico de la función es simétrico respecto al origen.

Las integrales de las funciones pares, cuando los límites de la integración son de −*a* a *a*, implican dos áreas iguales, porque son simétricas respecto al eje *y*. Las integrales de funciones impares, cuando los límites de integración son similares $[-a, a]$, se evalúa a cero porque las áreas por encima y por debajo del eje *x* son iguales.

Regla: integrales de funciones pares e impares

Para funciones continuas pares tales que $f(-x) = f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Para funciones continuas impares tales que $f(-x) = -f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

EJEMPLO 1.28

Integrar una función par

Integre la función par $\int_{-2}^{2} \left(3x^8 - 2\right) dx$ y verifique que la fórmula de integración para funciones pares se cumpla.

Solución

La simetría aparece en los gráficos en la Figura 1.35. El gráfico (a) muestra la región por debajo de la curva y por encima del eje *x*. Hay que ampliar mucho este gráfico para ver la región. El gráfico (b) muestra la región por encima de la curva y por debajo del eje *x*. El área con signo de esta región es negativa. Ambas vistas ilustran la simetría en torno al eje *y* de una función par. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(3x^8 - 2\right) dx &= \left(\frac{x^9}{3} - 2x\right)\Big|_{-2}^{2} \\ &= \left[\frac{(2)^9}{3} - 2(2)\right] - \left[\frac{(-2)^9}{3} - 2(-2)\right] \\ &= \left(\frac{512}{3} - 4\right) - \left(-\frac{512}{3} + 4\right) \\ &= \frac{1.000}{3}. \end{aligned}$$

Para verificar la fórmula de integración de las funciones pares, podemos calcular la integral de 0 a 2 y duplicarla, y luego comprobar que obtenemos la misma respuesta.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(3x^8 - 2\right) dx &= \left(\frac{x^9}{3} - 2x\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{512}{3} - 4 \\ &= \frac{500}{3}\end{aligned}$$

Dado que $2 \cdot \frac{500}{3} = \frac{1.000}{3}$, hemos comprobado la fórmula de las funciones pares en este ejemplo concreto.

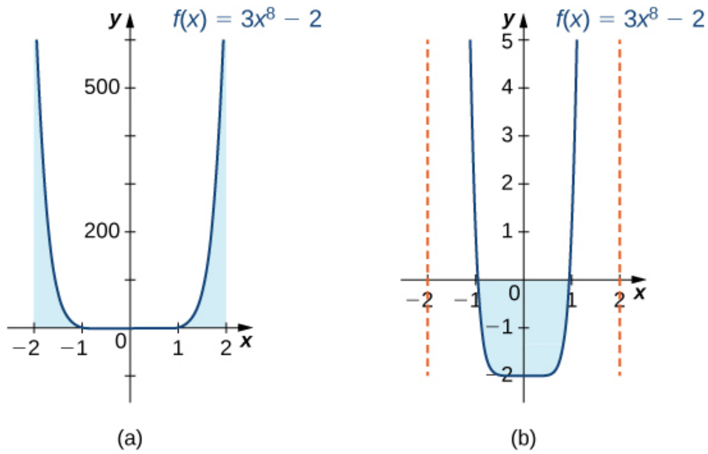


Figura 1.35 El gráfico (a) muestra el área positiva entre la curva y el eje *x*, mientras que el gráfico (b) muestra el área negativa entre la curva y el eje *x*. Ambas vistas muestran la simetría en torno al eje *y*.

EJEMPLO 1.29

Integrar una función impar

Evalúe la integral definida de la función impar $-5 \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución

El gráfico se muestra en la Figura 1.36. Podemos ver la simetría respecto al origen por el área positiva sobre el eje *x* en $[-\pi, 0]$, y el área negativa por debajo del eje *x* en $[0, \pi]$. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} -5 \operatorname{sen} x dx &= -5(-\cos x)|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 5 \cos x|_{-\pi}^{\pi} \\ &= [5 \cos \pi] - [5 \cos(-\pi)] \\ &= -5 - (-5) \\ &= 0.\end{aligned}$$

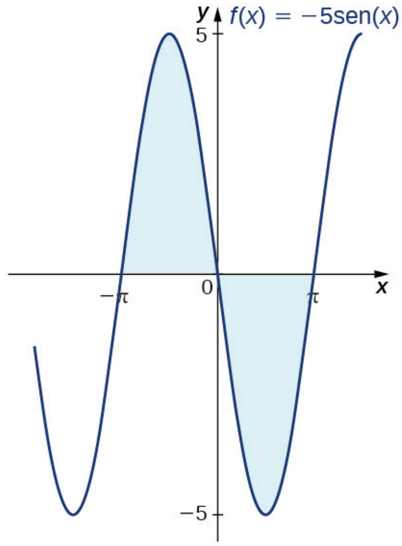


Figura 1.36 El gráfico muestra las áreas entre una curva y el eje x para una función impar.

1.24 Integre la función $\int_{-2}^{2} x^4 \, dx$.

SECCIÓN 1.4 EJERCICIOS

Utilice las fórmulas básicas de integración para calcular las siguientes antiderivadas o integrales definidas.

207. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

208. $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2} e^{x/2} \right) dx$

209. $\int \frac{dx}{2x}$

210. $\int \frac{x-1}{x^2} dx$

211. $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x) \, dx$

212. $\int_0^{\pi/2} (x - \operatorname{sen} x) \, dx$

213. Escriba una integral que exprese el aumento del perímetro $P(s)$ de un cuadrado cuando su longitud de lado s aumenta de 2 unidades a 4 unidades y evalúe la integral.

214. Escriba una integral que cuantifique el cambio en el área $A(s) = s^2$ de un cuadrado cuando la longitud de sus lados se duplica de S unidades a $2S$ unidades y evalúe la integral.

215. Un *N-gono* regular (un polígono de *N* lados que tienen igual longitud *s*, como un pentágono o un hexágono) tiene un perímetro *Ns*. Escriba una integral que exprese el aumento del perímetro de un *N*–gono regular cuando la longitud de cada lado aumenta de 1 unidad a 2 unidades y evalúe la integral.

216. El área de un pentágono regular de lado $a > 0$ es pa^2 con $p = \frac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}.$ El Pentágono en Washington, DC, tiene lados interiores de 360 ft y lados exteriores de 920 ft de longitud. Escriba una integral para expresar el área del techo del Pentágono según estas dimensiones y evalúe esa área.

217. Un dodecaedro es un sólido platónico cuya superficie está formada por 12 pentágonos de igual superficie. ¿En cuánto aumenta el área superficial de un dodecaedro cuando la longitud de los lados de cada pentágono se duplica de 1 a 2 unidades?

218. Un icosaedro es un sólido platónico cuya superficie está formada por 20 triángulos equiláteros. ¿En cuánto aumenta el área superficial de un icosaedro cuando la longitud de los lados de cada triángulo se duplica de la unidad *a* a 2*a* unidades?

219. Escriba una integral que cuantifique el cambio en el área de la superficie de un cubo cuando su longitud lateral se duplica de la unidad *s* a 2*s* unidades y evalúe la integral.

220. Escriba una integral que cuantifique el aumento del volumen de un cubo cuando la longitud del lado se duplica de la unidad *s* a unidades 2*s* y evalúe la integral.

221. Escriba una integral que cuantifique el aumento del área superficial de una esfera cuando su radio se duplica de la unidad *R* a unidades 2*R* y evalúe la integral.

222. Escriba una integral que cuantifique el aumento del volumen de una esfera cuando su radio se duplica de la unidad *R* a unidades 2*R* y evalúe la integral.

223. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad $v(t) = 4–2t$, donde $0 \le t \le 2$ (en metros por segundo). Calcule el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 2.$

224. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad definida por $v(t) = t^2 - 3t - 18,$ donde $0 \le t \le 6$ (en metros por segundo). Calcule el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 6.$

225. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad definida por $v(t) = |2t - 6|$, donde $0 \le t \le 6$ (en metros por segundo). Calcule el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 6.$

226. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración definida por $a(t) = t - 3,$ donde $0 \le t \le 6$ (en metros por segundo). Halle la velocidad y el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 6$ si $v(0) = 3$ y $d(0) = 0.$

227. Se lanza un balón hacia arriba desde una altura de 1,5 m con una rapidez inicial de 40 m/s. La aceleración resultante de la gravedad es de −9,8 m/s^2. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, resuelva la velocidad $v(t)$ y la altura $h(t)$ del balón *t* segundos después de ser lanzado y antes de que vuelva al suelo.

228. Se lanza un balón hacia arriba desde una altura de 3 m con una rapidez inicial de 60 m/s. La aceleración resultante de la gravedad es de -9,8 m/seg^2. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, resuelva la velocidad $v(t)$ y la altura $h(t)$ del balón t segundos después de ser lanzado y antes de que vuelva al suelo.

229. La zona $A(t)$ de forma circular crece a un ritmo constante. Si el área aumenta de 4π unidades a 9π unidades entre tiempos $t = 2$ y $t = 3$, calcule el cambio neto en el radio durante ese tiempo.

230. Un globo esférico se infla a un ritmo constante. Si el volumen del globo cambia de 36π in^3 a 288π in^3 entre el tiempo $t = 30$ y $t = 60$ segundos, halle el cambio neto en el radio del globo durante ese tiempo.

231. El agua fluye en un tanque cónico con un área transversal πx^2 a una altura *x* y un volumen $\frac{\pi x^3}{3}$ hasta la altura *x*. Si el agua entra en el depósito a una velocidad de 1m^3/min, halle la altura del agua en el depósito después de 5 min. Halle el cambio de altura entre 5 min y 10 min.

232. Un depósito cilíndrico horizontal tiene una sección transversal $A(x) = 4\left(6x - x^2\right) m^2$ a una altura de *x* metros sobre el fondo cuando $x \leq 3$.

a. El volumen *V* entre las alturas *a* y *b* es $\int_a^b A(x)\,dx$. Halle el volumen en las alturas comprendidas entre 2 m y 3 m.
b. Supongamos que se está bombeando aceite al tanque a una velocidad de 50 L/min. Utilizando la regla de la cadena, $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dV}\frac{dV}{dt}$, ¿a cuántos metros por minuto cambia la altura del aceite en el depósito, expresada en términos de *x*, cuando la altura está a *x* metros?
c. ¿Cuánto tiempo se tarda en llenar el depósito hasta 3 m partiendo de un nivel de llenado de 2 m?

233. La siguiente tabla muestra la potencia eléctrica en gigavatios (la tasa de consumo de energía) que se utiliza en una ciudad en diferentes horas del día, en un periodo típico de 24 horas, donde la hora 1 va desde la medianoche hasta la 1 a. m.

Hora	Potencia	Hora	Potencia
1	28	13	48
2	25	14	49
3	24	15	49
4	23	16	50
5	24	17	50
6	27	18	50
7	29	19	46
8	32	20	43
9	34	21	42
10	39	22	40
11	42	23	37
12	46	24	34

Halle la cantidad total de energía en gigavatios-hora (gW-h) que la ciudad consume en un periodo típico de 24 horas.

234. El uso promedio de energía eléctrica residencial (en cientos de vatios) por hora se indica en la siguiente tabla.

Hora	Potencia	Hora	Potencia
1	8	13	12
2	6	14	13
3	5	15	14
4	4	16	15
5	5	17	17
6	6	18	19
7	7	19	18
8	8	20	17
9	9	21	16
10	10	22	16
11	10	23	13
12	11	24	11

a. Calcule la energía total promedio utilizada en un día en kilovatios-hora (kWh).
b. Si una tonelada de carbón genera 1842 kWh, ¿cuánto tiempo tarda una residencia común en quemar una tonelada de carbón?
c. Explique por qué los datos pueden encajar en un gráfico de la forma $p(t) = 11{,}5 - 7{,}5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

235. Los datos de la siguiente tabla se utilizan para estimar la potencia media producida por Peter Sagan en cada uno de los últimos 18 segundos de la Etapa 1 del Tour de Francia de 2012.

Segundo	Vatios	Segundo	Vatios
1	600	10	1200
2	500	11	1170
3	575	12	1125
4	1050	13	1.100
5	925	14	1075
6	950	15	1.000
7	1050	16	950
8	950	17	900
9	1.100	18	780

Tabla 1.6 Potencia promedio de salida
Fuente: sportsexercisengineering.com

Calcule la energía neta utilizada en kilojulios (kJ), teniendo en cuenta que 1W = 1 J/s, y la potencia media producida por Sagan durante este intervalo de tiempo.

236. Los datos de la siguiente tabla se utilizan para estimar la potencia media producida por Peter Sagan en cada intervalo de 15 minutos de la Etapa 1 del Tour de Francia de 2012.

Minutos	Vatios	Minutos	Vatios
15	200	165	170
30	180	180	220
45	190	195	140
60	230	210	225
75	240	225	170
90	210	240	210
105	210	255	200
120	220	270	220
135	210	285	250
150	150	300	400

Tabla 1.7 Potencia promedio de salida
Fuente: sportsexercisengineering.com

Calcule la energía neta utilizada en kilojulios, teniendo en cuenta que 1W = 1 J/s.

237. En la siguiente tabla se muestran los ingresos en Estados Unidos a partir de 2012 en incrementos de 5.000 dólares. La fila k–ésima indica el porcentaje de hogares con ingresos entre $\$5.000xk$ y $5.000xk + 4.999$. La fila $k = 40$ contiene todos los hogares con ingresos entre 200.000 y 250.000 dólares.

0	3,5	21	1,5
1	4,1	22	1,4
2	5,9	23	1.3
3	5,7	24	1.3
4	5,9	25	1,1
5	5,4	26	1,0
6	5,5	27	0,75
7	5,1	28	0,8
8	4,8	29	1,0
9	4,1	30	0,6
10	4,3	31	0,6
11	3,5	32	0,5
12	3,7	33	0,5
13	3,2	34	0,4
14	3,0	35	0,3
15	2,8	36	0,3
16	2,5	37	0,3
17	2,2	38	0,2
18	2,2	39	1,8
19	1,8	40	2,3
20	2,1		

Tabla 1.8 Distribución de los ingresos
Fuente: http://www.census.gov/prod/2013pubs/p60-245.pdf

a. Estime el porcentaje de hogares estadounidenses en 2012 con ingresos inferiores a 55.000 dólares.
b. ¿Qué porcentaje de hogares tiene ingresos superiores a 85.000 dólares?
c. Grafique los datos e intente ajustar su forma a la de un gráfico de la forma $a\,(x + c)\,e^{-b(x+e)}$ para que corresponda a a, b, c.

238. La ley de la gravedad de Newton establece que la fuerza gravitatoria ejercida por un objeto de masa *M* y otro de masa *m* con centros separados por una distancia *r* es $F = G\frac{mM}{r^2}$, con *G* como constante empírica $G = 6{,}67x10^{-11}\ m^3/\left(kg.\,s^2\right)$. El trabajo realizado por una fuerza variable en un intervalo $[a, b]$ se define como $W = \int_a^b F(x)\,dx$. Si la Tierra tiene masa de $5{,}97219\ \times\ 10^{24}$ y radio de 6371 km, calcule la cantidad de trabajo para elevar un satélite meteorológico polar de masa 1.400 kg hasta su altitud de órbita de 850 km sobre la Tierra.

239. En un vehículo de cierto tipo de motor, la desaceleración máxima alcanzable por el frenado es de aproximadamente 7 m/s^2 en hormigón seco. En el asfalto húmedo, es de aproximadamente 2,5 m/s^2. Dado que 1 mph corresponde a 0,447 m/s, halle la distancia total que recorre un auto en metros sobre hormigón seco después de aplicar los frenos hasta que se detiene por completo si la velocidad inicial es de 67 mph (30 m/s) o si la velocidad inicial de frenado es de 56 mph (25 m/s). Halle las distancias correspondientes si la superficie es asfalto húmedo y resbaladizo.

240. John tiene 25 años y pesa 160 lb. Quema $500 - 50t$ calorías/h mientras monta en bicicleta durante *t* horas. Si una galleta de avena tiene 55 cal y Juan se come 4t galletas durante la t–ésima hora, ¿cuántas calorías netas pierde después de 3 horas montando en bicicleta?

241. Sandra tiene 25 años y pesa 120 libras. Quema $300 - 50t$ cal/h mientras se ejercita en su máquina caminadora. Su consumo de calorías al beber Gatorade es de 100t calorías durante la t–ésima hora. ¿Cuál es su disminución neta de calorías después de caminar por 3 horas?

242. Un automóvil tiene una eficiencia máxima de 33 mpg a una velocidad de crucero de 40 mph. La eficiencia cae a un ritmo de 0,1 mpg/mph entre 40 mph y 50 mph, y a una tasa de 0,4 mpg/mph entre 50 mph y 80 mph. ¿Cuál es la eficiencia en millas por galón si el auto va a una velocidad de crucero de 50 mph? ¿Cuál es la eficiencia en millas por galón si el auto va a 80 mph? Si la gasolina cuesta 3,50 $/gal, ¿cuál es el costo del combustible para recorrer 50 millas a 40 mph, a 50 mph y a 80 mph?

243. Aunque algunos motores son más eficientes con una potencia determinada en caballos de fuerza que otros, en promedio, la eficiencia del combustible disminuye con la potencia a una tasa de $1/25$ mpg/caballo de fuerza Si un motor típico de 50 caballos de fuerza tiene un rendimiento medio de combustible de 32 mpg, ¿cuál es el rendimiento medio de combustible de un motor con los siguientes caballos de fuerza? ¿150, 300, 450?

244. **[T]** La siguiente tabla muestra el calendario de 2013 del impuesto federal sobre la renta en función de la renta imponible.

Rango de la renta imponible	El impuesto es...	... Por la cantidad superior a
\$0-\$8.925	10 %	\$0
\$8.925-\$36.250	\$892,50 + 15 %	\$8.925
\$36.250-\$87.850	\$4.991,25 + 25 %	\$36.250
\$87.850-\$183.250	\$17.891,25 + 28 %	\$87.850
\$183.250-\$398.350	\$44.603,25 + 33 %	\$183.250
\$398.350-\$400.000	\$115.586,25 + 35 %	\$398.350
> \$400.000	\$116.163,75 + 39,6 %	\$400.000

Tabla 1.9 Impuesto federal sobre la renta en función de la renta imponible *Fuente*: http://www.irs.gov/pub/irs-prior/i1040tt--2013.pdf.

Supongamos que Steve acaba de recibir un aumento de 10.000 dólares. ¿Cuánto queda de este aumento después de los impuestos federales si el salario de Steve antes de recibir el aumento era de 40.000 dólares? ¿Si era de 90.000 dólares? ¿Si era de 385.000 dólares?

245. **[T]** La siguiente tabla proporciona datos hipotéticos sobre el nivel de servicio de cierta autopista.

Rango de velocidad en autopista (mph)	Vehículos por hora por carril	Rango de densidad (vehículos/mi)
> 60	< 600	< 10
60–57	600–1.000	10–20
57–54	1.000–1.500	20–30
54–46	1.500–1.900	30–45
46–30	1.900–2.100	45–70
< 30	Es inestable	70–200

Tabla 1.10

a. Represente los vehículos por hora por carril en el eje *x* y la velocidad de la autopista en el eje *y*.
b. Calcule la disminución promedio en la velocidad (en millas por hora) por unidad de aumento en la congestión (vehículos por hora por carril) a medida que esta última aumenta de 600 a 1.000, de 1.000 a 1.500 y de 1.500 a 2.100. ¿La disminución de las millas por hora depende linealmente del aumento de los vehículos por hora por carril?
c. Grafique los minutos por milla (60 veces el recíproco de las millas por hora) en función de los vehículos por hora por carril. ¿Esta función es lineal?

En los dos ejercicios siguientes utilice los datos de la siguiente tabla, que muestra las poblaciones de águila calva desde 1963 hasta 2000 en el territorio continental de Estados Unidos.

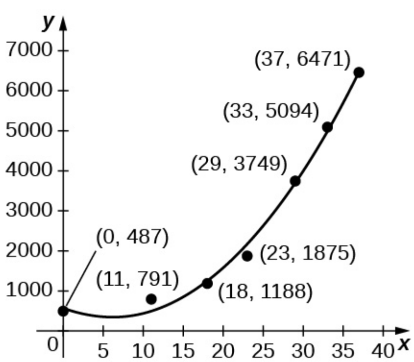
Año	Población de parejas reproductoras de águilas calvas
1963	487
1974	791

Tabla 1.11 Población de parejas reproductoras de águilas calvas *Fuente*: http://www.fws.gov/Midwest/eagle/population/chtofprs.html.

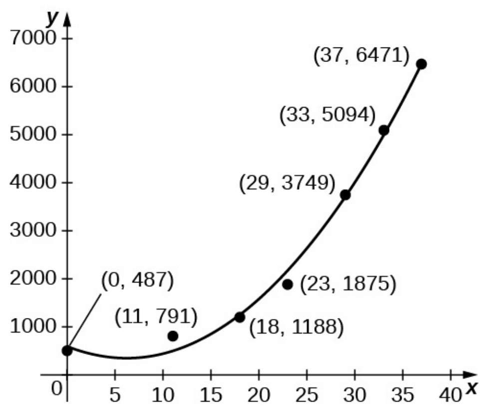
Año	Población de parejas reproductoras de águilas calvas
1981	1188
1986	1875
1992	3749
1996	5094
2000	6471

Tabla 1.11 Población de parejas reproductoras de águilas calvas *Fuente*: http://www.fws.gov/Midwest/eagle/population/chtofprs.html.

246. **[T]** El siguiente gráfico traza la curva cuadrática $p(t) = 6{,}48t^2 - 80{,}3\,1t + 585{,}69$ contra los datos de la tabla anterior, normalizados de manera que $t = 0$ corresponde a 1963. Estime el número medio de águilas calvas por año presentes durante los 37 años calculando el valor promedio de *p* sobre $[0, 37]$.

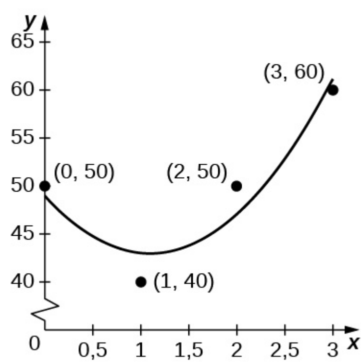


247. **[T]** El siguiente gráfico representa la curva cúbica $p(t) = 0{,}07t^3 + 2{,}42t^2 - 25{,}63t + 521{,}23$ con los datos de la tabla anterior, normalizados de forma que $t = 0$ corresponde a 1963. Estime el número medio de águilas calvas por año presentes durante los 37 años calculando el valor promedio de *p* sobre $[0, 37]$.



248. **[T]** Suponga que hace un viaje por carretera y registra tu velocidad cada media hora, como se recoge en la siguiente tabla. El mejor ajuste cuadrático a los datos es $q(t) = 5x^2 - 11x + 49$, que se muestra en el gráfico adjunto. Integre *q* para estimar la distancia total recorrida en 3 horas.

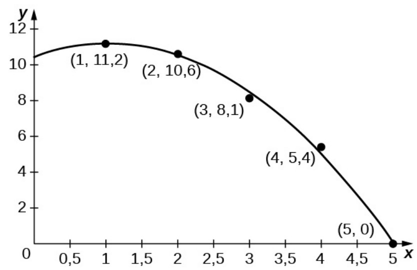
Tiempo (h)	Velocidad (mph)
0 (inicio)	50
1	40
2	50
3	60



Cuando un auto acelera, no lo hace a un ritmo constante, sino que la aceleración es variable. En los siguientes ejercicios, utilice la siguiente tabla, que muestra la aceleración medida en cada segundo mientras un conductor se incorpora a una autopista.

Tiempo (s)	Aceleración (mph/s)
1	11,2
2	10,6
3	8,1
4	5,4
5	0

249. **[T]** El gráfico adjunto muestra el mejor ajuste cuadrático, $a(t) = -0{,}70t^2 + 1{,}44t + 10{,}44$, a los datos de la tabla anterior. Calcule el valor promedio de $a(t)$ para estimar la aceleración media entre $t = 0$ y $t = 5$.

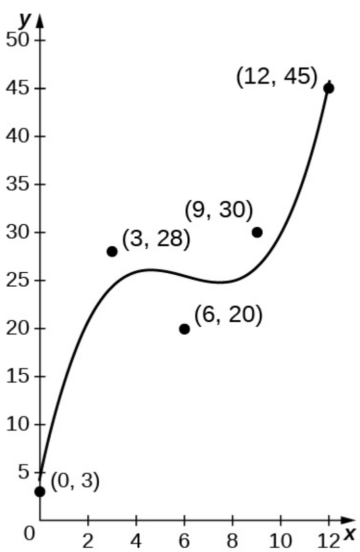


250. **[T]** Usando su ecuación de aceleración del ejercicio anterior, halle la ecuación de velocidad correspondiente. Suponiendo que la velocidad final es de 0 mph, halle la velocidad en el tiempo $t = 0$.

251. **[T]** Utilizando su ecuación de velocidad del ejercicio anterior, halle la ecuación de distancia correspondiente, asumiendo que su distancia inicial es 0 mi. ¿Qué distancia recorrió mientras aceleraba su auto? (*Pista:* Tendrá que convertir las unidades de tiempo).

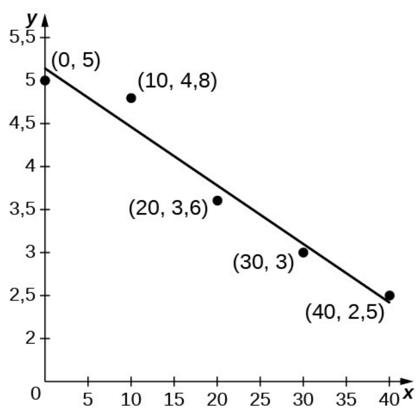
252. **[T]** El número de hamburguesas que se venden en un restaurante a lo largo del día se muestra en la siguiente tabla, con un gráfico adjunto que representa el mejor ajuste cúbico a los datos, $b(t) = 0{,}12t^3 - 2{,}13t^3 + 12{,}13t + 3{,}91$, con la $t = 0$ correspondiente a las 9 a. m. y $t = 12$ correspondiente a las 9 p. m. Calcule el valor medio de $b(t)$ para estimar el número promedio de hamburguesas vendidas por hora.

Horas después de la medianoche	Número de hamburguesas vendidas
9	3
12	28
15	20
18	30
21	45



253. **[T]** Una atleta corre junto a un detector de movimiento que registra su velocidad, como se muestra en la siguiente tabla. El mejor ajuste lineal a estos datos, $\ell(t) = -0{,}068t + 5{,}14$, se muestra en el gráfico adjunto. Utilice el valor medio de $\ell(t)$ entre $t = 0$ y $t = 40$ para estimar la velocidad media de la corredora

Minutos	Velocidad (m/s)
0	5
10	4,8
20	3,6
30	3,0
40	2,5



1.5 Sustitución

Objetivos de aprendizaje

1.5.1 Utilizar la sustitución para evaluar integrales indefinidas.
1.5.2 Utiliza la sustitución para evaluar integrales definidas.

El teorema fundamental del cálculo nos dio un método para evaluar integrales sin usar las sumas de Riemann. Este método no obstante tiene el inconveniente de que debemos ser capaces de encontrar una antiderivada, y esto no siempre es fácil. En esta sección examinaremos una técnica, llamada **integración por sustitución**, que nos ayudará a encontrar antiderivadas. En concreto, este método nos ayuda a encontrar las antiderivadas cuando el integrando es el

resultado de una derivada en cadena.

Al principio, el planteamiento del procedimiento de sustitución puede no parecer lo bastante evidente. Sin embargo, es una tarea principalmente visual, es decir, el integrando le muestra lo que debe hacer; es cuestión de reconocer la forma de la función. Entonces, ¿qué se supone que debemos ver? Buscamos un integrando de la forma $f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx$. Por ejemplo, en la integral $\int\left(x^2-3\right)^3 2xdx$, tenemos $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2-3$, y $g'(x)=2x$. Entonces,

$$f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)=\left(x^2-3\right)^3\left(2x\right),$$

y vemos que nuestro integrando está en la forma correcta.

El método se llama *de sustitución* porque sustituimos parte del integrando por la variable *u* y parte del integrando por *du*. También se denomina **cambio de variables** porque cambiamos las variables para obtener una expresión más fácil de trabajar para aplicar las reglas de integración.

Teorema 1.7

Sustitución con integrales indefinidas

Supongamos que $u=g\left(x\right)$, , donde $g'\left(x\right)$ es continua en un intervalo, supongamos que $f\left(x\right)$ es continua en el rango correspondiente de *g*, y que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx &= \int f\left(u\right)du\\ &= F\left(u\right)+C\\ &= F\left(g\left(x\right)\right)+C.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Prueba

Sean *f*, *g*, *u* y *F* los especificados en el teorema. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(g(x)) &= F'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)\\ &= f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right).\end{aligned}$$

Al integrar ambos lados con respecto a *x*, vemos que

$$\int f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx=F\left(g\left(x\right)\right)+C.$$

Si ahora sustituimos $u=g\left(x\right)$, y $du=g'\left(x\right)dx$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx &= \int f\left(u\right)du\\ &= F\left(u\right)+C\\ &= F\left(g\left(x\right)\right)+C.\end{aligned}$$

□

Volviendo al problema que analizamos originalmente, supongamos que $u=x^2-3$ y luego $du=2xdx$. Reescriba la integral en términos de *u*:

$$\int\underbrace{\left(x^2-3\right)}_{u}{}^{3}\underbrace{\left(2xdx\right)}_{du}=\int u^3\,du.$$

Al utilizar la regla de la potencia para las integrales, tenemos

$$\int u^3\,du=\frac{u^4}{4}+C.$$

Sustituya la expresión original de *x* en la solución:

$$\frac{u^4}{4} + C = \frac{\left(x^2 - 3\right)^4}{4} + C.$$

Podemos generalizar el procedimiento en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Integración por sustitución

1. Fíjese bien en el integrando y seleccione una expresión $g(x)$ dentro del integrando para establecerlo igual a *u*. Seleccionemos $g(x)$. de manera que $g'(x)$ también forma parte del integrando.
2. Sustituya $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$. en la integral.
3. Ahora deberíamos ser capaces de evaluar la integral con respecto a *u*. Si la integral no puede ser evaluada, tenemos que devolvernos y seleccionar una expresión diferente para usarla como *u*.
4. Evalúe la integral en términos de *u*.
5. Escriba el resultado en términos de *x* y la expresión $g(x)$.

EJEMPLO 1.30

Uso de la sustitución para encontrar una antiderivada

Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\int 6x\left(3x^2 + 4\right)^4 dx.$

Solución

El primer paso es elegir una expresión para *u*. Elegimos $u = 3x^2 + 4$ porque entonces $du = 6x dx$, y ya tenemos *du* en el integrando. Escriba la integral en términos de *u*:

$$\int 6x\left(3x^2 + 4\right)^4 dx = \int u^4 du.$$

Recuerde que *du* es la derivada de la expresión elegida para *u*, sin importar lo que haya dentro del integrando. Ahora podemos evaluar la integral con respecto a *u*:

$$\begin{aligned}\int u^4 du &= \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\left(3x^2+4\right)^5}{5} + C.\end{aligned}$$

Análisis

Podemos comprobar nuestra respuesta tomando la derivada del resultado de la integración. Deberíamos obtener el integrando. Escogiendo un valor para *C* de 1, suponemos que $y = \frac{1}{5}\left(3x^2 + 4\right)^5 + 1$. Tenemos

$$y = \frac{1}{5}\left(3x^2 + 4\right)^5 + 1,$$

así que

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{1}{5}\right)5\left(3x^2 + 4\right)^4 6x \\ &= 6x\left(3x^2 + 4\right)^4.\end{aligned}$$

Esta es exactamente la expresión con la que empezamos dentro del integrando.

1.25 Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\int 3x^2\left(x^3 - 3\right)^2 dx.$

A veces tenemos que ajustar las constantes de nuestra integral si no coinciden exactamente con las expresiones que estamos sustituyendo.

EJEMPLO 1.31

Utilizar la sustitución con la alteración

Utilice la sustitución para calcular $\int z\sqrt{z^2 - 5}dz$.

Solución

Reescriba la integral como $\int z\left(z^2 - 5\right)^{1/2} dz$. Supongamos que $u = z^2 - 5$ y $du = 2z\, dz$. Ahora tenemos un problema porque $du = 2z\, dz$ y la expresión original solo tiene $z\, dz$. Tenemos que alterar nuestra expresión para *du* o la integral en *u* será el doble de grande de lo que debería ser. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación *du* por $\frac{1}{2}$. podemos resolver este problema. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u &= z^2 - 5 \\ du &= 2z\, dz \\ \tfrac{1}{2}du &= \tfrac{1}{2}(2z)\, dz = z\, dz. \end{aligned}$$

Escriba la integral en términos de *u*, pero saque la $\frac{1}{2}$ fuera del símbolo de integración:

$$\int z\left(z^2 - 5\right)^{1/2} dz = \frac{1}{2}\int u^{1/2} du.$$

Integre la expresión en *u*:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int u^{1/2} du &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}\left(z^2 - 5\right)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

1.26 Utilice la sustitución para calcular $\int x^2\left(x^3 + 5\right)^9 dx$.

EJEMPLO 1.32

Uso de la sustitución con integrales de funciones trigonométricas

Utilice la sustitución para evaluar la integral $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t} dt$.

Solución

Sabemos que la derivada de $\cos t$ ¿es $-\operatorname{sen} t$, así que establecemos $u = \cos t$. Entonces $du = -\operatorname{sen} t dt$. Sustituyendo en la integral, tenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t} dt = -\int \frac{du}{u^3}.$$

Al evaluar la integral, obtenemos

$$-\int \frac{du}{u^3} = -\int u^{-3}\,du$$
$$= -\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-2} + C.$$

Volviendo a poner la respuesta en términos de *t*, obtenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\,dt = \frac{1}{2u^2} + C$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 t} + C.$$

1.27 Utilice la sustitución para evaluar la integral $\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$

A veces necesitamos manipular una integral de forma más complicada que simplemente multiplicar por o dividir entre una constante. Tenemos que eliminar todas las expresiones dentro del integrando que están en términos de la variable original. Cuando finalicemos, *u* debería ser la única variable en el integrando. En algunos casos, esto significa resolver la variable original en términos de *u*. El siguiente ejemplo debería aclararnos esta técnica.

EJEMPLO 1.33

Cómo encontrar una antiderivada mediante la sustitución en *u*

Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

Solución

Supongamos que $u = x - 1$, entonces $du = dx$. Pero esto no tiene en cuenta la *x* en el numerador del integrando. Necesitamos expresar *x* en términos de *u*. Si los valores de $u = x - 1$, entonces $x = u + 1$. Ahora podemos reescribir la integral en términos de *u*:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{u+1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \int \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \int \left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right)du.$$

A continuación integramos de la forma habitual, sustituimos *u* por la expresión original, y factorizamos y simplificamos el resultado. Por lo tanto,

$$\int \left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right)du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + C$$
$$= (x-1)^{1/2}\left[\tfrac{2}{3}(x-1) + 2\right] + C$$
$$= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3} + \tfrac{6}{3}\right)$$
$$= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}(x-1)^{1/2}(x+2) + C.$$

1.28 Utilice la sustitución para evaluar la integral indefinida $\int \cos^3 t \operatorname{sen} t \, dt$.

Sustitución de integrales definidas

La sustitución también se puede utilizar con las integrales definidas. Sin embargo, el uso de la sustitución para evaluar una integral definida exige un cambio en los límites de integración. Si cambiamos las variables en el integrando, los límites de integración también cambian.

Teorema 1.8

Sustitución con integrales definidas

Supongamos que $u = g(x)$ y supongamos que g' es continua en un intervalo $[a, b]$, y que f es continua en el rango de $u = g(x)$. Entonces,

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Aunque no demostraremos formalmente este teorema, lo justificamos con algunos cálculos. A partir de la regla de sustitución de integrales indefinidas, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, tenemos

$$\int f(g(x))\, g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f[g(x)]\, g'(x) dx &= F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du, \end{aligned} \tag{1.20}$$

y obtenemos el resultado deseado.

EJEMPLO 1.34

Uso de la sustitución para evaluar una integral definida

Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^1 x^2 \left(1 + 2x^3\right)^5 dx$.

Solución

Supongamos que $u = 1 + 2x^3$, así que $du = 6x^2 dx$. Como la función original incluye un factor de x^2 y $du = 6x^2 dx$, multiplicamos ambos lados de la ecuación du por $1/6$. Entonces,

$$\begin{aligned} du &= 6x^2 dx \\ \frac{1}{6} du &= x^2 dx. \end{aligned}$$

Para ajustar los límites de la integración, tenga en cuenta que cuando $x = 0, u = 1 + 2(0) = 1$, y cuando $x = 1, u = 1 + 2(1) = 3$. Entonces

$$\int_0^1 x^2 \left(1 + 2x^3\right)^5 dx = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du.$$

Al evaluar esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int_1^3 u^5\,du &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{u^6}{6}\right)\Big|_1^3\\ &= \frac{1}{36}\left[(3)^6-(1)^6\right]\\ &= \frac{182}{9}.\end{aligned}$$

1.29 Utilice la sustitución para evaluar la integral definida $\int_{-1}^{0} y\left(2y^2-3\right)^5 dy.$

EJEMPLO 1.35

Uso de la sustitución con una función exponencial

Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^1 xe^{4x^2+3}dx.$

Solución

Supongamos que $u=4x^2+3$. Entonces, $du=8xdx$. Para ajustar los límites de integración, observamos que cuando $x=0, u=3$, y cuando $x=1, u=7$. Así que nuestra sustitución da como resultado

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{4x^2+3}dx &= \frac{1}{8}\int_3^7 e^u du\\ &= \frac{1}{8}e^u\Big|_3^7\\ &= \frac{e^7-e^3}{8}\\ &\approx 134{,}568.\end{aligned}$$

1.30 Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x^3\right)dx.$

La sustitución puede ser solo una de las técnicas necesarias para evaluar una integral definida. Todas las propiedades y reglas de integración se aplican de forma independiente, y puede ser necesario reescribir las funciones trigonométricas utilizando una identidad trigonométrica antes de aplicar la sustitución. Además, tenemos la opción de sustituir la expresión original por *u* después de encontrar la antiderivada, lo que significa que no tenemos que cambiar los límites de integración. Estos dos enfoques se muestran en el Ejemplo 1.36.

EJEMPLO 1.36

Uso de la sustitución para evaluar una integral trigonométrica

Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta.$

Solución

Utilicemos primero una identidad trigonométrica para reescribir la integral. La identidad trigonométrica $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ nos permite reescribir la integral como

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta.$$

Entonces,

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta.$$

Podemos evaluar la primera integral tal cual, pero para evaluar la segunda integral necesitamos hacer una sustitución. Supongamos que $u = 2\theta$. Entonces, $du = 2d\theta$, o $\frac{1}{2}du = d\theta$. Además, cuando $\theta = 0, u = 0$, y cuando $\theta = \pi/2, u = \pi$. Expresando la segunda integral en términos de *u*, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} \cos u du \\ &= \frac{\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} u\Big|_{u=0}^{u=\theta} \\ &= \left(\frac{\pi}{4}-0\right)+(0-0)=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

SECCIÓN 1.5 EJERCICIOS

254. ¿Por qué la sustitución en *u* se denomina *cambio de variable*?

255. 2. Si los valores de $f = g \circ h$, al invertir la regla de la cadena, $\frac{d}{dx}(g \circ h)(x) = g'(h(x))h'(x)$, debe tomar $u = g(x)$ o $u = h(x)$?

En los siguientes ejercicios, compruebe cada identidad utilizando la diferenciación. Entonces, utilizando la sustitución en u indicada, identifique f tal que la integral tome la forma $\int f(u)\, du$.

256. $\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2)+C; u = x+1$

257. Para $x > 1 : \int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2}{15}\sqrt{x-1}\left(3x^2+4x+8\right)+C; u = x-1$

258. $\int x\sqrt{4x^2+9}dx = \frac{1}{12}\left(4x^2+9\right)^{3/2}+C; u = 4x^2+9$

259. $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}dx = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9}+C; u = 4x^2+9$

260. $\int \frac{x}{(4x^2+9)^2}dx = -\frac{1}{8(4x^2+9)}; u = 4x^2+9$

En los siguientes ejercicios calcule la antiderivada mediante la sustitución indicada.

261. $\int (x+1)^4 dx; u = x+1$

262. $\int (x-1)^5 dx; u = x-1$

263. $\int (2x-3)^{-7} dx; u = 2x-3$

264. $\int (3x-2)^{-11}\,dx;\ u = 3x-2$ **265.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx;\ u = x^2+1$ **266.** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;\ u = 1-x^2$

267. $\int (x-1)\left(x^2-2x\right)^3 dx;\ u = x^2-2x$ **268.** $\int \left(x^2-2x\right)\left(x^3-3x^2\right)^2 dx;\ u = x^3-3x^2$

269. $\int \cos^3\theta d\theta;\ u = \operatorname{sen}\theta$
(Pista: $\cos^2\theta = 1-\operatorname{sen}^2\theta$).
grandes.

270. $\int \operatorname{sen}^3\theta d\theta;\ u = \cos\theta$
(Pista: $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$).

En los siguientes ejercicios, utilice un cambio de variables adecuado para determinar la integral indefinida.

271. $\int x(1-x)^{99}\,dx$ **272.** $\int t\left(1-t^2\right)^{10} dt$ **273.** $\int (11x-7)^{-3}\,dx$

274. $\int (7x-11)^4\,dx$ **275.** $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta d\theta$ **276.** $\int \operatorname{sen}^7\theta \cos\theta d\theta$

277. $\int \cos^2(\pi t)\operatorname{sen}(\pi t)\,dt$

278. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x dx$
(Pista: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$).
grandes.

279. $\int t\operatorname{sen}\left(t^2\right)\cos\left(t^2\right)\,dt$

280. $\int t^2\cos^2\left(t^3\right)\operatorname{sen}\left(t^3\right)\,dt$ **281.** $\int \frac{x^2}{\left(x^3-3\right)^2}\,dx$ **282.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

283. $\int \frac{y^5}{\left(1-y^3\right)^{3/2}}\,dy$ **284.** $\int \cos\theta(1-\cos\theta)^{99}\operatorname{sen}\theta d\theta$ **285.** $\int \left(1-\cos^3\theta\right)^{10}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\theta$

286. $\int (\cos\theta-1)\left(\cos^2\theta-2\cos\theta\right)^3\operatorname{sen}\theta d\theta$ **287.** $\int \left(\operatorname{sen}^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\right)\left(\operatorname{sen}^3\theta-3\operatorname{sen}^2\theta\right)^3\cos\theta d\theta$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para estimar el área bajo la curva utilizando sumas de Riemann a la izquierda con 50 términos, y luego use la sustitución para hallar la respuesta exacta.

288. **[T]** $y = 3(1-x)^2$ en $[0,2]$

289. **[T]** $y = x\left(1-x^2\right)^3$ en $[-1,2]$

290. **[T]** $y = \operatorname{sen}x(1-\cos x)^2$ en $[0,\pi]$

291. **[T]** $y = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ en $[-1,1]$

En los siguientes ejercicios, utilice un cambio de variables para evaluar la integral definida.

292. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ **293.** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **294.** $\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{5+t^2}}\,dt$

295. $\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}dt$

296. $\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \tan\theta d\theta$

297. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}d\theta$

En los siguientes ejercicios, evalúe la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ con constante $C = 0$ utilizando la sustitución en u. Luego, grafique la función y la antiderivada sobre el intervalo indicado. Si es posible, estime un valor de C que habría que añadir a la antiderivada para hacerla igual a la integral definida $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, con a el punto final izquierdo del intervalo dado.

298. **[T]** $\int (2x+1)\,e^{x^2+x-6}dx$ en $[-3, 2]$

299. **[T]** $\int \frac{\cos(\ln(2x))}{x}dx$ en $[0, 2]$

300. **[T]** $\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{x^3+x^2+x+4}}dx$ en $[-1, 2]$

301. **[T]** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx$ en $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

302. **[T]** $\int (x+2)\,e^{-x^2-4x+3}\,dx$ en $[-5, 1]$

303. **[T]** $\int 3x^2\sqrt{2x^3+1}dx$ en $[0, 1]$

304. Si los valores de $h(a) = h(b)$ en $\int_a^b g'(h(x))\,h'(x)\,dx$, ¿qué puede decir sobre el valor de la integral?

305. ¿Es la sustitución $u = 1 - x^2$ en la integral definida $\int_0^2 \frac{x}{1-x^2}dx$ es correcta? Si no, ¿por qué no?

En los siguientes ejercicios, utilice un cambio de variables para demostrar que cada integral definida es igual a cero.

306. $\int_0^{\pi} \cos^2(2\theta)\operatorname{sen}(2\theta)\,d\theta$

307. $\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos\left(t^2\right)\operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt$

308. $\int_0^1 (1-2t)\,dt$

309. $\int_0^1 \frac{1-2t}{\left(1+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)}dt$

310. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$

311. $\int_0^2 (1-t)\cos(\pi t)\,dt$

312. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^2 t \cos t\,dt$

313. Demuestre que el valor promedio de $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es el mismo que el valor medio de $f(cx)$ en el intervalo $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right]$ por $c > 0$.

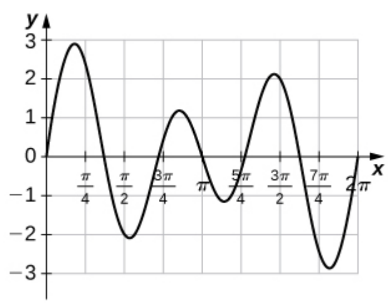
314. Halle el área bajo el gráfico de $f(t) = \frac{t}{\left(1+t^2\right)^a}$ entre $t = 0$ y $t = x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$ es fijo, y evalúe el límite como $x \to \infty$.

315. Halle el área bajo el gráfico de $g(t) = \frac{t}{\left(1-t^2\right)^a}$ entre $t = 0$ y $t = x$, donde $0 < x < 1$ y $a > 0$ es fijo. Evalúe el límite como $x \to 1$.

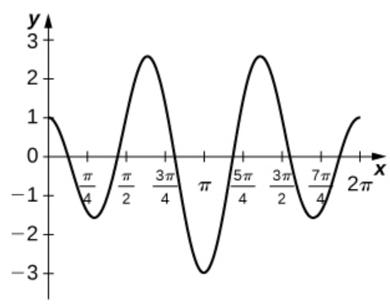
316. El área de un semicírculo de radio 1 puede expresarse como $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$. Utilice la sustitución $x = \cos t$ para expresar el área de un semicírculo como la integral de una función trigonométrica. No es necesario calcular la integral.

317. El área de la mitad superior de una elipse con un eje mayor que es el eje *x* de $x = -a$ a $x = a$ y con un eje menor que es el eje *y* de $y = -b$ al $y = b$ se puede escribir como $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$. Utilice la sustitución $x = a\cos t$ para expresar esta área en términos de una integral de una función trigonométrica. No es necesario calcular la integral.

318. **[T]** El siguiente gráfico es de una función de la forma $f(t) = a\,\text{sen}(nt) + b\,\text{sen}(mt)$. Estime los coeficientes *a* y *b*, y los parámetros de frecuencia *n* y *m*. Utilice estas estimaciones para aproximar $\int_0^{\pi} f(t)\, dt$.



319. **[T]** El siguiente gráfico es de una función de la forma $f(x) = a\cos(nt) + b\cos(mt)$. Estime los coeficientes *a* y *b* y los parámetros de frecuencia *n* y *m*. Utilice estas estimaciones para aproximar $\int_0^{\pi} f(t)\, dt$.



1.6 Integrales con funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos de aprendizaje

1.6.1 Integrar funciones que impliquen funciones exponenciales.
1.6.2 Integrar funciones que impliquen funciones logarítmicas.

Las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan para modelar el crecimiento de la población, el crecimiento celular y el crecimiento financiero, así como la depreciación, el decaimiento radiactivo y el consumo de recursos, por nombrar solo algunas aplicaciones. En esta sección, exploraremos la integración con funciones exponenciales y logarítmicas.

Integrales de funciones exponenciales

La función exponencial es quizás la función más eficiente en cuanto a las operaciones de cálculo. La función exponencial $y = e^x$, es su propia derivada y su propia integral.

Regla: integrales de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales se pueden integrar mediante las siguientes fórmulas.

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (1.21)$$

EJEMPLO 1.37

Hallar una antiderivada de una función exponencial

Halle la antiderivada de la función exponencial e^{-x}.

Solución

Utilice la sustitución, estableciendo $u = -x$, y luego $du = -1dx$. Multiplique la ecuación du por -1, por lo que ahora tiene $-du = dx$. Entonces,

$$\int e^{-x}\,dx = -\int e^u\,du$$

$$= -e^u + C$$
$$= -e^{-x} + C.$$

1.31 Halle la antiderivada de la función mediante la sustitución: $x^2 e^{-2x^3}$.

Un error común al tratar con expresiones exponenciales es tratar el exponente en *e* de la misma manera que tratamos los exponentes en las expresiones polinómicas. No podemos utilizar la regla de la potencia para el exponente en *e*. Esto puede ser especialmente confuso cuando tenemos tanto exponenciales como polinomios en la misma expresión, como en el punto de control anterior. En estos casos, siempre debemos verificar que estemos utilizando las reglas correctas en las funciones que estamos integrando.

EJEMPLO 1.38

Raíz cuadrada de una función exponencial

Halle la antiderivada de la función exponencial $e^x\sqrt{1+e^x}$.

Solución

Primero reescriba el problema utilizando un exponente racional:

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int e^x\left(1+e^x\right)^{1/2}dx.$$

Utilizando la sustitución, elija $u = 1 + e^x$. Entonces, $du = e^x\,dx$. Tenemos (Figura 1.37)

$$\int e^x\left(1+e^x\right)^{1/2}dx = \int u^{1/2}\,du.$$

Entonces

$$\int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{3/2} + C.$$

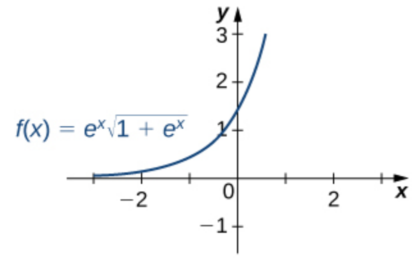


Figura 1.37 El gráfico muestra una función exponencial por la raíz cuadrada de una función exponencial.

1.32 Encuentre la antiderivada de $e^x(3e^x - 2)^2$.

EJEMPLO 1.39

Uso de la sustitución con una función exponencial

Utilice la sustitución para evaluar la integral indefinida $\int 3x^2 e^{2x^3}\,dx$.

Solución

Aquí optamos por dejar que *u* sea igual a la expresión en el exponente sobre *e*. Supongamos que $u = 2x^3$ y $du = 6x^2\,dx.$. De nuevo, *du* se desvía por un multiplicador constante; la función original contiene un factor de $3x^2$, no de $6x^2$. Multiplique ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{2}$ para que el integrando en *u* sea igual al integrando en *x*. Por lo tanto,

$$\int 3x^2 e^{2x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du.$$

Integre la expresión en *u* y luego sustituya la expresión original en *x* de nuevo en la integral de *u*:

$$\frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x^3} + C.$$

1.33 Evalúe la integral indefinida $\int 2x^3 e^{x^4}\,dx$.

Como se mencionó al principio de esta sección, las funciones exponenciales se utilizan en muchas aplicaciones de la vida real. El número *e* se asocia a menudo con el crecimiento compuesto o acelerado, como hemos visto en las secciones anteriores sobre la derivada. Aunque la derivada representa una tasa de cambio o una tasa de crecimiento, la integral representa el cambio total o el crecimiento total. Veamos un ejemplo en el que la integración de una función exponencial resuelve una aplicación empresarial común.

Una función precio-demanda nos indica la relación entre la cantidad de la demanda de un producto y el precio del mismo. En general, el precio disminuye a medida que aumenta la cantidad demandada. La función precio-demanda marginal es la derivada de la función precio-demanda y nos indica la rapidez con la que cambia el precio a un nivel de producción determinado. Las empresas utilizan estas funciones para determinar la elasticidad del precio de la demanda y para determinar si el cambio en los niveles de producción sería rentable.

EJEMPLO 1.40

Hallar una ecuación precio-demanda

Halle la ecuación precio-demanda para una marca concreta de pasta de dientes en una cadena de supermercados cuando la demanda es de 50 tubos por semana a 2,35 dólares el tubo, dado que la función marginal precio-demanda, $p'(x)$, para un número *x* de tubos por semana, se da como

$$p'(x) = -0{,}015e^{-0{,}01x}.$$

Si la cadena de supermercados vende 100 tubos a la semana, ¿qué precio debe fijar?

Solución

Para hallar la ecuación precio-demanda, se integra la función marginal precio-demanda. Primero halle la antiderivada y luego observe los detalles. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= \int -0{,}015e^{-0{,}01x}\,dx \\ &= -0{,}015\int e^{-0{,}01x}\,dx. \end{aligned}$$

Utilizando la sustitución, supongamos que $u = -0{,}01x$ y $du = -0{,}01dx$. Luego, divida ambos lados de la ecuación *du* por -0,01. Esto da

$$\begin{aligned} \frac{-0{,}015}{-0{,}01}\int e^u\,du &= 1{,}5\int e^u\,du \\ &= 1{,}5e^u + C \\ &= 1{,}5e^{-0{,}01x} + C. \end{aligned}$$

El siguiente paso es resolver *C*. Sabemos que cuando el precio es de 2,35 dólares por tubo, la demanda es de 50 tubos por semana. Esto significa que

$$\begin{aligned} p(50) &= 1{,}5e^{-0{,}01(50)} + C \\ &= 2{,}35. \end{aligned}$$

Ahora, solo hay que resolver para *C*:

$$\begin{aligned} C &= 2{,}35 - 1{,}5e^{-0{,}5} \\ &= 2{,}35 - 0{,}91 \\ &= 1{,}44. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p(x) = 1{,}5e^{-0{,}01x} + 1{,}44.$$

Si el supermercado vende 100 tubos de pasta de dientes a la semana, el precio sería

$$p(100) = 1{,}5e^{-0{,}01(100)} + 1{,}44 = 1{,}5e^{-1} + 1{,}44 \approx 1{,}99.$$

El supermercado debería cobrar 1,99 dólares por tubo si vende 100 tubos a la semana.

EJEMPLO 1.41

Evaluación de una integral definida que incluye una función exponencial

Evalúe la integral definida $\displaystyle\int_1^2 e^{1-x}\,dx$.

Solución

De nuevo, la sustitución es el método a utilizar. Supongamos que $u = 1 - x$, así que $du = -1dx$ o $-du = dx$. Entonces $\displaystyle\int e^{1-x}\,dx = -\int e^u\,du$. A continuación, cambie los límites de integración. Si utilizamos la ecuación $u = 1 - x$, tenemos

$$\begin{aligned} u &= 1 - (1) = 0 \\ u &= 1 - (2) = -1. \end{aligned}$$

La integral se convierte entonces en

$$\int_1^2 e^{1-x}\,dx = -\int_0^{-1} e^u\,du$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{0} e^u\,du \\ &= e^u\Big|_{-1}^{0} \\ &= e^0 - \left(e^{-1}\right) \\ &= -e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Vea el Figura 1.38.

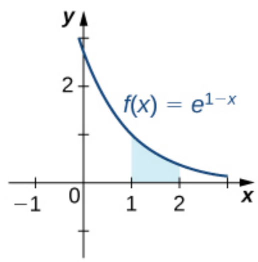


Figura 1.38 El área indicada se puede calcular evaluando una integral definida mediante una sustitución.

1.34 Evalúe $\int_0^2 e^{2x}\,dx.$

EJEMPLO 1.42

Crecimiento de las bacterias en un cultivo

Supongamos que la tasa de crecimiento de las bacterias en una placa de Petri viene dada por $q(t) = 3^t$, donde t está expresado en horas y $q(t)$ en miles de bacterias por hora. Si un cultivo comienza con 10.000 bacterias, halle una función $Q(t)$ que dé el número de bacterias en la placa de Petri en cualquier tiempo t. ¿Cuántas bacterias hay en la placa después de 2 horas?

Solución

Tenemos

$$Q(t) = \int 3^t\,dt = \frac{3^t}{\ln 3} + C.$$

Entonces, en $t = 0$ tenemos $Q(0) = 10 = \frac{1}{\ln 3} + C$, por lo que $C \approx 9{,}090$ y obtenemos

$$Q(t) = \frac{3^t}{\ln 3} + 9{,}090.$$

En el tiempo $t = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} Q(2) &= \frac{3^2}{\ln 3} + 9{,}090 \\ &= 17{,}282. \end{aligned}$$

Después de 2 horas, hay 17.282 bacterias en la placa.

1.35 A partir del Ejemplo 1.42, supongamos que las bacterias crecen a una tasa de $q(t) = 2^t$. Supongamos que

el cultivo aún comienza con 10.000 bacterias. Halle $Q(t)$. ¿Cuántas bacterias hay en la placa después de 3 horas?

EJEMPLO 1.43

Crecimiento de la población de moscas de la fruta

Supongamos que una población de moscas de la fruta aumenta a un ritmo de $g(t) = 2e^{0{,}02t}$, de moscas al día. Si la población inicial de moscas de la fruta es de 100 individuos, ¿cuántas moscas hay en la población después de 10 días?

Solución

Supongamos que $G(t)$ representa el número de moscas en la población en el tiempo *t*. Si aplicamos el teorema del cambio neto, tenemos

$$\begin{aligned} G(10) &= G(0) + \int_0^{10} 2e^{0{,}02t}\,dt \\ &= 100 + \left[\frac{2}{0{,}02}e^{0{,}02t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100 + \left[100e^{0{,}02t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100 + 100e^{0{,}2} - 100 \\ &\approx 122. \end{aligned}$$

Pasados 10 días hay 122 moscas en la población.

1.36 Supongamos que la tasa de crecimiento de la población de moscas viene dada por $g(t) = e^{0{,}01t}$, y la población inicial es de 100 moscas. ¿Cuántas moscas hay en la población después de 15 días?

EJEMPLO 1.44

Evaluación de una integral definida mediante la sustitución

Evalúe la integral definida utilizando la sustitución $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx.$

Solución

Este problema requiere reescribirse para simplificar la aplicación de las propiedades. Primero, reescriba el exponente en *e* como una potencia de *x*, luego lleve la x^2 en el denominador hasta el numerador usando un exponente negativo. Tenemos

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \int_1^2 e^{x^{-1}} x^{-2}dx.$$

Supongamos que $u = x^{-1}$, es el exponente en *e*. Entonces

$$\begin{aligned} du &= -x^{-2}dx \\ -du &= x^{-2}dx. \end{aligned}$$

Llevando el signo negativo fuera del signo de la integral, el problema ahora se lee

$$-\int e^u du.$$

A continuación, cambie los límites de integración:

$$u = (1)^{-1} = 1$$
$$u = (2)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Observe que ahora los límites comienzan con el número mayor, lo que significa que debemos multiplicar por -1 e intercambiar los límites. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -\int_1^{1/2} e^u\,du &= \int_{1/2}^1 e^u\,du \\ &= e^u|_{1/2}^1 \\ &= e - e^{1/2} \\ &= e - \sqrt{e}. \end{aligned}$$

1.37 Evalúe la integral definida utilizando la sustitución $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{4x^{-2}}\,dx.$

Integrales con funciones logarítmicas

Integrar funciones de la forma $f(x) = x^{-1}$ dan como resultado el valor absoluto de la función logarítmica natural, como se muestra en la siguiente regla. Las fórmulas integrales para otras funciones logarítmicas, tales como $f(x) = \ln x$ y $f(x) = \log_a x$, también se incluyen en la regla.

Regla: fórmulas de integración que implican funciones logarítmicas

Las siguientes fórmulas se pueden utilizar para evaluar integrales que implican funciones logarítmicas.

$$\begin{aligned} \int x^{-1}\,dx &= \ln|x| + C \\ \int \ln x\,dx &= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \\ \int \log_a x\,dx &= \frac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + C \end{aligned} \tag{1.22}$$

EJEMPLO 1.45

Encontrar una antiderivada que implique $\ln x$

Halle la antiderivada de la función $\frac{3}{x-10}$.

Solución

Primero factorice el 3 fuera del símbolo de la integral. Entonces utilice la regla u^{-1}. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x-10}dx &= 3\int \frac{1}{x-10}dx \\ &= 3\int \frac{du}{u} \\ &= 3\ln|u| + C \\ &= 3\ln|x-10| + C, x \neq 10.\end{aligned}$$

Vea el Figura 1.39.

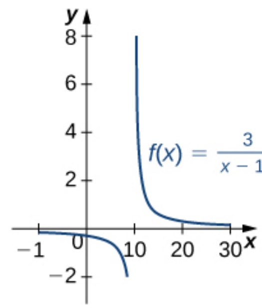


Figura 1.39 El dominio de esta función es $x \neq 10$.

1.38 Encuentre la antiderivada de $\frac{1}{x+2}$.

EJEMPLO 1.46

Encontrar una antiderivada de una función racional

Encuentre la antiderivada de $\frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2}$.

Solución

Esto se puede reescribir como $\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1}dx$. Utilice la sustitución. Supongamos que $u = x^4+3x^2$, entonces $du = 4x^3+6x$. Modifique *du* mediante la factorización del 2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}du &= \left(4x^3+6x\right)dx \\ &= 2\left(2x^3+3x\right)dx \\ \frac{1}{2}du &= \left(2x^3+3x\right)dx.\end{aligned}$$

Reescriba el integrando en *u*:

$$\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1}dx = \frac{1}{2}\int u^{-1}du.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int u^{-1}du &= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^4+3x^2\right| + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.47

Hallar una antiderivada de una función logarítmica

Halle la antiderivada de la función logarítmica $\log_2 x$.

Solución

Siga el formato de la fórmula que aparece en la regla sobre fórmulas de integración que implican funciones logarítmicas. Con base en este formato, tenemos

$$\int \log_2 x dx = \frac{x}{\ln 2}(\ln x - 1) + C.$$

1.39 Encuentre la antiderivada de $\log_3 x$.

El Ejemplo 1.48 es una integral definida de una función trigonométrica. Con las funciones trigonométricas, a menudo tenemos que aplicar una propiedad trigonométrica o una identidad antes de avanzar. Hallar la forma correcta del integrando suele ser la clave para una integración sin problemas.

EJEMPLO 1.48

Evaluación de una integral definida

Calcule la integral definida de $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx$.

Solución

Necesitamos la sustitución para evaluar este problema. Supongamos que $u = 1 + \cos x$, , así que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Reescriba la integral en términos de u, cambiando también los límites de integración. Por lo tanto,

$$u = 1 + \cos(0) = 2$$
$$u = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} &= -\int_2^1 u^{-1} du \\ &= \int_1^2 u^{-1} du \\ &= \ln |u| \big|_1^2 \\ &= [\ln 2 - \ln 1] \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

SECCIÓN 1.6 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule cada integral indefinida.

320. $\int e^{2x} dx$

321. $\int e^{-3x} dx$

322. $\int 2^x dx$

323. $\int 3^{-x} dx$

324. $\int \frac{1}{2x} dx$

325. $\int \frac{2}{x} dx$

326. $\int \frac{1}{x^2} dx$

327. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

En los siguientes ejercicios, halle cada integral indefinida utilizando las sustituciones adecuadas.

328. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

329. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

330. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ $(x > 1)$ grandes.

331. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ grandes.

332. $\int \tan\theta \, d\theta$

333. $\int \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x}{x \cos x} dx$

334. $\int \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\tan x} dx$

335. $\int \ln(\cos x) \tan x dx$

336. $\int x e^{-x^2} dx$

337. $\int x^2 e^{-x^3} dx$

338. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$

339. $\int e^{\tan x} \sec^2 x dx$

340. $\int e^{\ln x} \frac{dx}{x}$

341. $\int \frac{e^{\ln(1-t)}}{1-t} dt$

En los siguientes ejercicios, verifique por diferenciación que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$, *entonces utilice los cambios de variables apropiados para calcular la integral.*

342. $\int x \ln x dx$
(Pista: $\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int x \ln\left(x^2\right) dx$; x>0)

343. $\int x^2 \ln(x^2) \, dx$

344. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
(Pista: Establezca $u = \frac{1}{x}$.).
grandes.

345. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
(Pista: Establezca $u = \sqrt{x}$.).
grandes.

346. Escriba una integral para expresar el área bajo el gráfico de $y = \frac{1}{t}$ a partir de $t = 1$ a e^x y evalúe la integral.

347. Escriba una integral para expresar el área bajo el gráfico de $y = e^t$ entre $t = 0$ y $t = \ln x$, y evalúe la integral.

En los siguientes ejercicios, utilice las sustituciones adecuadas para expresar las integrales trigonométricas en términos de composiciones con logaritmos.

348. $\int \tan(2x) \, dx$

349. $\int \frac{\operatorname{sen}(3x) - \cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x)} dx$

350. $\int \frac{x \operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\cos\left(x^2\right)} dx$

351. $\int x \csc\left(x^2\right) dx$

352. $\int \ln(\cos x) \tan x \, dx$

353. $\int \ln(\csc x) \cot x dx$

354. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

En los siguientes ejercicios, evalúe la integral definida.

355. $\int_1^2 \frac{1 + 2x + x^2}{3x + 3x^2 + x^3} dx$

356. $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

357. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$

358. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc x dx$

359. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot x dx$

En los siguientes ejercicios, integre utilizando la sustitución indicada.

360. $\int \frac{x}{x - 100} dx; u = x - 100$

361. $\int \frac{y - 1}{y + 1} dy; u = y + 1$

362. $\int \frac{1 - x^2}{3x - x^3} dx; u = 3x - x^3$

363. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} dx; u = \operatorname{sen} x - \cos x$

364. $\int e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} dx; u = e^{2x}$

365. $\int \ln(x) \frac{\sqrt{1 - (\ln x)^2}}{x} dx; u = \ln x$

En los siguientes ejercicios, ¿la aproximación del extremo derecho sobrestima o subestima el área exacta? Calcule la estimación del punto extremo derecho R_{50} y resuelva el área exacta.

366. **[T]** $y = e^x$ en $[0, 1]$

367. **[T]** $y = e^{-x}$ en $[0, 1]$

368. **[T]** $y = \ln(x)$ en $[1, 2]$

369. **[T]** $y = \frac{x+1}{x^2+2x+6}$ en $[0, 1]$

370. **[T]** $y = 2^x$ en $[-1, 0]$

371. **[T]** $y = -2^{-x}$ en $[0, 1]$

En los siguientes ejercicios, $f(x) \geq 0$ por $a \leq x \leq b$. Halle el área bajo el gráfico de $f(x)$ entre los valores dados a y b mediante la integración.

372. $f(x) = \frac{\log_{10}(x)}{x}; a = 10, b = 100$

373. $f(x) = \frac{\log_2(x)}{x}; a = 32, b = 64$

374. $f(x) = 2^{-x}; a = 1, b = 2$

375. $f(x) = 2^{-x}; a = 3, b = 4$

376. Halle el área bajo el gráfico de la función $f(x) = xe^{-x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 5$.

377. Calcule la integral de $f(x) = xe^{-x^2}$ y calcule el menor valor de N tal que el área debajo del gráfico $f(x) = xe^{-x^2}$ entre $x = N$ y $x = N + 1$ es, como máximo, de 0,01.

378. Halle el límite, cuando *N* tiende a infinito, del área bajo el gráfico de $f(x) = xe^{-x^2}$ entre $x = 0$ y $x = N$.

379. Demuestre que $\int_a^b \frac{dt}{t} = \int_{1/b}^{1/a} \frac{dt}{t}$ cuando $0 < a \leq b$.

380. Supongamos que $f(x) > 0$ para toda *x* y que *f* y *g* son diferenciables. Utilice la identidad $f^g = e^{g \ln f}$ y la regla de la cadena para encontrar la derivada de f^g.

381. Utilice el ejercicio anterior para encontrar la antiderivada de $h(x) = x^x(1 + \ln x)$ y evalúe $\int_2^3 x^x(1 + \ln x)\,dx$.

382. Demuestre que si $c > 0$, entonces la integral de $1/x$ de *ac* a *bc* $(0 < a < b)$ es la misma que la integral de $1/x$ de *a* a *b*.

Los siguientes ejercicios pretenden derivar las propiedades fundamentales del logaritmo natural partiendo de la definición $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$*, utilizando las propiedades de la integral definida y sin hacer más suposiciones.*

383. Utilice la identidad $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ para derivar la identidad $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

384. Utilice un cambio de variable en la integral $\int_1^{xy} \frac{1}{t}dt$ para demostrar que $\ln xy = \ln x + \ln y$ para $x, y > 0$.

385. Utilice la identidad $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ para demostrar que $\ln(x)$ es una función creciente de *x* en $[0, \infty)$, y utilice los ejercicios anteriores para demostrar que el rango de $\ln(x)$ es $(-\infty, \infty)$. Sin más suposiciones, concluya que $\ln(x)$ tiene una función inversa definida en $(-\infty, \infty)$.

386. Imagine, por el momento, que no sabemos que e^x es la función inversa de $\ln(x)$, pero tenga en cuenta que $\ln(x)$ tiene una función inversa definida en $(-\infty, \infty)$. Llamémoslo *E*. Use la identidad $\ln xy = \ln x + \ln y$ para deducir que $E(a + b) = E(a)E(b)$ para cualquier número real *a*, *b*.

387. Imagine, por el momento, que no sabemos que e^x es la función inversa de $\ln x$, pero tenga en cuenta que $\ln x$ tiene una función inversa definida en $(-\infty, \infty)$. Llamémoslo *E*. Demuestre que $E'(t) = E(t)$.

388. La integral de seno, definida como $S(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es una cantidad importante en ingeniería. Aunque no tiene una fórmula cerrada simple, es posible estimar su comportamiento para grandes *x*. Demuestre que para $k\geq 1, |S(2\pi k)-S(2\pi(k+1))|\leq \frac{1}{k(2k+1)\pi}$. $(\text{Pista: } \operatorname{sen}(t+\pi)=-\operatorname{sen} t)$.

389. **[T]** La distribución normal en probabilidad viene dada por $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, donde σ es la desviación típica y μ es el promedio. La *distribución normal estándar* en probabilidad, p_s, corresponde a $\mu=0$ y $\sigma=1$. Calcule las estimaciones del punto extremo correcto R_{10} y R_{100} de $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx$.

390. **[T]** Calcule las estimaciones del punto extremo derecho R_{50} y R_{100} de $\int_{-3}^{5}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/8}$.

1.7 Integrales que resultan en funciones trigonométricas inversas

Objetivos de aprendizaje

1.7.1 Integrar funciones que dan lugar a funciones trigonométricas inversas.

En esta sección nos centramos en las integrales que dan lugar a funciones trigonométricas inversas. Ya hemos trabajado con estas funciones. Recordemos que en Funciones y gráficos (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/1-introduccion) las funciones trigonométricas no son biunívocas, a menos que los dominios estén restringidos. Al trabajar con las inversas de funciones trigonométricas, siempre hay que tener en cuenta estas restricciones. También en Derivadas (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/3-introduccion), desarrollamos fórmulas para derivadas de funciones trigonométricas inversas. Las fórmulas que se desarrollaron allí generan directamente fórmulas de integración que implican funciones trigonométricas inversas.

Integrales que dan lugar a funciones senoidales inversas

Comencemos esta última sección del capítulo con las tres fórmulas. Junto con estas fórmulas, utilizamos la sustitución para evaluar las integrales. Demostramos la fórmula de la integral inversa de seno.

Regla: fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas

Las siguientes fórmulas de integración generan funciones trigonométricas inversas. Supongamos que $a>0$:

1.
$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{|a|}+C \tag{1.23}$$

2.
$$\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C \tag{1.24}$$

3.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{|a|}\sec^{-1}\frac{|u|}{a} + C(\text{carbono 14}). \quad (1.25)$$

Prueba

Supongamos que $y = \text{sen}^{-1}\frac{x}{a}$. Entonces $a\,\text{sen}\,y = x$. Ahora utilicemos la diferenciación implícita. Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a\,\text{sen}\,y) &= \frac{d}{dx}(x) \\ a\cos y\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a\cos y}. \end{aligned}$$

Para $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \cos y \ge 0$. Así, aplicando la identidad pitagórica $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, tenemos $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$. Esto da

$$\begin{aligned} \frac{1}{a\cos y} &= \frac{1}{a\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Entonces para $-a \le x \le a$, y generalizando a *u*, tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

□

EJEMPLO 1.49

Evaluación de una integral definida mediante funciones trigonométricas inversas

Evalúe la integral definida $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución

Podemos ir directamente a la fórmula de la antiderivada en la regla de las fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas, y luego evaluar la integral definida. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \text{sen}^{-1}x\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \text{sen}^{-1}0 \\ &= \frac{\pi}{6} - 0 \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

1.40 Halle la antiderivada de $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$.

EJEMPLO 1.50

Encontrar una antiderivada que implique una función trigonométrica inversa

Evalúe la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Solución

Sustituya $u = 3x$. Entonces $du = 3dx$ y tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}.$$

Aplicando la fórmula con $a = 2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

1.41 Halle la integral indefinida utilizando una función trigonométrica inversa y la sustitución de $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

EJEMPLO 1.51

Evaluación de una integral definida

Evalúe la integral definida $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Solución

El formato del problema coincide con la fórmula de seno inverso. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \operatorname{sen}^{-1} u\Big|_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] - \left[\operatorname{sen}^{-1}(0)\right] \\ &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Integrales que resultan en otras funciones trigonométricas inversas

Hay seis funciones trigonométricas inversas. Sin embargo, en la regla sobre fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas solo se anotan tres fórmulas de integración porque las tres restantes son versiones negativas de las que utilizamos. La única diferencia es si el integrando es positivo o negativo. En vez de memorizar tres fórmulas más, si el integrando es negativo, simplemente factorice −1 y evalúe la integral usando una de las fórmulas ya proporcionadas. Para cerrar esta sección, examinaremos una fórmula más: la integral que resulta de la función tangente inversa.

EJEMPLO 1.52

Encontrar una antiderivada que implique la función tangente inversa

Encontrar una antiderivada de $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$.

Solución

Comparando este problema con las fórmulas indicadas en la regla sobre las fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas, el integrando se parece a la fórmula de $\tan^{-1} u + C$. Así que utilizamos la sustitución, suponiendo que $u = 2x$, entonces $du = 2dx$ y $1/2du = dx$. Entonces, tenemos

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2}\tan^{-1} u + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x) + C.$$

1.42 Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

EJEMPLO 1.53

Aplicación de las fórmulas de integración

Encuentre la antiderivada de $\int \frac{1}{9+x^2} dx$.

Solución

Aplique la fórmula con $a = 3$. Entonces,

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

1.43 Halle la antiderivada de $\int \frac{dx}{16+x^2}$.

EJEMPLO 1.54

Evaluación de una integral definida

Evalúe la integral definida $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solución

Utilice la fórmula de la tangente inversa. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= \tan^{-1} x \Big|_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \\ &= \left[\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\right] - \left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

1.44 Evalúe la integral definida $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

SECCIÓN 1.7 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, evalúe cada integral en términos de una función trigonométrica inversa.

391. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

392. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

393. $\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

394. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

395. $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

396. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

En los siguientes ejercicios, halle cada integral indefinida, utilizando las sustituciones adecuadas.

397. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

398. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

399. $\int \frac{dx}{9+x^2}$

400. $\int \frac{dx}{25+16x^2}$

401. $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-9}}$

402. $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{4x^2-16}}$

403. Explique la relación $-\cos^{-1}t+C=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{sen}^{-1}t+C.$ ¿Es cierto, en general, que $\cos^{-1}t=-\text{sen}^{-1}t$?

404. Explique la relación $\sec^{-1}t+C=\int \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}}=-\csc^{-1}t+C.$ ¿Es cierto, en general, que $\sec^{-1}t=-\csc^{-1}t$?

405. Explique qué falla en la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

406. Explique qué falla en la siguiente integral: $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}}.$

En los siguientes ejercicios, resuelva la antiderivada $\int f$ de f con $C=0$, luego use una calculadora para graficar f y la antiderivada en el intervalo dado $[a, b]$. Identifique un valor de C tal que sumando C a la antiderivada se recupere la integral definida $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

407. **[T]** $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ en $[-3, 3]$

408. **[T]** $\int \frac{9}{9+x^2}dx$ en $[-6, 6]$

409. **[T]** $\int \frac{\cos x}{4+\text{sen}^2 x}dx$ en $[-6, 6]$

410. **[T]** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ en $[-6, 6]$

En los siguientes ejercicios, calcule la antiderivada utilizando las sustituciones adecuadas.

411. $\int \frac{\text{sen}^{-1} t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$

412. $\int \frac{dt}{\text{sen}^{-1} t\sqrt{1-t^2}}$

413. $\int \frac{\tan^{-1}(2t)}{1+4t^2}dt$

414. $\int \frac{t\tan^{-1}\left(t^2\right)}{1+t^4}dt$

415. $\int \frac{\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)}{|t|\sqrt{t^2-4}}dt$

416. $\int \frac{t\sec^{-1}\left(t^2\right)}{t^2\sqrt{t^4-1}}dt$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para graficar la antiderivada $\int f$ con la $C=0$ en el intervalo dado $[a,b]$. Aproxime un valor de C, si es posible, tal que sumando C a la antiderivada se obtenga el mismo valor que la integral definida $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

417. **[T]** $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$ en $[2,6]$

418. **[T]** $\int \frac{1}{(2x+2)\sqrt{x}}dx$ en $[0,6]$

419. **[T]** $\int \frac{(\text{sen}\,x+x\cos x)}{1+x^2\text{sen}^2 x}dx$ en $[-6,6]$

420. **[T]** $\int \frac{2e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}}dx$ en $[0,2]$

421. **[T]** $\int \frac{1}{x+x\ln^2 x}$ en $[0,2]$

422. **[T]** $\int \frac{\text{sen}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ en $[-1,1]$

En los siguientes ejercicios, calcule cada integral utilizando las sustituciones adecuadas.

423. $\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}dt$

424. $\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt$

425. $\int \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$

426. $\int \frac{dt}{t\left(1+\ln^2 t\right)}$ grandes.

427. $\int \frac{\cos^{-1}(2t)}{\sqrt{1-4t^2}}dt$

428. $\int \frac{e^t\cos^{-1}\left(e^t\right)}{\sqrt{1-e^{2t}}}dt$

En los siguientes ejercicios, calcule cada integral definida.

429. $\int_0^{1/2} \frac{\tan\left(\text{sen}^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

430. $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\tan\left(\cos^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

431. $\int_0^{1/2} \frac{\text{sen}\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}dt$

432. $\int_0^{1/2} \frac{\cos\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}dt$

433. Para $A>0$, calcule $I(A)=\int_{-A}^{A} \frac{dt}{1+t^2}$ y evalúe $\lim_{a\to\infty} I(A)$, el área bajo el gráfico de $\frac{1}{1+t^2}$ en $\left[-\infty,\infty\right]$.

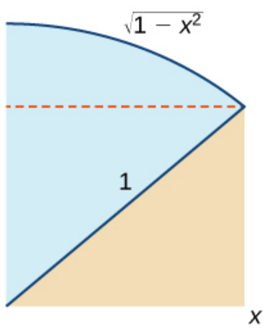
434. Para $1<B<\infty$, calcule $I(B)=\int_1^B \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ y evalúe $\lim_{B\to\infty} I(B)$, el área bajo el gráfico de $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ en $[1,\infty)$.

435. Utilice la sustitución $u = \sqrt{2}\cot x$ y la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ para evaluar $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$. (*Pista:* Multiplique la parte superior e inferior del integrando por $\csc^2 x$.).

436. **[T]** Aproxime los puntos en los que los gráficos de $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = \left(1 + 4x^2\right)^{-3/2}$ se intersecan a cuatro decimales y calcule el área entre sus gráficos a tres decimales.

437. 47. **[T]** Aproxime los puntos en los que los gráficos de $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}$ se intersecan a cuatro decimales y calcule el área entre sus gráficos a tres decimales.

438. Utilice el siguiente gráfico para demostrar que $\int_0^x \sqrt{1 - t^2}dt = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x.$



Revisión del capítulo

Términos clave

aproximación del punto del extremo derecho aproximación del punto del extremo derecho es una aproximación del área de los rectángulos bajo una curva utilizando el punto del extremo derecho de cada subintervalo para construir los lados verticales de cada rectángulo

aproximación del punto del extremo izquierdo aproximación del área bajo una curva que se calcula utilizando el punto del extremo izquierdo de cada subintervalo para calcular la altura de los lados verticales de cada rectángulo

área neta señalada el área entre una función y el eje *x* tal que el área por debajo del eje *x* se resta del área por encima del eje *x*; el resultado es el mismo que la integral definida de la función

área total el área total entre una función y el eje *x* se calcula sumando el área por encima del eje *x* y el área por debajo del eje *x*; el resultado es el mismo que la integral definida del valor absoluto de la función

cambio de variables sustitución de una variable, como *u*, por una expresión en el integrando

función integrable una función es integrable si el límite que define la integral existe; en otras palabras, si el límite de las sumas de Riemann a medida que *n* llega al infinito existe

integración por sustitución técnica de integración que permite integrar funciones que son el resultado de una derivada en cadena

integral definida una operación primaria del cálculo; el área entre la curva y el eje *x* en un intervalo dado es una integral definida

integrando la función a la derecha del símbolo de integración; el integrando incluye la función que se integra

límites de integración valores que aparecen cerca de la parte superior e inferior del signo de la integral y definen el intervalo sobre el que debe integrarse la función

notación sigma (también, **notación de sumatoria**) la letra griega sigma (Σ) indica la suma de los valores; los valores del índice por encima y por debajo de la sigma indican dónde empezar la suma y dónde terminarla

partición conjunto de puntos que divide un intervalo en subintervalos

partición regular partición en la que los subintervalos tienen todos el mismo ancho

suma de Riemann estimación del área bajo la curva de la forma $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

suma inferior suma obtenida utilizando el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo

suma superior suma obtenida utilizando el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo

teorema del cambio neto si conocemos la tasa de cambio de una cantidad, el teorema del cambio neto dice que la cantidad futura es igual a la cantidad inicial más la integral de la tasa de cambio de la cantidad

teorema del valor medio para integrales garantiza que existe un punto *c* tal que $f(c)$ es igual al valor medio de la función

teorema fundamental del cálculo teorema central para todo el desarrollo del cálculo, que establece la relación entre la diferenciación y la integración

teorema fundamental del cálculo, parte 1 utiliza una integral definida para definir una antiderivada de una función

teorema fundamental del cálculo, parte 2 (también, **teorema de evaluación**) podemos evaluar una integral definida evaluando la antiderivada del integrando en los puntos extremos del intervalo y restando

valor promedio de una función (o f_{ave}) el valor promedio de una función en un intervalo se puede hallar calculando la integral definida de la función y dividiendo ese valor por la longitud del intervalo

variable de integración indica con respecto a qué variable se está integrando; si es *x*, entonces la función en el integrando va seguida de *dx*

Ecuaciones clave

Propiedades de la notación sigma	$\sum_{i=1}^{n} c = nc$ $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$ $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$ $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$
Sumas de potencias de números enteros	$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{i=0}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
Aproximación del punto del extremo izquierdo	$A \approx L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x$
Aproximación del punto del extremo derecho	$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Integral definida	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$
Propiedades de la integral definida	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$ $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)$ para la constante c $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Teorema del valor medio para integrales	Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces hay al menos un punto $c \in [a, b]$ de manera que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$

Teorema fundamental del cálculo, parte 1	Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, y la función $F(x)$ se define por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $F'(x) = f(x)$.
Teorema fundamental del cálculo, parte 2	Si *f* es continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
Teorema del cambio neto	$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\,dx$ o $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$
Sustitución con integrales indefinidas	$\int f[g(x)]\,g'(x)dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$
Sustitución con integrales definidas	$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$
Integrales de funciones exponenciales	$\int e^x\,dx = e^x + C$ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Fórmulas de integración que implican funciones logarítmicas	$\int x^{-1}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$ $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$ $\int \log_a x\,dx = \frac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + C$
Integrales que producen funciones trigonométricas inversas	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

Conceptos clave

1.1 Aproximación de áreas

- El uso de la notación sigma (notación de sumatoria) de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es útil para expresar sumas largas de valores en forma compacta.
- Para una función continua definida en un intervalo $[a, b]$, el proceso de dividir el intervalo en *n* partes iguales, extender un rectángulo en el gráfico de la función, calcular las áreas de la serie de rectángulos y luego sumar las áreas da una aproximación del área de esa región.
- La anchura de cada rectángulo es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- La suma de Riemann es una expresión de la forma $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$, y puede utilizarse para estimar el área bajo la

curva $y = f(x)$. Las aproximaciones del punto de los extremos izquierdo y derecho son tipos especiales de sumas de Riemann donde los valores de $\{x_i^*\}$ se eligen entre los extremos izquierdo o derecho de los subintervalos, respectivamente.
- Las sumas de Riemann permiten una gran flexibilidad a la hora de elegir el conjunto de puntos $\{x_i^*\}$ en la que se evalúa la función, a menudo con el objetivo de obtener una suma inferior o una suma superior.

1.2 La integral definida

- La integral definida puede utilizarse para calcular el área neta señalada, que es el área por encima del eje *x*menos el área por debajo del eje *x*. El área neta señalada puede ser positiva, negativa o cero.
- Los componentes de la integral definida son el integrando, la variable de integración y los límites de integración.
- Las funciones continuas en un intervalo cerrado son integrables. Las funciones que no son continuas pueden seguir siendo integrables, dependiendo de la naturaleza de las discontinuidades.
- Las propiedades de las integrales definidas pueden utilizarse para evaluar integrales.
- El área bajo la curva de muchas funciones puede calcularse mediante fórmulas geométricas.
- El valor promedio de una función puede calcularse mediante integrales definidas.

1.3 El teorema fundamental del cálculo

- El teorema del valor medio de las integrales afirma que para una función continua en un intervalo cerrado, existe un valor *c* tal que $f(c)$ es igual al valor medio de la función. Vea el Teorema del valor medio para integrales.
- El teorema fundamental del cálculo, parte 1 muestra la relación entre la derivada y la integral. Vea el Teorema fundamental del cálculo, parte 1.
- El teorema fundamental del cálculo, parte 2 es una fórmula para evaluar una integral definida en términos de una antiderivada de su integrando. El área total bajo una curva se puede encontrar utilizando esta fórmula. Vea el El teorema fundamental del cálculo, parte 2.

1.4 Fórmulas de integración y el teorema del cambio neto

- El teorema del cambio neto establece que cuando una cantidad cambia, el valor final es igual al valor inicial más la integral de la tasa de cambio. El cambio neto puede ser un número positivo, un número negativo o cero.
- El área bajo una función par en un intervalo simétrico se puede calcular duplicando el área sobre el eje *x* positivo. En una función impar, la integral sobre un intervalo simétrico es igual a cero, porque la mitad del área es negativa.

1.5 Sustitución

- La sustitución es una técnica que simplifica la integración de funciones que son el resultado de una derivada en cadena. El término "sustitución" se refiere al cambio de variables o a la sustitución de la variable *u* y *du* por expresiones adecuadas en el integrando.
- Al utilizar la sustitución de una integral definida, es necesario que cambiemos los límites de integración.

1.6 Integrales con funciones exponenciales y logarítmicas

- Las funciones exponenciales y logarítmicas se presentan en muchas aplicaciones del mundo real, especialmente las que implican crecimiento y decaimiento.
- La sustitución se utiliza a menudo para evaluar integrales que implican funciones exponenciales o logaritmos.

1.7 Integrales que resultan en funciones trigonométricas inversas

- Las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas desarrolladas en Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/3-7-derivadas-de-funciones-inversas) conducen directamente a fórmulas de integración que implican funciones trigonométricas inversas.
- Utilice las fórmulas indicadas en la regla sobre fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas para que coincidan con el formato correcto y haga las modificaciones necesarias para resolver el problema.
- A menudo es necesario hacer sustituciones para poner el integrando en la forma correcta.

Ejercicios de repaso

Verdadero o falso. Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo. Supongamos que todas las funciones f y g son continuas en sus dominios.

439. Si los valores de $f(x) > 0, f'(x) > 0$ para todo x, entonces la regla de la derecha subestima la integral $\int_a^b f(x)$. Utilice un gráfico para justificar su respuesta.

440. $\int_a^b f(x)^2 dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b f(x)dx$

441. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$.

442. Toda función continua tiene una antiderivada.

Evalúe las sumas de Riemann L_4 y R_4 en las siguientes funciones en el intervalo especificado. Compare su respuesta con la respuesta exacta, cuando sea posible, o utilice una calculadora para definir la respuesta.

443. $y = 3x^2 - 2x + 1$ en $[-1, 1]$

444. $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$ en $[0, e]$

445. $y = x^2 \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

446. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ en $[1, 4]$

Evalúe las siguientes integrales.

447. $\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 + 4x\right) dx$

448. $\int_0^4 \frac{3t}{\sqrt{1 + 6t^2}} dt$

449. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2 \sec(2\theta) \tan(2\theta)\, d\theta$

450. $\int_0^{\pi/4} e^{\cos^2 x} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

Calcule la antiderivada.

451. $\int \frac{dx}{(x + 4)^3}$

452. $\int x \ln\left(x^2\right) dx$

453. $\int \frac{4x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx$

454. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx$

Halle la derivada.

455. $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

456. $\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} \sqrt{4 - t^2} dt$

457. $\frac{d}{dx} \int_1^{\ln(x)} \left(4t + e^t\right) dt$

458. $\frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} e^{t^2} dt$

Los siguientes problemas consideran el costo promedio histórico por gigabyte de RAM en una computadora

Año	Variación en 5 años ($)
1980	0
1985	−5.468.750
1990	−755.495
1995	−73.005
2000	−29.768
2005	−918
2010	−177

459. Si el costo promedio por gigabyte de RAM en 2010 es de 12 dólares, halle el costo medio por gigabyte de RAM en 1980.

460. El costo promedio por gigabyte de RAM puede aproximarse mediante la función $C(t) = 8,500,000(0{,}65)^t$, donde t se mide en años desde 1980 y C es el costo en dólares. Halle el costo promedio por gigabyte de memoria RAM entre 1980 y 2010.

461. Halle el costo promedio de 1GB de RAM entre 2005 y 2010.

462. La velocidad de la bala de un rifle puede aproximarse por $v(t) = 6.400t^2 - 6.505t + 2.686$, donde t es segundos después del disparo y v es la velocidad medida en pies por segundo. Esta ecuación solo modela la velocidad durante el primer medio segundo después del disparo $0 \le t \le 0{,}5$. ¿Cuál es la distancia total que recorre la bala en 0,5 segundos?

463. ¿Cuál es la velocidad media de la bala durante el primer medio segundo?

2 APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN



Figura 2.1 La presa Hoover es uno de los lugares emblemáticos de Estados Unidos, y proporciona riego y energía hidroeléctrica a millones de personas en el suroeste del país (créditos: modificación de la obra de Lynn Betts, Wikimedia).

Esquema del capítulo

Introducción

La presa Hoover es una maravilla de la ingeniería. Cuando el lago Mead, el embalse que hay detrás de la presa, está lleno, la presa soporta una gran fuerza. Sin embargo, los niveles de agua del lago varían considerablemente como consecuencia de las sequías y de las distintas demandas de agua. Más adelante en este capítulo utilizaremos las integrales definidas para calcular la fuerza que soporta la presa cuando el embalse está lleno, y examinaremos cómo los cambios en el nivel del agua afectan a esa fuerza (vea el Ejemplo 2.28).

La fuerza hidrostática es solo una de las muchas aplicaciones de las integrales definidas que exploramos en este

capítulo. Desde las aplicaciones geométricas como área superficial y volumen, aplicaciones físicas como masa y trabajo, hasta los modelos de crecimiento y decaimiento, las integrales definidas son una herramienta poderosa para ayudarnos a comprender y modelar el mundo que nos rodea.

2.1 Áreas entre curvas

Objetivos de aprendizaje

- **2.1.1** Determinar el área de una región entre dos curvas integrando con respecto a la variable independiente.
- **2.1.2** Encontrar el área de una región compuesta.
- **2.1.3** Determinar el área de una región entre dos curvas integrando con respecto a la variable dependiente.

En Introducción a la integración, desarrollamos el concepto de integral definida para calcular el área bajo una curva en un intervalo dado. En esta sección, ampliaremos esa idea para calcular el área de regiones más complejas. Empezaremos por encontrar el área entre dos curvas que son funciones de x, empezando por el caso simple en el que un valor de la función es siempre mayor que el otro. A continuación, se estudian los casos en los que los gráficos de las funciones se intersecan. Por último, consideraremos cómo calcular el área entre dos curvas que son funciones de y.

Área de una región entre dos curvas

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$ de manera que $f(x) \geq g(x)$ sobre $[a, b]$. Queremos hallar el área entre los gráficos de las funciones, como se muestra en la siguiente figura.

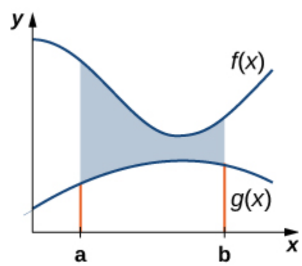


Figura 2.2 El área entre los gráficos de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, en el intervalo $[a, b]$.

Al igual que antes, vamos a dividir el intervalo en el eje x y aproximaremos el área entre los gráficos de las funciones con rectángulos. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Luego, para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, y en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ construya un rectángulo que se extienda verticalmente desde $g(x_i^*)$ al $f(x_i^*)$. La Figura 2.3(a) muestra los rectángulos cuando x_i^* se selecciona para ser el punto extremo izquierdo del intervalo y $n = 10$. La Figura 2.3(b) muestra en detalle un rectángulo representativo.

MEDIOS

Utilice esta calculadora (http://www.openstax.org/l/20_CurveCalc) para saber más sobre las áreas entre dos curvas.

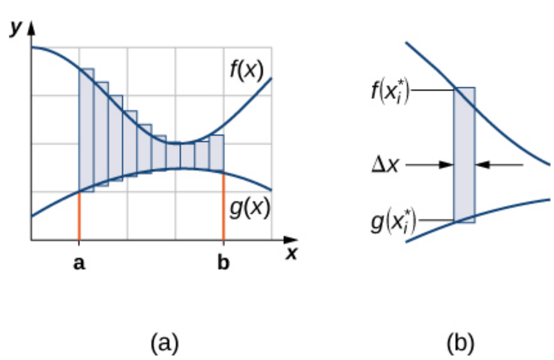


Figura 2.3 (a)Podemos aproximar el área entre los gráficos de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, con rectángulos. (b) El área de un rectángulo típico va de una curva a la otra.

La altura de cada rectángulo individual es $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ y la anchura de cada rectángulo es Δx. Al sumar las áreas de todos los rectángulos, vemos que el área entre las curvas se aproxima por

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right] \Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomamos el límite como $n \to \infty$ y obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.1

Hallar el área entre dos curvas

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Supongamos que R denotan la región delimitada por el gráfico de $f(x)$, abajo por el gráfico de $g(x)$, y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Entonces, el área de R viene dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \tag{2.1}$$

Aplicamos este teorema en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.1

Hallar el área de una región entre dos curvas 1

Si R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x + 4$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 3 - \frac{x}{2}$ en el intervalo $[1, 4]$, calcule el área de la región R.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

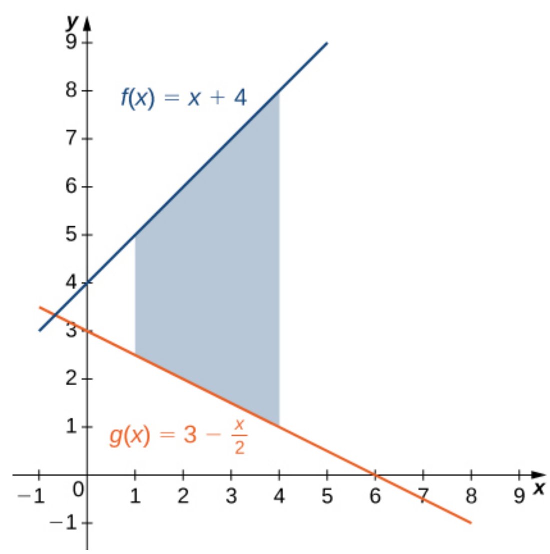


Figura 2.4 Se muestra una región entre dos curvas en la que una de ellas es siempre mayor que la otra.

Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_1^4 \left[(x+4) - \left(3 - \frac{x}{2}\right)\right] dx = \int_1^4 \left[\frac{3x}{2} + 1\right] dx \\ &= \left[\tfrac{3x^2}{4} + x\right]\Big|_1^4 = \left(16 - \tfrac{7}{4}\right) = \tfrac{57}{4}. \end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{57}{4}$ al cuadrado^2.

2.1 Si los valores de R es la región delimitada por los gráficos de las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 5$ y $g(x) = x + \frac{1}{2}$ en el intervalo $[1, 5]$, calcule el área de la región R.

En el Ejemplo 2.1, definimos el intervalo de interés como parte del planteamiento del problema. Sin embargo, frecuentemente queremos definir nuestro intervalo de interés con base en el punto de intersección de los gráficos de las dos funciones. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.2

Hallar el área de una región entre dos curvas 2

Si los valores de R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 9 - (x/2)^2$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 6 - x$, calcule el área de la región R.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

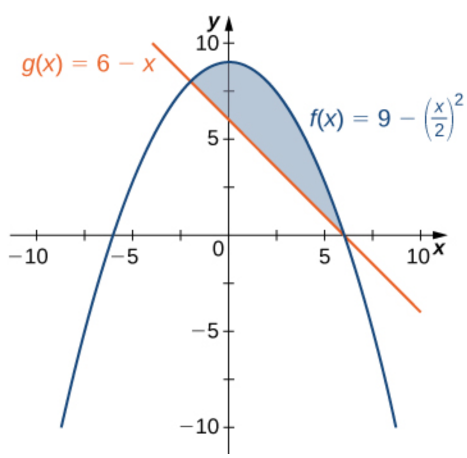


Figura 2.5 Este gráfico muestra la región por debajo del gráfico de $f(x)$ y por encima del gráfico de $g(x)$.

Primero tenemos que calcular dónde se intersecan los gráficos de las funciones. Si establecemos que $f(x) = g(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 9 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 &= 6 - x \\ 9 - \tfrac{x^2}{4} &= 6 - x \\ 36 - x^2 &= 24 - 4x \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ (x-6)(x+2) &= 0, \end{aligned}$$

Los gráficos de las funciones se intersecan cuando $x = 6$ o $x = -2$, por lo que queremos integrar desde -2 al 6. Dado

que $f(x) \geq g(x)$ por $-2 \leq x \leq 6$, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_{-2}^{6} \left[9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - (6 - x)\right] dx = \int_{-2}^{6} \left[3 - \frac{x^2}{4} + x\right] dx \\ &= \left[3x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-2}^{6} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

El área de la región es 64/3 unidades^2.

2.2 Si R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = x^4$, calcule el área de la región R.

Áreas de las regiones compuestas

Hasta ahora, hemos requerido $f(x) \geq g(x)$ a lo largo de todo el intervalo de interés, pero ¿qué ocurre si queremos observar las regiones delimitadas por los gráficos de las funciones que se entrecruzan? En ese caso, modificamos el proceso que acabamos de desarrollar utilizando la función de valor absoluto.

Teorema 2.2

Hallar el área de una región entre curvas que se cruzan

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$. Supongamos que R denota la región entre los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$, y está limitado a la izquierda y a la derecha por las rectas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Entonces, el área de R viene dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

En la práctica, la aplicación de este teorema nos obliga a descomponer el intervalo $[a, b]$ y evaluar varias integrales, dependiendo de cuál de los valores de la función es mayor en una parte determinada del intervalo. Estudiaremos este proceso en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3

Hallar el área de una región limitada por funciones que se cruzan

Si R es la región entre los gráficos de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$, calcule el área de la región R.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

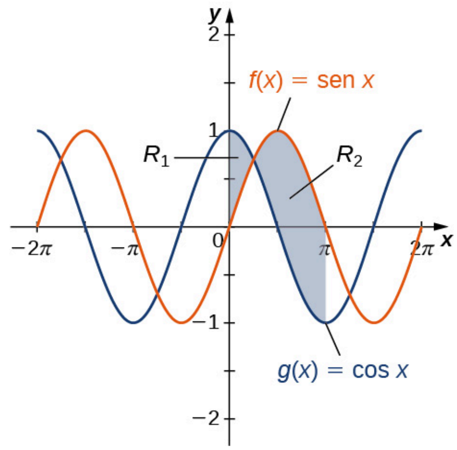


Figura 2.6 La región entre dos curvas puede dividirse en dos subregiones.

Los gráficos de las funciones se cruzan en $x = \pi/4$. Para $x \in [0, \pi/4]$, $\cos x \geq \text{sen}\, x$, así que

$$|f(x) - g(x)| = |\text{sen}\, x - \cos x| = \cos x - \text{sen}\, x.$$

Por otro lado, para $x \in [\pi/4, \pi]$, $\text{sen}\, x \geq \cos x$, así que

$$|f(x) - g(x)| = |\text{sen}\, x - \cos x| = \text{sen}\, x - \cos x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_0^{\pi} |\text{sen}\, x - \cos x|\, dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \text{sen}\, x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\text{sen}\, x - \cos x)\, dx \\ &= [\text{sen}\, x + \cos x]\,\Big|_0^{\pi/4} + [-\cos x - \text{sen}\, x]\,\Big|_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

El área de la región es $2\sqrt{2}$ unidades².

2.3 Si R es la región entre los gráficos de las funciones $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[\pi/2, 2\pi]$, calcule el área de la región R.

EJEMPLO 2.4

Hallar el área de una región compleja

Consideremos la región representada en la Figura 2.7. Calcule el área de R.

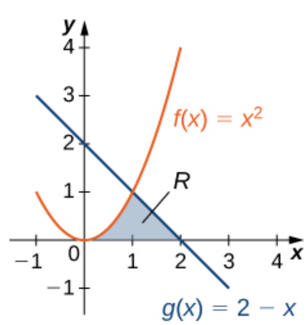


Figura 2.7 Se necesitan dos integrales para calcular el área de esta región.

Solución

Al igual que con el Ejemplo 2.3, tenemos que dividir el intervalo en dos partes. Los gráficos de las funciones se cruzan en $x = 1$ (establezca $f(x) = g(x)$ y resolver para *x*), así que evaluamos dos integrales separadas: una en el intervalo $[0, 1]$ y uno en el intervalo $[1, 2]$.

En el intervalo $[0, 1]$, la región está limitada arriba por $f(x) = x^2$ y abajo por el eje *x*, por lo que tenemos

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

En el intervalo $[1, 2]$, la región está limitada arriba por $g(x) = 2 - x$ y abajo por el eje x—eje, por lo que tenemos

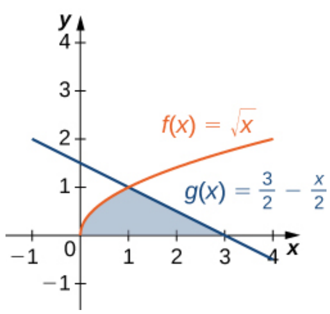
$$A_2 = \int_1^2 (2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Sumando estas áreas, obtenemos

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

El área de la región es $5/6$ unidades^2.

2.4 Considere la región representada en la siguiente figura. Calcule el área de R.



Regiones definidas con respecto a *y*

En el Ejemplo 2.4, tuvimos que evaluar dos integrales distintas para calcular el área de la región. Sin embargo, existe otro enfoque que solo requiere una integral. ¿Y si tratamos las curvas como funciones de y, en vez de como funciones de x? Revise la Figura 2.7. Observe que el gráfico de la izquierda, mostrado en rojo, está representado por la función $y = f(x) = x^2$. Podríamos resolver esto con la misma facilidad para x y representar la curva mediante la función $x = v(y) = \sqrt{y}$. (Observe que $x = -\sqrt{y}$ es también una representación válida de la función $y = f(x) = x^2$ en función de y. (No obstante, con base en el gráfico, está claro que nos interesa la raíz cuadrada positiva). Del mismo modo, el gráfico de la derecha está representado por la función $y = g(x) = 2 - x$,, pero también podría representarse con la función $x = u(y) = 2 - y$. Cuando los gráficos se representan como funciones de y, vemos que la región está limitada a la izquierda por el gráfico de una función y a la derecha por el gráfico de la otra función. Por lo tanto, si integramos con respecto a y, necesitamos evaluar una sola integral. Desarrollemos una fórmula para este tipo de integración.

Supongamos que $u(y)$ y $v(y)$ son funciones continuas sobre un intervalo $[c, d]$ de manera que $u(y) \geq v(y)$ para todos los $y \in [c, d]$. Queremos hallar el área entre los gráficos de las funciones, como se muestra en la siguiente figura.

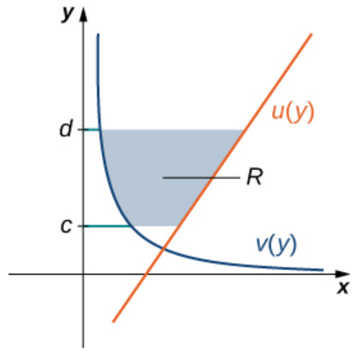


Figura 2.8 Podemos encontrar el área entre los gráficos de dos funciones, $u(y)$ y $v(y)$.

Esta vez, vamos a dividir el intervalo en el eje y y utilizar rectángulos horizontales para aproximar el área entre las funciones. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n,$ supongamos que $Q = \{y_i\}$ es una partición regular de $[c, d]$. Luego, para $i = 1, 2,\ldots, n,$ elija un punto $y_i^* \in \left[y_{i-1}, y_i\right]$, entonces en cada intervalo $\left[y_{i-1}, y_i\right]$ construya un rectángulo que se extienda horizontalmente desde $v\left(y_i^*\right)$ al $u\left(y_i^*\right)$. La Figura 2.9(a) muestra los rectángulos cuando y_i^* se selecciona para ser el punto extremo inferior del intervalo y $n = 10.$ La Figura 2.9(b) muestra en detalle un rectángulo representativo.

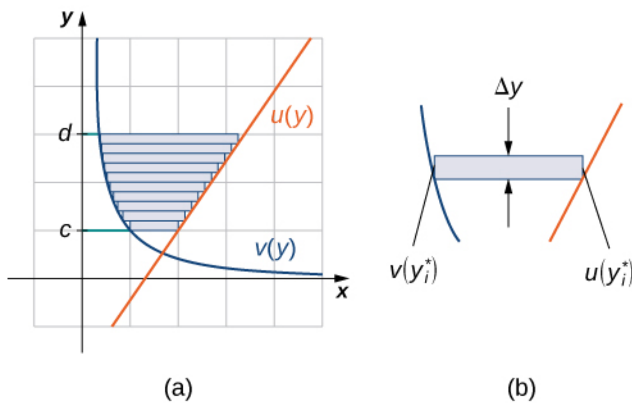


Figura 2.9 (a) Aproximación del área entre los gráficos de dos funciones, $u(y)$ y $v(y)$, con rectángulos. (b) El área de un rectángulo típico.

La altura de cada rectángulo individual es Δy y la anchura de cada rectángulo es $u\left(y_i^*\right) - v\left(y_i^*\right)$. Por lo tanto, el área entre las curvas es aproximadamente

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[u\left(y_i^*\right) - v\left(y_i^*\right)\right] \Delta y.$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomamos el límite como $n \to \infty$, obteniendo

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[u\left(y_i^*\right) - v\left(y_i^*\right)\right] \Delta y = \int_c^d \left[u(y) - v(y)\right] dy.$$

Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.3

Hallar el área entre dos curvas, integrando a lo largo del eje y

Supongamos que $u(y)$ y $v(y)$ son funciones continuas tales que $u(y) \geq v(y)$ para todos los $y \in [c, d]$. Supongamos que R denota la región limitada a la derecha por el gráfico de $u(y)$, a la izquierda por el gráfico de $v(y)$, y arriba y abajo por las rectas $y = d$ y $y = c$, respectivamente. Entonces, el área de R viene dada por

$$A = \int_c^d [u(y) - v(y)]\, dy. \tag{2.2}$$

EJEMPLO 2.5

Integrar con respecto a *y*

Volvamos a visitar el Ejemplo 2.4, solo que esta vez integremos con respecto a y. Supongamos que R es la región representada en la Figura 2.10. Calcule el área de R integrando con respecto a y.

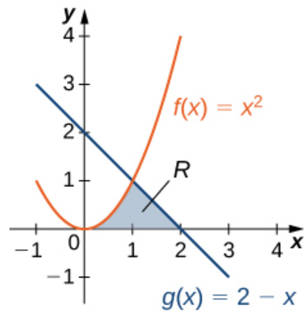


Figura 2.10 La zona de la región R puede calcularse mediante una integral solo cuando las curvas se tratan como funciones de y.

Solución

Primero debemos expresar los gráficos como funciones de y. Como vimos al principio de esta sección, la curva de la izquierda puede representarse por la función $x = v(y) = \sqrt{y}$, y la curva de la derecha puede representarse por la función $x = u(y) = 2 - y$.

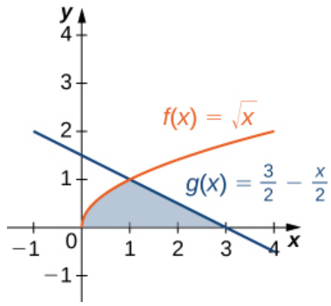
Ahora tenemos que determinar los límites de integración. La región está limitada abajo por el eje x, por lo que el límite inferior de integración es $y = 0$. El límite superior de la integración está determinado por el punto de intersección de los dos gráficos, que es el punto $(1, 1)$, por lo que el límite superior de integración es $y = 1$. Por lo tanto, tenemos $[c, d] = [0, 1]$.

Calculando el área de la región, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [u(y) - v(y)]\, dy \\ &= \int_0^1 \left[(2 - y) - \sqrt{y}\right] dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^{3/2}\right]\Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

El área de la región es 5/6 unidades^2.

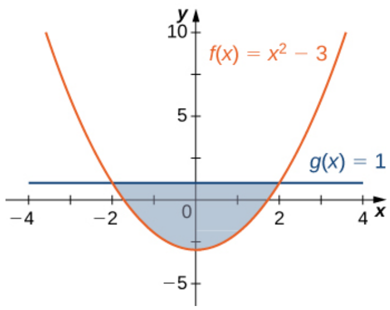
2.5 Volvamos a revisar el punto de control asociado al Ejemplo 2.4, solo que esta vez integremos con respecto a y. Supongamos que R es la región representada en la siguiente figura. Calcule el área de R integrando con respecto a y.



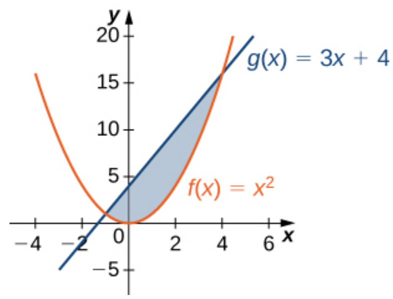
SECCIÓN 2.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, determine el área de la región entre las dos curvas de la figura dada integrando sobre el eje x.

1. $y = x^2 - 3$ y $y = 1$

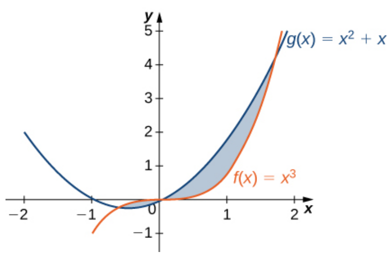


2. $y = x^2$ y $y = 3x + 4$

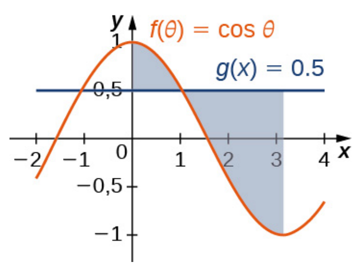


En los siguientes ejercicios, divida la región entre las dos curvas en dos regiones más pequeñas, y luego determine el área integrando sobre el eje x. Tenga en cuenta que tendrá que resolver dos integrales.

3. $y = x^3$ y $y = x^2 + x$

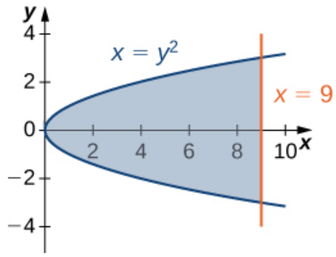


4. $y = \cos\theta$ y $y = 0{,}5$, para $0 \le \theta \le \pi$

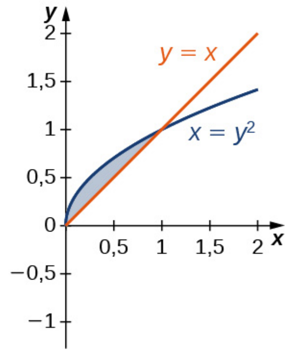


En los siguientes ejercicios, determine el área de la región entre las dos curvas integrando sobre el eje y.

5. $x = y^2$ y $x = 9$



6. $y = x$ y $x = y^2$



Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Determine su área integrando sobre el eje x.

7. $y = x^2$ y $y = -x^2 + 18x$

8. $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}$, y $x = 3$

9. $y = \cos x$ como $y = \cos^2 x$ sobre $x = [-\pi, \pi]$

10. $y = e^x, y = e^{2x-1}$, y $x = 0$

11. $y = e^x, y = e^{-x}, x = -1$ y $x = 1$

12. $y = e, y = e^x$, y $y = e^{-x}$

13. $y = |x|$ y $y = x^2$

Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Si es necesario, divida la región en subregiones para determinar toda su superficie.

14. $y = \text{sen}(\pi x), y = 2x$, y $x > 0$

15. $y = 12 - x, y = \sqrt{x}$, y $y = 1$

16. $y = \text{sen}\, x$ como $y = \cos x$ en $x = [-\pi, \pi]$

17. $y = x^3$ y $y = x^2 - 2x$ en $x = [-1, 1]$

18. $y = x^2 + 9$ y $y = 10 + 2x$ en $x = [-1, 3]$

19. $y = x^3 + 3x$ como $y = 4x$

Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Determine su área integrando sobre el y.

20. $x = y^3$ y $x = 3y - 2$

21. $x = 2y$ y $x = y^3 - y$

22. $x = -3 + y^2$ y $x = y - y^2$

23. $y^2 = x$ y $x = y + 2$

24. $x = |y|$ y $2x = -y^2 + 2$

25. $x = \text{sen}\, y, x = \cos(2y), y = \pi/2$, y $y = -\pi/2$

Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Determine su área integrando sobre el eje x o el eje y, lo que le parezca más conveniente.

26. $x = y^4$ y $x = y^5$

27. $y = xe^x, y = e^x, x = 0$, y $x = 1$

28. $y = x^6$ y $y = x^4$

29. $x = y^3 + 2y^2 + 1$ y $x = -y^2 + 1$

30. $y = |x|$ y $y = x^2 - 1$

31. $y = 4 - 3x$ y $y = \frac{1}{x}$

32. $y = \operatorname{sen} x, x = -\pi/6, x = \pi/6,$ y $y = \cos^3 x$

33. $y = x^2 - 3x + 2$ y $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

34. $y = 2\cos^3(3x), y = -1, x = \frac{\pi}{4},$ y $x = -\frac{\pi}{4}$

35. $y + y^3 = x$ y $2y = x$

36. $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = x^2 - 1$

37. $y = \cos^{-1} x, y = \operatorname{sen}^{-1} x, x = -1,$ y $x = 1$

En los siguientes ejercicios, halle el área exacta de la región delimitada por las ecuaciones dadas, si es posible. Si no puede determinar los puntos de intersección analíticamente, utilice una calculadora para aproximar los puntos de intersección con tres decimales y determinar el área aproximada de la región.

38. **[T]** $x = e^y$ y $y = x - 2$

39. **[T]** $y = x^2$ y $y = \sqrt{1 - x^2}$

40. **[T]** $y = 3x^2 + 8x + 9$ y $3y = x + 24$

41. **[T]** $x = \sqrt{4 - y^2}$ y $y^2 = 1 + x^2$

42. **[T]** $x^2 = y^3$ y $x = 3y$

43. **[T]** $y = \operatorname{sen}^3 x + 2, y = \tan x, x = -1{,}5,$ y $x = 1{,}5$

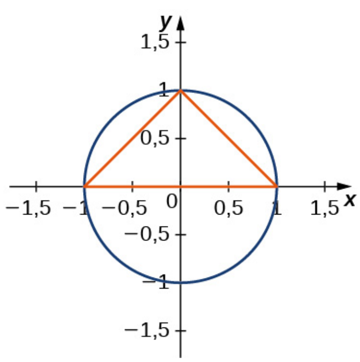
44. **[T]** $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y^2 = x^2$

45. **[T]** $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = x^2 + 2x + 1$

46. **[T]** $x = 4 - y^2$ y $x = 1 + 3y + y^2$

47. **[T]** $y = \cos x, y = e^x, x = -\pi,$ y $x = 0$

48. El mayor triángulo con base en el eje x que encaja dentro de la mitad superior del círculo de la unidad $y^2 + x^2 = 1$ viene dada por $y = 1 + x$ como $y = 1 - x$. Vea la siguiente figura. ¿Cuál es el área dentro del semicírculo pero fuera del triángulo?



49. Una fábrica que vende teléfonos celulares tiene una función de costo marginal $C(x) = 0{,}01x^2 - 3x + 229$, donde x representa el número de teléfonos celulares, y una función de ingreso marginal dada por $R(x) = 429 - 2x$. Halle el área entre los gráficos de estas curvas y $x = 0$. ¿Qué representa esta zona?

50. Un parque de atracciones tiene una función de costo marginal $C(x) = 1.000e^{-x} + 5$, donde x representa el número de entradas vendidas, y una función de ingreso marginal dada por $R(x) = 60 - 0{,}1x$. Halle el beneficio total que se produce al vender 550 entradas. Utilice una calculadora para determinar los puntos de intersección, si es necesario, con dos decimales.

51. La tortuga contra la liebre: La velocidad de la liebre viene dada por la función sinusoidal $H(t) = 1 - \cos((\pi t)/2)$ mientras que la velocidad de la tortuga es $T(t) = (1/2)\tan^{-1}(t/4)$, donde t es el tiempo medido en horas y la velocidad se mide en millas por hora. Halle el área entre las curvas del tiempo $t = 0$ la primera vez después de una hora cuando la tortuga y la liebre viajan a la misma velocidad. ¿Qué representa? Utilice una calculadora para determinar los puntos de intersección, si es necesario, con una precisión de tres decimales.

52. La tortuga contra la liebre: La velocidad de la liebre viene dada por la función sinusoidal $H(t) = (1/2) - (1/2)\cos(2\pi t)$ mientras que la velocidad de la tortuga es $T(t) = \sqrt{t}$, donde t es el tiempo medido en horas y la velocidad se mide en kilómetros por hora. Si la carrera termina en 1 hora, ¿quién ganó la carrera y por qué diferencia? Utilice una calculadora para determinar los puntos de intersección, si es necesario, con una precisión de tres decimales.

En los siguientes ejercicios, halle el área entre las curvas integrando con respecto a x y luego con respecto a y. ¿Es un método más fácil que el otro? ¿Obtiene la misma respuesta?

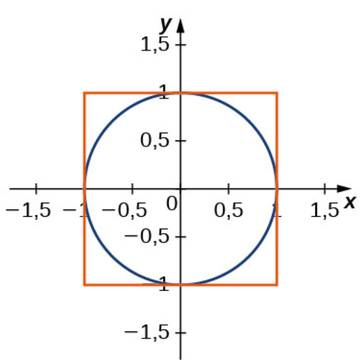
53. $y = x^2 + 2x + 1$ y $y = -x^2 - 3x + 4$

54. $y = x^4$ y $x = y^5$

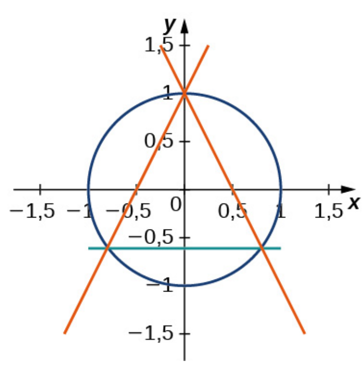
55. $x = y^2 - 2$ y $x = 2y$

En los siguientes ejercicios, resuelva utilizando el cálculo y luego compruebe su respuesta con la geometría.

56. Determine las ecuaciones de los lados del cuadrado que toca la circunferencia unitaria por sus cuatro lados, como se ve en la siguiente figura. Halle el área entre el perímetro de este cuadrado y el círculo unitario. ¿Hay alguna otra forma de resolver esto sin usar el cálculo?



57. Halla el área entre el perímetro del círculo unitario y el triángulo creado a partir de $y = 2x + 1$, $y = 1 - 2x$ como $y = -\frac{3}{5}$, como se ve en la siguiente figura. ¿Hay alguna manera de resolver esto sin usar el cálculo?



2.2 Determinar los volúmenes mediante el corte

Objetivos de aprendizaje

2.2.1 Determinar el volumen de un sólido integrando una sección transversal (método de las rebanadas).
2.2.2 Hallar el volumen de un sólido de revolución utilizando el método de los discos.
2.2.3 Halle el volumen de un sólido de revolución con una cavidad utilizando el método de las arandelas.

En la sección anterior, utilizamos las integrales definidas para hallar el área entre dos curvas. En esta sección, utilizaremos las integrales definidas para hallar los volúmenes de los sólidos tridimensionales. Consideraremos tres enfoques —rebanadas, discos y arandelas— para hallar estos volúmenes en función de las características del sólido.

El volumen y el método de las rebanadas

Así como el área es la medida numérica de una región bidimensional, el volumen es la medida numérica de un sólido tridimensional. La mayoría de nosotros ha calculado los volúmenes de los sólidos utilizando fórmulas geométricas básicas. El volumen de un sólido rectangular, por ejemplo, puede calcularse multiplicando la longitud, la anchura y la altura $V = lwh$. Las fórmulas del volumen de una esfera $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$, un cono $\left(V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$, y una pirámide $\left(V = \frac{1}{3}Ah\right)$ también se ha introducido. Aunque algunas de estas fórmulas se derivaron utilizando únicamente la geometría, todas ellas pueden obtenerse utilizando la integración.

También podemos calcular el volumen de un cilindro. Aunque la mayoría de nosotros piensa que un cilindro tiene una base circular, como una lata de sopa o una barra de metal, en matemáticas la palabra *cilindro* tiene un significado más general. Para hablar de los cilindros en ese contexto más general, antes tenemos que definir algunos términos.

Definimos la **sección transversal** de un sólido como la intersección de un plano con el sólido. Se define un *cilindro* como cualquier sólido que se genera trasladando una región plana a lo largo de una línea perpendicular a la región, denominada *eje* del cilindro. Así, todas las secciones transversales perpendiculares al eje de un cilindro son idénticas. El sólido mostrado en la Figura 2.11 es un ejemplo de cilindro con base no circular. Entonces, para calcular el volumen de un cilindro basta con multiplicar el área de la sección transversal por la altura del cilindro: $V = A.h$. En el caso de un cilindro circular recto (como una lata de sopa), esto se convierte en $V = \pi r^2 h$.

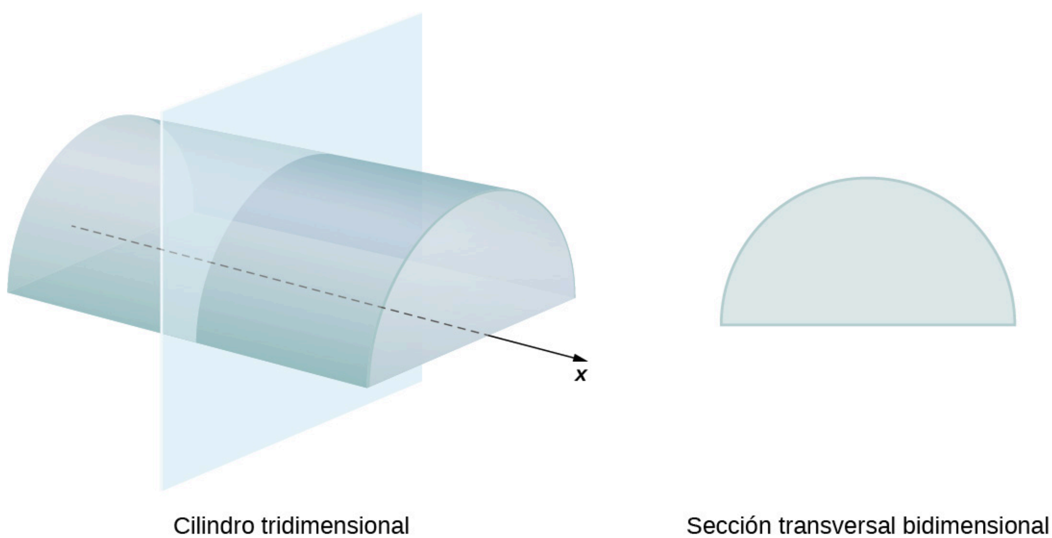


Figura 2.11 Cada sección transversal de un cilindro concreto es idéntica a las demás.

Si un sólido no tiene una sección transversal constante (y no es uno de los otros sólidos básicos), puede que no tengamos una fórmula para su volumen. En ese caso, podemos utilizar una integral definida para calcular el volumen de ese sólido. Para ello, rebanamos el sólido, estimamos el volumen de cada rebanada y luego sumamos esos volúmenes estimados. Las rebanadas deben ser todas paralelas entre sí, y cuando las juntamos todas, deberíamos obtener el sólido completo. Consideremos, por ejemplo, el sólido S que se muestra en la Figura 2.12, que se extiende a lo largo del eje x.

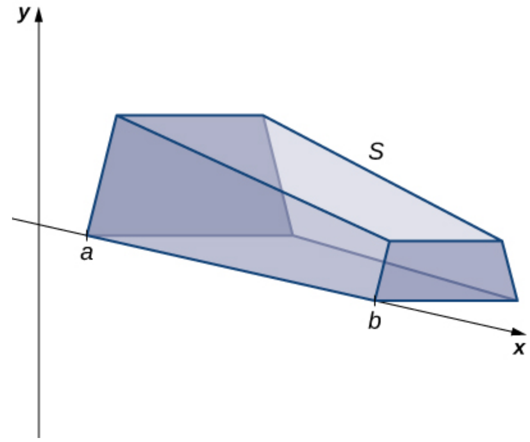


Figura 2.12 Sólido con una sección transversal variable.

Queremos dividir S en rodajas perpendiculares al eje$x$. Como veremos más adelante en el capítulo, puede haber ocasiones en las que queramos cortar el sólido en alguna otra dirección, por ejemplo, en cortes perpendiculares al eje y. La elección de cómo cortar el sólido es muy importante. Si nos equivocamos, los cálculos pueden ser bastante complicados. Más adelante en este capítulo, examinaremos algunas de estas situaciones en detalle y veremos cómo elegir la dirección para cortar el sólido. Sin embargo, a efectos de esta sección, utilizamos cortes perpendiculares al eje x.

Ya que el área de la sección transversal no es constante, suponemos que $A\,(x)$ representa el área de la sección transversal en el punto x. Ahora supongamos que $P = \{x_0, x_1 \ldots, X_n\}$ es una partición regular de $[a, b]$, y para $i = 1, 2, \ldots n$, supongamos que S_i representan la porción de S que se extiende desde x_{i-1} para x_i. La siguiente figura muestra el sólido cortado con n n $= 3$.

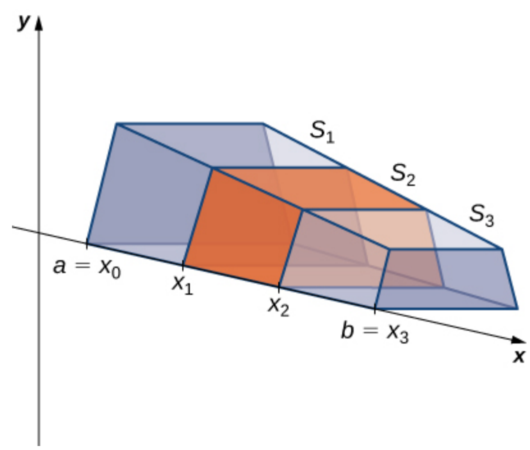


Figura 2.13 El sólido S se dividió en tres cortes perpendiculares al eje$x$.

Por último, para $i = 1, 2, \ldots n$, supongamos que x_i^* es un punto arbitrario en $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Entonces el volumen de la rebanada S_i se puede estimar mediante $V\,(S_i) \approx A\left(x_i^*\right)\Delta x$. Sumando estas aproximaciones, vemos que el volumen de todo el sólido S puede aproximarse por

$$V\,(S) \approx \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

A estas alturas, podemos reconocer esto como una suma de Riemann, y nuestro siguiente paso es tomar el límite como $n \to \infty$. Entonces tenemos

$$V\,(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right)\Delta x = \int_a^b A\,(x)\,dx.$$

La técnica que acabamos de describir se llama **método de las rebanadas**. Para aplicarlo, utilizamos la siguiente estrategia.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Búsqueda de volúmenes por el método de las rebanadas

1. Examine el sólido y determine la forma de una sección transversal del mismo. A menudo es útil hacer un dibujo si no lo tiene.
2. Determine una fórmula para el área de la sección transversal.
3. Integre la fórmula del área sobre el intervalo apropiado para obtener el volumen.

Recordemos que en esta sección suponemos que los cortes son perpendiculares al eje$x$. Por lo tanto, la fórmula del área está en términos de x y los límites de integración se encuentran en el eje x. Sin embargo, la estrategia de resolución de problemas mostrada aquí es válida independientemente de cómo decidamos cortar el sólido.

EJEMPLO 2.6

Derivación de la fórmula del volumen de una pirámide

Sabemos por la geometría que la fórmula del volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3}Ah$. Si la pirámide tiene una base cuadrada, esto se convierte en $V = \frac{1}{3}a^2h$, donde a indica la longitud de un lado de la base. Utilicemos el método de las rebanadas para derivar esta fórmula.

Solución

Queremos aplicar ese método a una pirámide de base cuadrada. Para establecer la integral, considere la pirámide mostrada en la Figura 2.14, orientada a lo largo del eje x.

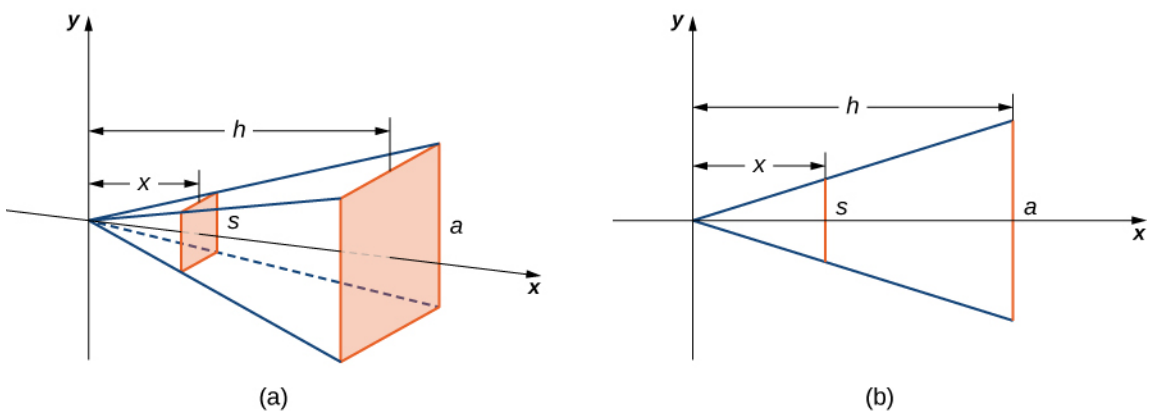


Figura 2.14 (a) Una pirámide de base cuadrada está orientada a lo largo del eje x. (b) Hay una vista bidimensional de la pirámide desde un lado.

Primero queremos determinar la forma de una sección transversal de la pirámide. Sabemos que la base es un cuadrado, por lo que las secciones transversales también son cuadradas (paso 1). Ahora queremos determinar una fórmula para el área de uno de estos cuadrados de la sección transversal. Al observar la Figura 2.14(b), y usando una proporción, ya que son triángulos similares, tenemos

$$\frac{s}{a} = \frac{x}{h} \text{ o } s = \frac{ax}{h}.$$

Por lo tanto, el área de uno de los cuadrados del corte transversal es

$$A(x) = s^2 = \left(\frac{ax}{h}\right)^2 \text{(paso 2)}.$$

Entonces encontramos el volumen de la pirámide integrando desde 0 para h (paso 3):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x)\,dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx \\ &= \left[\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\right]\Big|_0^h = \frac{1}{3}a^2 h. \end{aligned}$$

Esta es la fórmula que buscábamos.

2.6 Utilice el método de las rebanadas para obtener la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para el volumen de un cono circular.

Sólidos de revolución

Si una región en un plano se hace girar alrededor de una línea en ese plano, el sólido resultante se llama **sólido de revolución**, como se muestra en la siguiente figura.

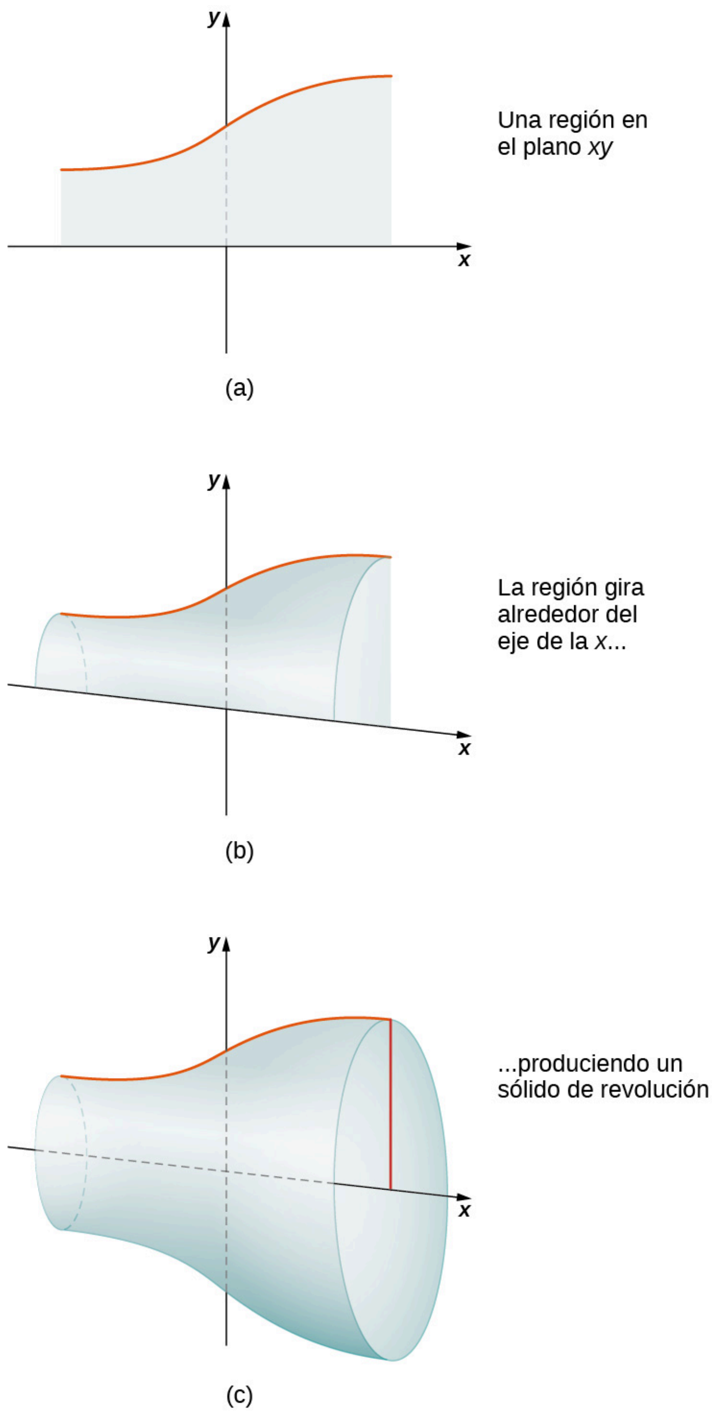


Figura 2.15 (a) Esta es la región que gira alrededor del eje *x*. (b) A medida que la región comienza a girar alrededor del eje, forma un sólido de revolución. (c) Este es el sólido que resulta cuando se completa la revolución.

Los sólidos de revolución son comunes en aplicaciones mecánicas, como las piezas de máquinas producidas por un torno. Dedicaremos el resto de esta sección a estudiar este tipo de sólidos. El siguiente ejemplo utiliza el método de las rebanadas para calcular el volumen de un sólido de revolución.

MEDIOS

Utilice una calculadora de integrales (http://www.openstax.org/l/20_IntCalc2) en línea para saber más.

EJEMPLO 2.7

Uso del método de las rebanadas para hallar el volumen de un sólido de revolución

Utilice el método de las rebanadas para hallar el volumen del sólido de revolución delimitado por las gráficos de $f(x) = x^2 - 4x + 5, x = 1,$ y $x = 4,$ y con rotación alrededor del eje$x$.

Solución

Utilizando la estrategia de resolución de problemas, primero dibujamos el gráfico de la función cuadrática sobre el intervalo $[1, 4]$ como se muestra en la siguiente figura.

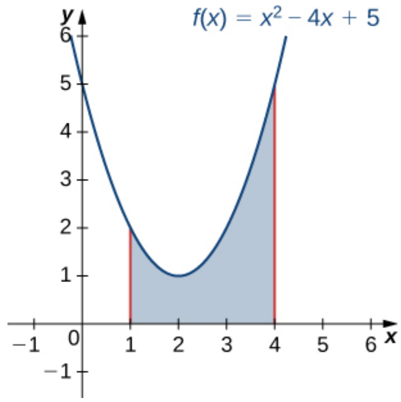


Figura 2.16 Una región utilizada para producir un sólido de revolución.

A continuación, gire la región alrededor del eje *x*, como se muestra en la siguiente figura.

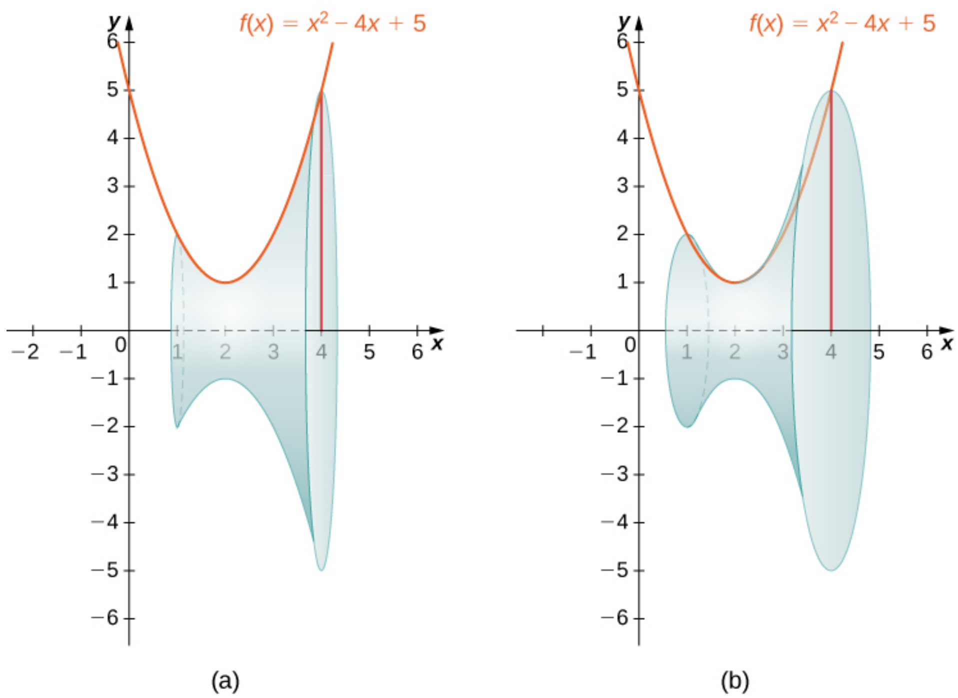


Figura 2.17 Dos vistas, (a) y (b), del sólido de revolución producido al girar la región en la Figura 2.16 alrededor del x.

Como el sólido se formó al girar la región alrededor del eje x−eje, las secciones transversales son círculos (paso 1). El área de la sección transversal, entonces, es el área de un círculo, y el radio del círculo viene dado por $f(x)$. Utilice la fórmula del área del círculo:

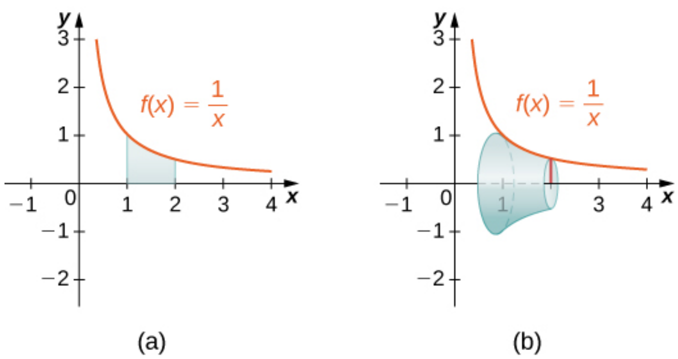
$$A(x) = \pi r^2 = \pi[f(x)]^2 = \pi\left(x^2 - 4x + 5\right)^2 \text{ (paso 2).}$$

El volumen, entonces, es (paso 3)

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_1^4 \pi\left(x^2 - 4x + 5\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \left(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{26x^3}{3} - 20x^2 + 25x \right)\Bigg|_1^4 = \frac{78}{5}\pi. \end{aligned}$$

El volumen es $78\pi/5$.

2.7 Utilice el método de las rebanadas para hallar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región comprendida entre el gráfico de la función $f(x) = 1/x$ y el eje x en el intervalo $[1, 2]$ alrededor del eje x. Vea la siguiente figura.



El método del disco

Cuando utilizamos el método de las rebanadas con sólidos de revolución, se suele denominar **método de los discos** porque los cortes utilizados para sobre aproximar el volumen de esos sólidos son discos. Para ver esto, considere el sólido de revolución generado al girar la región entre el gráfico de la función $f(x) = (x-1)^2 + 1$ y la intersección en x en el intervalo $[-1, 3]$ alrededor del eje x. El gráfico de la función y un disco representativo se muestran en la Figura 2.18(a) y (b). La región de revolución y el sólido resultante se muestran en la Figura 2.18(c) y (d).

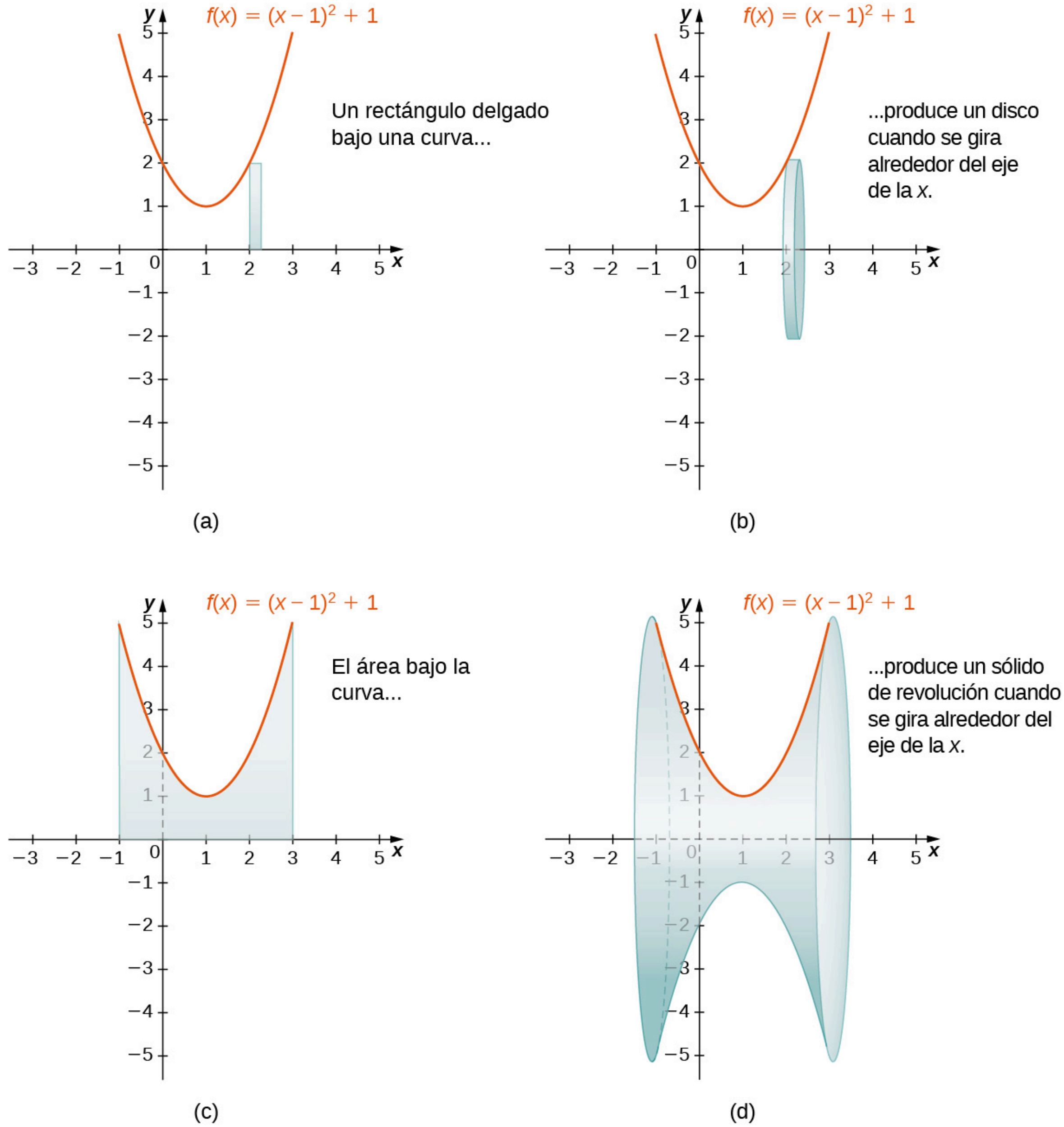


Figura 2.18 (a) Un rectángulo delgado para aproximar el área bajo una curva. (b) Un disco representativo formado al girar el rectángulo alrededor del x. (c) La región bajo la curva gira en torno del x, dando como resultado (d) el sólido de revolución.

Ya utilizamos el desarrollo formal de la suma de Riemann de la fórmula del volumen al desarrollar el método de las rebanadas. Sabemos que

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

La única diferencia con el método de los discos es que conocemos de antemano la fórmula del área de la sección transversal, que es el área de un círculo. Esto da la siguiente regla.

Regla: el método del disco

Supongamos que $f(x)$ es continua y no negativa. Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x)$, abajo por el eje $x\text{−eje}$, a la izquierda por la línea $x = a$, y a la derecha por la línea $x = b$. Entonces, el volumen del

sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje x viene dada por

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx. \tag{2.3}$$

El volumen del sólido que hemos estudiado (Figura 2.18) viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \\ &= \int_{-1}^{3} \pi\left[(x-1)^2+1\right]^2 dx = \pi \int_{-1}^{3} \left[(x-1)^4+2(x-1)^2+1\right] dx \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{5}(x-1)^5+\tfrac{2}{3}(x-1)^3+x\right]\Big|_{-1}^{3} = \pi\left[\left(\tfrac{32}{5}+\tfrac{16}{3}+3\right)-\left(-\tfrac{32}{5}-\tfrac{16}{3}-1\right)\right] = \tfrac{412\pi}{15} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 2.8

Uso del método de los discos para encontrar el volumen de un sólido de revolución 1

Utilice el método del disco para calcular el volumen del sólido de revolución generado que se forma al girar la región entre el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje x.

Solución

Los gráficos de la función y del sólido de revolución se muestran en la siguiente figura.

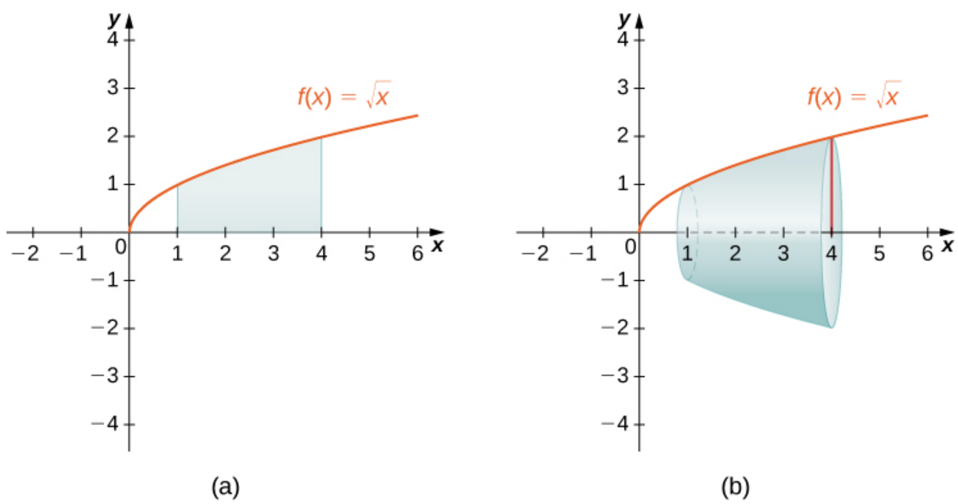


Figura 2.19 (a) La función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$. b) El sólido de revolución obtenido al girar la región bajo el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x.

Tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \int_1^4 x\, dx \\ &= \tfrac{\pi}{2} x^2\Big|_1^4 = \tfrac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

El volumen es $(15\pi)/2$ unidades^3.

2.8 Utilice el método del disco para calcular el volumen del sólido de revolución generado que se forma al girar la región entre el gráfico de $f(x) = \sqrt{4-x}$ y el eje x en el intervalo $[0, 4]$ alrededor del eje x.

Hasta ahora, todos nuestros ejemplos se referían a regiones que giraban en torno al eje x−eje, pero podemos generar un sólido de revolución haciendo girar una región plana alrededor de cualquier línea horizontal o vertical. En el siguiente ejemplo, observamos un sólido de revolución que se ha generado girando una región alrededor del eje y. La mecánica del método de los discos es casi la misma que cuando el eje x es el eje de revolución, pero expresamos la función en términos de y y también integramos con respecto a y. Esto se resume en la siguiente regla.

Regla: método de los discos para sólidos de revolución alrededor del eje y

Supongamos que $g(y)$ es continua y no negativa. Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y)$, a la izquierda por el eje y−eje, abajo por la línea $y = c$, y arriba por la línea $y = d$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje y viene dada por

$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2 \, dy. \qquad (2.4)$$

El siguiente ejemplo muestra cómo funciona esta regla en la práctica.

EJEMPLO 2.9

Uso del método de los discos para encontrar el volumen de un sólido de revolución 2

Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de $g(y) = \sqrt{4 - y}$ y la intersección en y sobre el y intervalo $[0, 4]$. Utilice el método de los discos para encontrar el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R alrededor del eje y.

Solución

La Figura 2.20 muestra la función y un disco representativo que puede utilizarse para estimar el volumen. Observe que como estamos girando la función alrededor del eje y−eje, los discos son horizontales en vez de verticales.

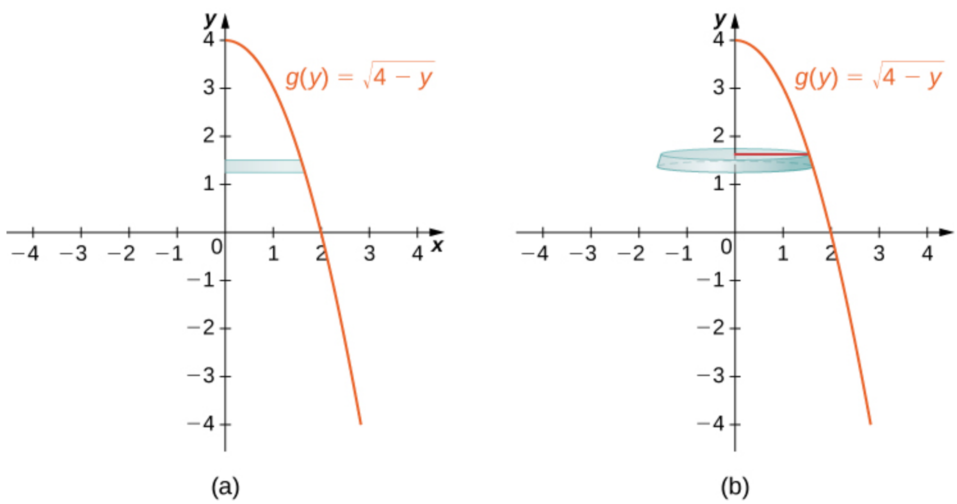


Figura 2.20 (a) Se muestra un rectángulo delgado entre la curva de la función $g(y) = \sqrt{4 - y}$ y la intersección en y. (b) El rectángulo forma un disco representativo después de la revolución alrededor del eje y.

La región que debe girar y el sólido completo de revolución se representan en la siguiente figura.

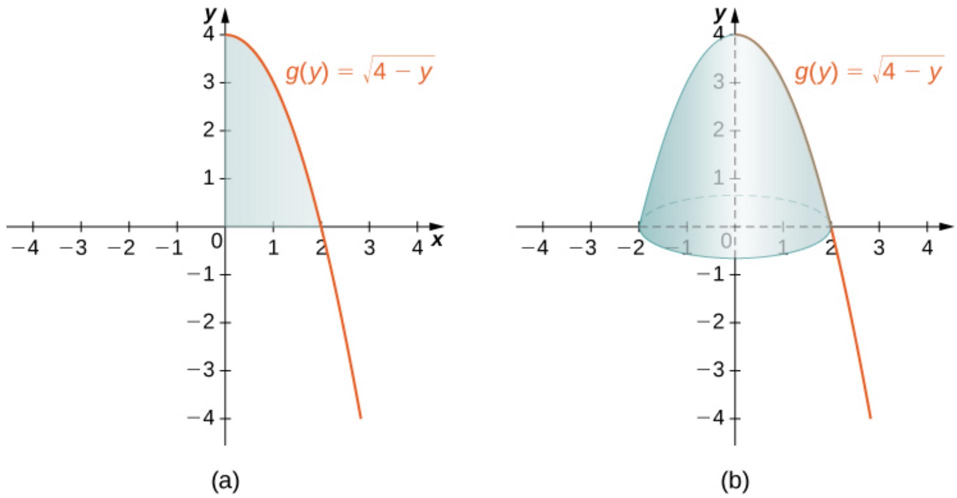


Figura 2.21 (a) La región a la izquierda de la función $g(y) = \sqrt{4 - y}$ sobre el y intervalo $[0, 4]$. b) El sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor del eje y.

Para encontrar el volumen, integramos con respecto a y. Obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{4 - y}\right]^2 dy = \pi \int_0^4 (4 - y)\, dy \\ &= \pi\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^4 = 8\pi. \end{aligned}$$

El volumen es 8π unidades^3.

2.9 Utilice el método del disco para calcular el volumen del sólido de revolución generado que se forma al girar la región entre el gráfico de $g(y) = y$ y la intersección en y en el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje y.

El método de arandelas

Algunos sólidos de revolución tienen cavidades en el centro; no son sólidos hasta el eje de revolución. A veces, esto es solo el resultado de la forma de la región de revolución con respecto al eje de revolución. En otros casos, las cavidades surgen cuando la región de revolución se define como la región entre los gráficos de dos funciones. Una tercera forma de que esto ocurra es cuando se selecciona un eje de revolución distinto al eje x o y.

Cuando el sólido de revolución tiene una cavidad en el centro, las rodajas utilizadas para aproximar el volumen no son discos, sino arandelas (discos con agujeros en el centro). Por ejemplo, consideremos la región delimitada arriba por el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 1$ en el intervalo $[1, 4]$. Cuando esta región gira en torno al eje x−eje, el resultado es un sólido con una cavidad en el centro, y las rodajas son arandelas. El gráfico de la función y una arandela representativa se muestran en la Figura 2.22(a) y (b). La región de revolución y el sólido resultante se muestran en la Figura 2.22(c) y (d).

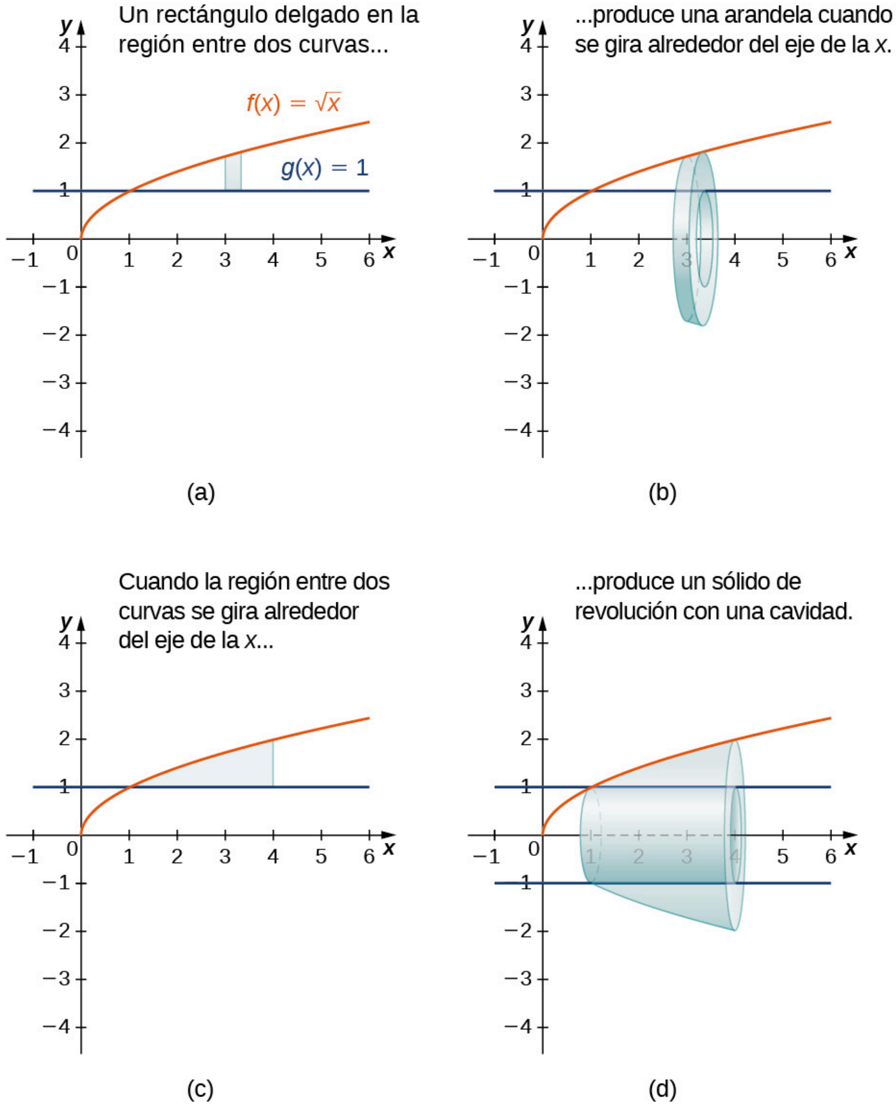


Figura 2.22 (a) Un rectángulo delgado en la región entre dos curvas. (b) Un disco representativo que se forma al girar el rectángulo alrededor del eje x. (c) La región entre las curvas sobre el intervalo dado. (d) El sólido de revolución resultante.

El área de la sección transversal, entonces, es el área del círculo exterior menos el área del círculo interior. En este caso,

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 - \pi(1)^2 = \pi(x - 1).$$

Entonces el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_1^4 \pi(x - 1)\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - x\right]\Big|_1^4 = \frac{9}{2}\pi \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

Generalizando este proceso se obtiene el **método de las arandelas**.

Regla: el método de las arandelas

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y no negativas tales que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$. Supongamos que R denotan la región delimitada por el gráfico de $f(x)$, abajo por el gráfico de $g(x)$, a la izquierda por la línea $x = a$, y a la derecha por la línea $x = b$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R

alrededor del eje x viene dada por

$$V = \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx. \tag{2.5}$$

EJEMPLO 2.10

Utilizar el método de las arandelas

Calcule el volumen de un sólido de revolución que se forma al girar la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x$ y abajo por el gráfico de $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje x.

Solución

Los gráficos de las funciones y el sólido de revolución se muestran en la siguiente figura.

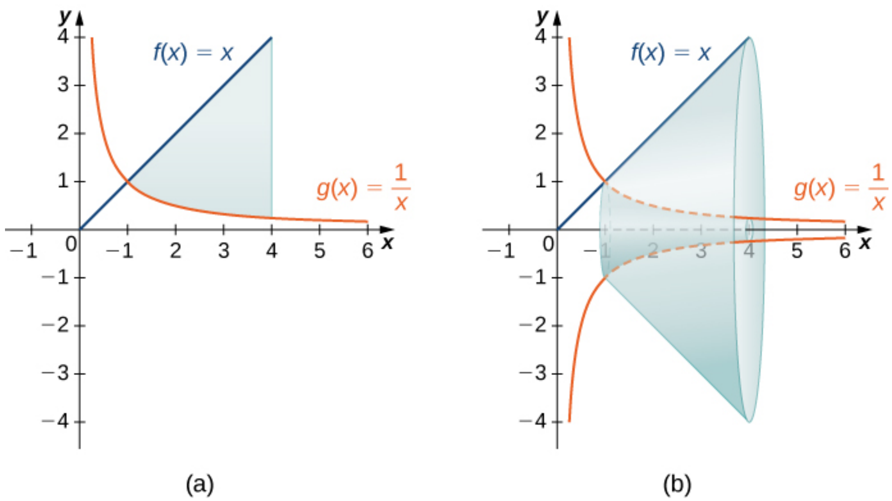


Figura 2.23 (a) La región entre los gráficos de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 4]$. (b) Al girar la región alrededor del eje x se genera un sólido de revolución con una cavidad en el centro.

Tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \\ &= \pi \int_1^4 \left[x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right] dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right]\Big|_1^4 = \frac{81\pi}{4} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

2.10 Halle el volumen de un sólido de revolución que se forma al girar la región delimitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$ alrededor del eje x.

Al igual que con el método de los discos, también podemos aplicar el método de las arandelas a los sólidos de revolución que resultan de girar una región alrededor del eje *y*. En este caso, se aplica la siguiente regla.

Regla: el método de las arandelas para sólidos de revolución alrededor del eje y

Supongamos que $u(y)$ y $v(y)$ son funciones continuas y no negativas tales que $v(y) \leq u(y)$ por $y \in [c, d]$. Supongamos que Q denota la región limitada a la derecha por el gráfico de $u(y)$, a la izquierda por el gráfico de $v(y)$, abajo por la línea $y = c$, y arriba por la línea $y = d$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje y viene dada por

$$V = \int_c^d \pi \left[(u(y))^2 - (v(y))^2 \right] dy.$$

En vez de ver un ejemplo del método de las arandelas con el eje y como eje de revolución, consideramos ahora un ejemplo en el que el eje de revolución es una línea distinta de uno de los dos ejes de coordenadas. Se aplica el mismo método general, pero es posible que tenga que visualizar cómo describir el área de la sección transversal del volumen.

EJEMPLO 2.11

El método de las arandelas con un eje de revolución diferente

Halle el volumen del sólido de revolución fque se forma al girar la región delimitada arriba por $f(x) = 4 - x$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 4]$ alrededor de la línea $y = –2$.

Solución

El gráfico de la región y el sólido de revolución se muestran en la siguiente figura.

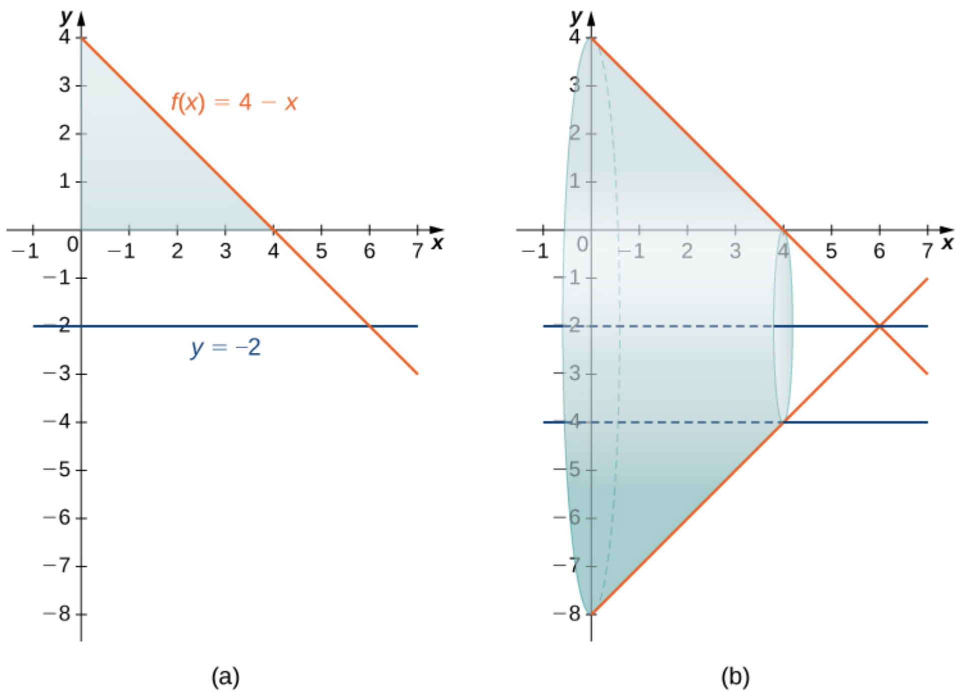


Figura 2.24 (a) La región entre el gráfico de la función $f(x) = 4 - x$ y el eje x en el intervalo $[0, 4]$. (b) Al girar la región alrededor de la línea $y = -2$ se obtiene un sólido de revolución con un agujero cilíndrico en su centro.

No podemos aplicar la fórmula del volumen a este problema directamente porque el eje de revolución no es uno de los ejes de coordenadas. Sin embargo, aún sabemos que el área de la sección transversal es el área del círculo exterior menos el área del círculo interior. Si observamos el gráfico de la función, vemos que el radio del círculo exterior viene dado por $f(x) + 2$, que se simplifica a

$$f(x) + 2 = (4 - x) + 2 = 6 - x.$$

El radio del círculo interior es $g(x) = 2$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi \left[(6 - x)^2 - (2)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_0^4 \left(x^2 - 12x + 32 \right) dx \;= \pi \left[\frac{x^3}{3} - 6x^2 + 32x \right] \Bigg|_0^4 = \frac{160\pi}{3} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

2.11 Calcule el volumen de un sólido de revolución que se forma al girar la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x + 2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 3]$ alrededor de la línea $y = -1$.

SECCIÓN 2.2 EJERCICIOS

58. Deduzca la fórmula del volumen de una esfera utilizando el método de las rebanadas.

59. Utilice el método de las rebanadas para obtener la fórmula del volumen de un cono.

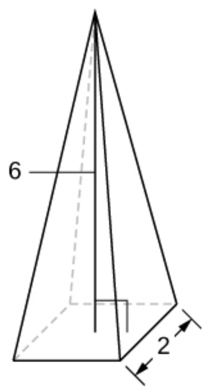
60. Utilice el método de las rebanadas para obtener la fórmula del volumen de un tetraedro de lado a.

61. Utilice el método de los discos para obtener la fórmula del volumen de un cilindro trapezoidal.

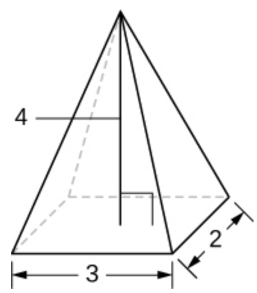
62. Explique cuándo utilizaría el método de los discos en vez del método de las arandelas. ¿Cuándo son intercambiables?

En los siguientes ejercicios, dibuje una rebanada típica y halle el volumen utilizando el método de las rebanadas para el volumen dado.

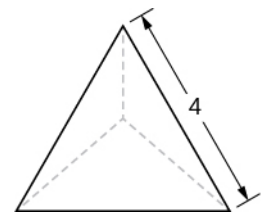
63. Pirámide con altura de 6 unidades y base cuadrada de lado de 2 unidades, como la que se muestra aquí.



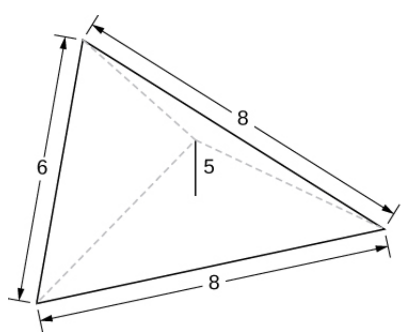
64. Una pirámide con altura de 4 unidades y base rectangular con longitud de 2 unidades y anchura de 3 unidades, como se muestra aquí.



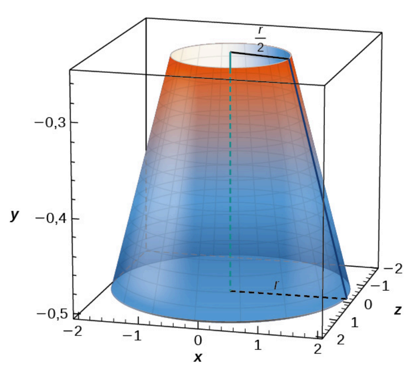
65. Tetraedro con un lado de la base de 4 unidades, como se ve aquí.



66. Pirámide con altura de 5 unidades, y una base triangular isósceles con longitudes de 6 y 8 unidades, como se ve aquí.



67. Un cono de radio r y altura h tiene un cono de radio más pequeño $r/2$ y altura $h/2$ retirado de la parte superior, como se ve aquí. El sólido resultante se denomina *tronco*.



En los siguientes ejercicios, dibuje un contorno del sólido y halle el volumen utilizando el método de las rebanadas.

68. La base es un círculo de radio a. Los cortes perpendiculares a la base son cuadrados.

69. La base es un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, y $(0, 1)$. Los cortes perpendiculares al eje *x* son semicírculos.

70. La base es la región bajo la parábola $y = 1 - x^2$ en el primer cuadrante. Los cortes perpendiculares al plano *xy* y paralelos al eje y son cuadrados.

71. La base es la región bajo la parábola $y = 1 - x^2$ y por encima del plano x. Las rebanadas perpendiculares al eje y son cuadradas.

72. La base es la región delimitada por $y = x^2$ y $y = 9$. Las rodajas perpendiculares al eje *x* son triángulos isósceles rectos. La intersección de uno de estos cortes con la base es el cateto del triángulo.

73. La base es el área entre $y = x$ como $y = x^2$. Los cortes perpendiculares al eje *x* son semicírculos.

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, utilice el método de los discos para encontrar el volumen cuando la región gira alrededor del eje x.

74. $x + y = 8, x = 0,\ \text{y}\ y = 0$

75. $y = 2x^2, x = 0, x = 4,\ \text{y}\ y = 0$

76. $y = e^x + 1, x = 0, x = 1,\ \text{y}\ y = 0$

77. $y = x^4, x = 0,\ \text{y}\ y = 1$

78. $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 4,\ \text{y}\ y = 0$

79. $y = \text{sen}\ x, y = \cos x,\ \text{y}\ x = 0$

80. $y = \frac{1}{x}, x = 2,\ \text{y}\ y = 3$

81. $x^2 - y^2 = 9\ \text{y}\ x + y = 9, y = 0\ \text{y}\ x = 0$

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, halle el volumen cuando la región gira alrededor del eje y.

82. $y = 4 - \frac{1}{2}x, x = 0,\ \text{y}\ y = 0$

83. $y = 2x^3, x = 0, x = 1,\ \text{y}\ y = 0$

84. $y = 3x^2, x = 0,\ \text{y}\ y = 3$

85. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0,\ \text{y}\ x = 0$

86. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, x = 0,\ \text{y}\ x = 3$

87. $x = \sec(y)\ \text{y}\ y = \frac{\pi}{4}, y = 0\ \text{y}\ x = 0$

88. $y = \frac{1}{x+1}, x = 0,\ \text{y}\ x = 2$

89. $y = 4 - x, y = x,\ \text{y}\ x = 0$

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, halle el volumen cuando la región gira alrededor del eje x.

90. $y = x + 2, y = x + 6, x = 0,\ \text{y}\ x = 5$

91. $y = x^2\ \text{y}\ y = x + 2$

92. $x^2 = y^3\ \text{y}\ x^3 = y^2$

93. $y = 4 - x^2\ \text{y}\ y = 2 - x$

94. **[T]** $y = \cos x, y = e^{-x}, x = 0,\ \text{y}\ x = 1{,}2927$

95. $y = \sqrt{x}\ \text{y}\ y = x^2$

96. $y = \text{sen}\ x, y = 5\ \text{sen}\ x, x = 0\ \text{y}\ x = \pi$

97. $y = \sqrt{1 + x^2}\ \text{y}\ y = \sqrt{4 - x^2}$

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, utilice el método de las arandelas para hallar el volumen cuando la región gira alrededor del eje y.

98. $y = \sqrt{x}, x = 4,$ y $y = 0$

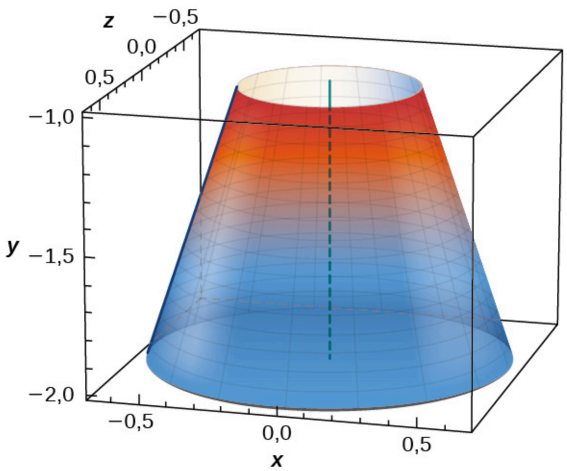
99. $y = x + 2, y = 2x - 1,$ y $x = 0$

100. $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = x^3$

101. $x = e^{2y}, x = y^2, y = 0,$ y $y = \ln(2)$

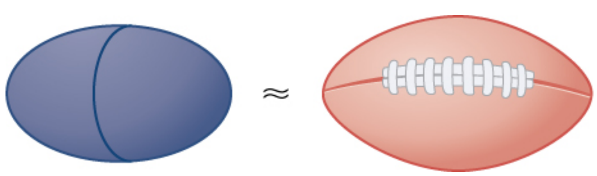
102. $x = \sqrt{9 - y^2}, x = e^{-y}, y = 0,$ y $y = 3$

103. Los envases de yogur pueden tener forma de tronco. Gire la línea $y = \frac{1}{m}x$ alrededor del eje y para hallar el volumen entre $y = a$ y $y = b$.



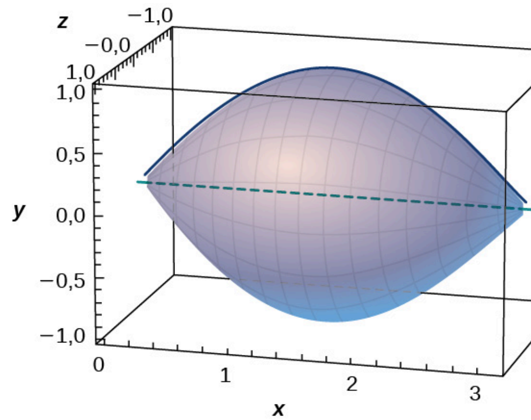


104. Rote la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ alrededor del eje x para aproximar el volumen de un balón de fútbol, como se ve aquí.

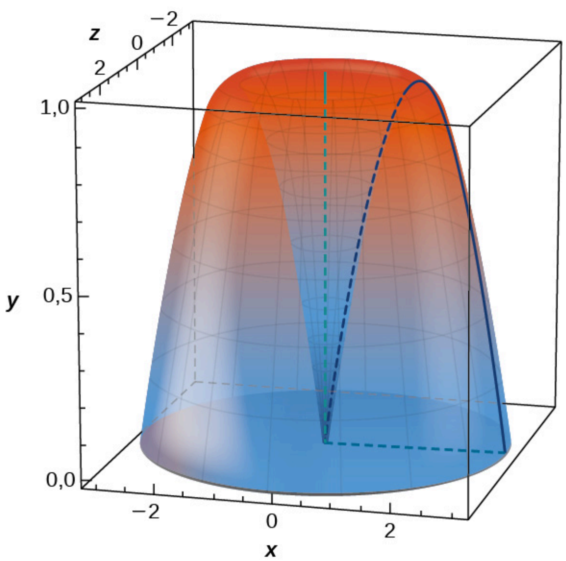


105. Rote la elipse $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$ alrededor del eje *y* para aproximar el volumen de un balón de fútbol.

106. Una mejor aproximación al volumen de un balón de fútbol viene dada por el sólido que se obtiene al girar $y = \text{sen}\, x$ alrededor del eje *x* de $x = 0$ hasta $x = \pi$. ¿Cuál es el volumen de esta aproximación del balón de fútbol, como se ve aquí?



107. ¿Cuál es el volumen del pastel en forma de anillo que se obtiene al girar $y = \text{sen}\, x$ alrededor del eje *y* de $x = 0$ hasta $x = \pi$?



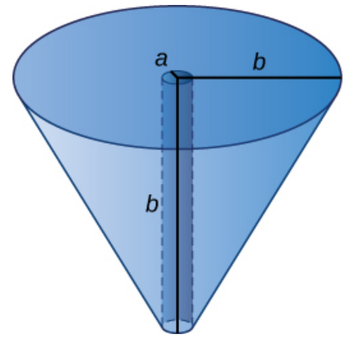


En los siguientes ejercicios, halle el volumen del sólido descrito.

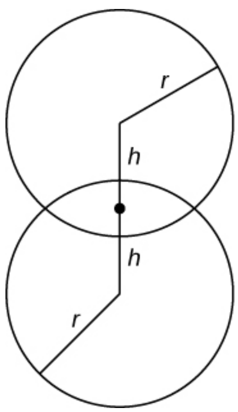
108. La base es la región entre $y = x$ como $y = x^2$. Los cortes perpendiculares al eje *x*son semicírculos.

109. La base es la región delimitada por la elipse genérica $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1.$ Los cortes perpendiculares al eje *x*son semicírculos.

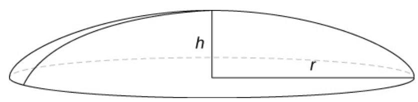
110. Perfore un agujero de radio a por el eje de un cono recto y a través de la base de radio b, como se ve aquí.



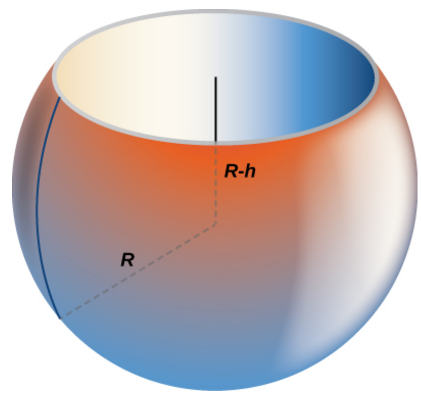
111. Halle el volumen común a dos esferas de radio r con centros que tienen $2h$ de separación, como se muestra aquí.



112. Halle el volumen de un casquete esférico de altura h y radio r donde $h < r$, como se ve aquí.



113. Halle el volumen de una esfera de radio R con un casquete de altura h retirado de la parte superior, como se ve aquí.



2.3 Volúmenes de revolución: capas cilíndricas

Objetivos de aprendizaje

2.3.1 Calcular el volumen de un sólido de revolución por el método de las capas cilíndricas.
2.3.2 Comparar los diferentes métodos para calcular un volumen de revolución.

En esta sección, examinaremos el método de las capas cilíndricas, el último método para hallar el volumen de un sólido de revolución. Podemos utilizar este método en los mismos tipos de sólidos que el método del disco o el método de las arandelas; sin embargo, con los métodos del disco y de las arandelas, integramos a lo largo del eje de coordenadas paralelo al eje de revolución. Con el método de las capas cilíndricas, integramos el eje de coordenadas *perpendicular* al eje de revolución. La posibilidad de elegir qué variable de integración utilizaremos puede ser una ventaja importante con funciones más complicadas. Además, la geometría específica del sólido, a veces, hace que el método de las capas cilíndricas sea más atractivo de usar que el método de las arandelas. En la última parte de esta sección, repasaremos todos los métodos para hallar el volumen que hemos estudiado y establecemos algunas pautas para ayudarlo a determinar qué método debe utilizar en una situación determinada.

El método de las capas cilíndricas

De nuevo, estamos trabajando con un sólido de revolución. Como antes, definimos una región R, delimitada por encima del gráfico de una función $y = f(x)$, abajo por el eje $x-$eje, y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente, como se muestra en la Figura 2.25(a). A continuación, hacemos girar esta región alrededor del eje *y*,

como se muestra en la Figura 2.25(b). Tenga en cuenta que esto es diferente de lo que hicimos anteriormente, cuando las regiones definidas en términos de funciones de x giraban en torno al eje x o a una línea paralela a él.

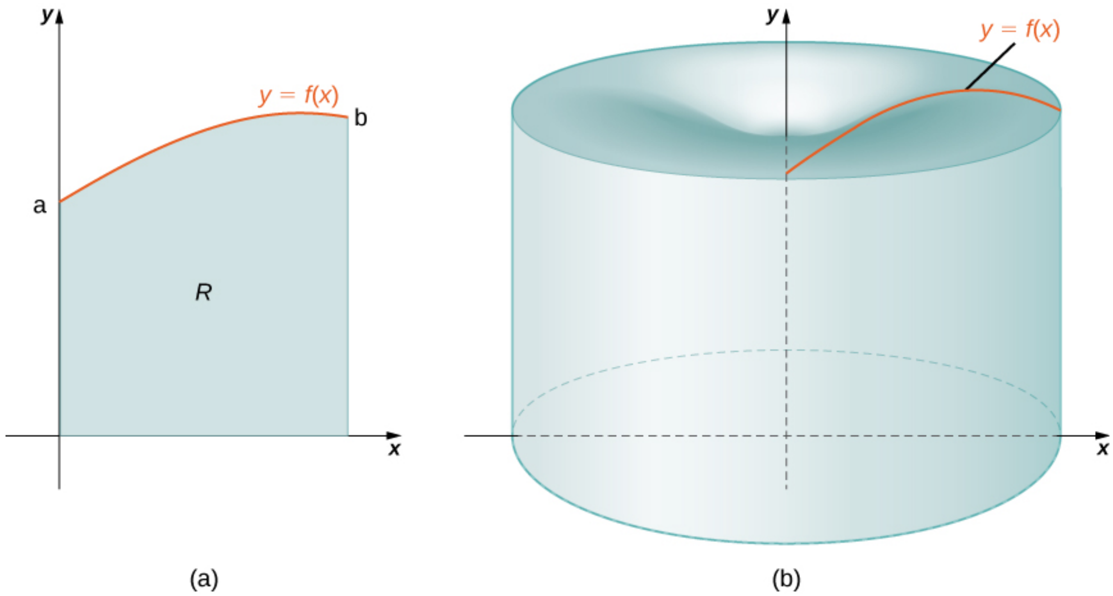


Figura 2.25 (a) Región delimitada por el gráfico de una función de x. b) El sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor del y.

Como ya hemos hecho muchas veces, dividimos el intervalo $[a, b]$ utilizando una partición normal, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y, para $i = 1, 2, \ldots, n$, elija un punto $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. Entonces, construya un rectángulo sobre el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ de altura $f(x_i^*)$ y la anchura Δx. En la Figura 2.26(a) se muestra un rectángulo representativo. Cuando ese rectángulo se gira alrededor del eje *y*, en vez de un disco o una arandela, obtenemos una capa cilíndrica, como se muestra en la siguiente figura.

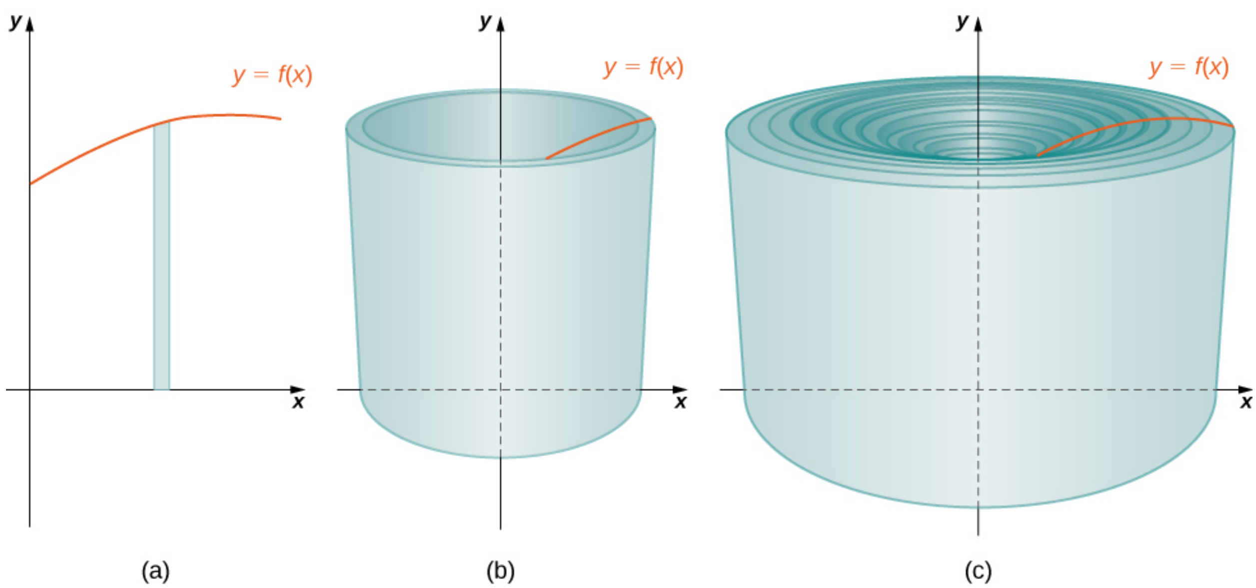


Figura 2.26 (a) Un rectángulo representativo. (b) Cuando este rectángulo gira alrededor del y, el resultado es una capa cilíndrica. (c) Cuando juntamos todas las capas, obtenemos una aproximación del sólido original.

Para calcular el volumen de esta capa, considere la Figura 2.27.

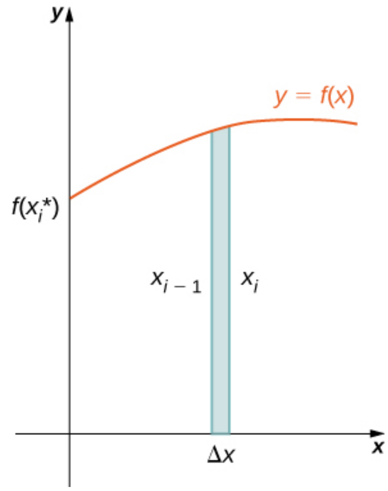


Figura 2.27 Calcular el volumen de la capa.

La capa es un cilindro, por lo que su volumen es el área de la sección transversal multiplicada por la altura del cilindro. Las secciones transversales son anulares (regiones en forma de anillo, esencialmente círculos con un agujero en el centro), con radio exterior x_i y radio interior x_{i-1}. Por lo tanto, el área de la sección transversal es $\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2$. La altura del cilindro es $f(x_i^*)$. Entonces el volumen de la capa es

$$\begin{aligned} V_{\text{capa}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, por lo que tenemos

$$V_{\text{capa}} = 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x.$$

Además, $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ es a la vez el punto medio del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ y el radio medio de la capa, y podemos aproximar esto por x_i^*. Entonces tenemos

$$V_{\text{capa}} \approx 2\pi f(x_i^*) x_i^* \Delta x.$$

Otra forma de pensar en esto es pensar en hacer un corte vertical en la capa y luego abrirla para formar una placa plana (Figura 2.28).

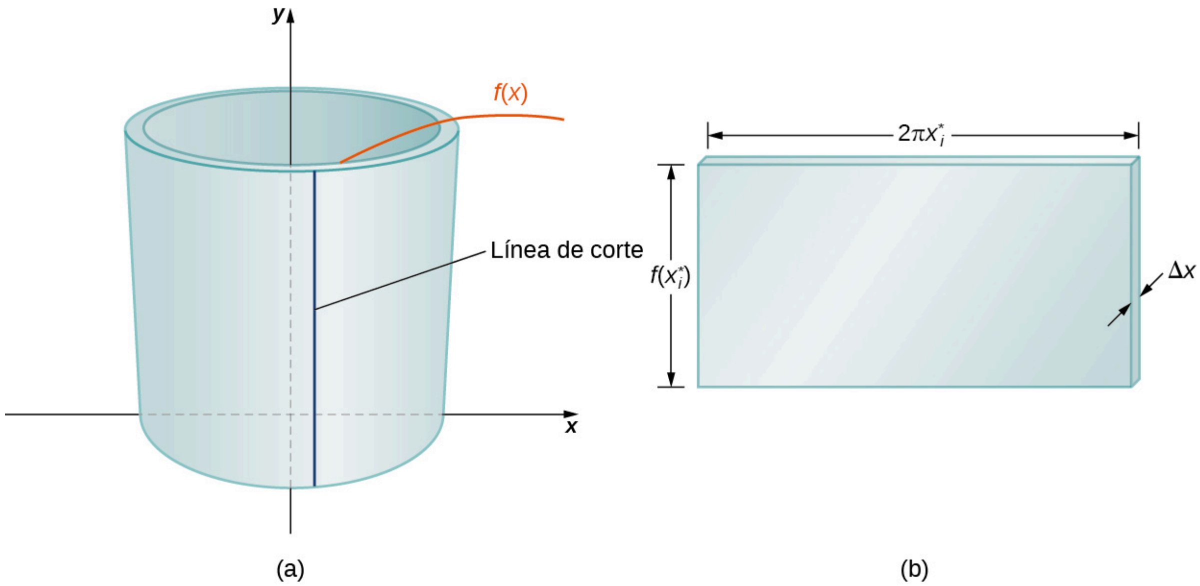


Figura 2.28 (a) Haga un corte vertical en una capa representativa. (b) Abra la capa para formar una placa plana.

En realidad, el radio exterior de la capa es mayor que el radio interior y, por tanto, el borde posterior de la placa sería ligeramente más largo que su borde anterior. Sin embargo, podemos aproximar la capa aplanada por una placa plana de altura $f(x_i^*)$, anchura $2\pi x_i^*$, y espesor Δx (Figura 2.28). El volumen de la capa, entonces, es aproximadamente el volumen de la placa plana. Multiplicando la altura, la anchura y la profundidad de la placa, obtenemos

$$V_{\text{capa}} \approx f(x_i^*)\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x,$$

que es la misma fórmula que teníamos antes.

Para calcular el volumen de todo el sólido, sumamos los volúmenes de todas las capas y obtenemos

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\left(2\pi x_i^* f(x_i^*)\Delta x\right).$$

Aquí se nos presenta otra suma de Riemann, esta vez para la función $2\pi x f(x)$. Tomando el límite como $n \to \infty$ nos da

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2\pi x_i^* f(x_i^*)\Delta x\right) = \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx.$$

Esto nos lleva a la siguiente regla para el **método de las capas cilíndricas.**

Regla: el método de las capas cilíndricas

Supongamos que $f(x)$ es continua y no negativa. Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x)$, abajo por el eje x, a la izquierda por la línea $x = a$, y a la derecha por la línea $x = b$. Entonces el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R en torno al eje y viene dado por

$$V = \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx. \tag{2.6}$$

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2.12

El método de las capas cilíndricas 1

Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = 1/x$ y abajo por el eje x en el intervalo $[1, 3]$. Calcule

el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

Solución

Primero debemos graficar la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

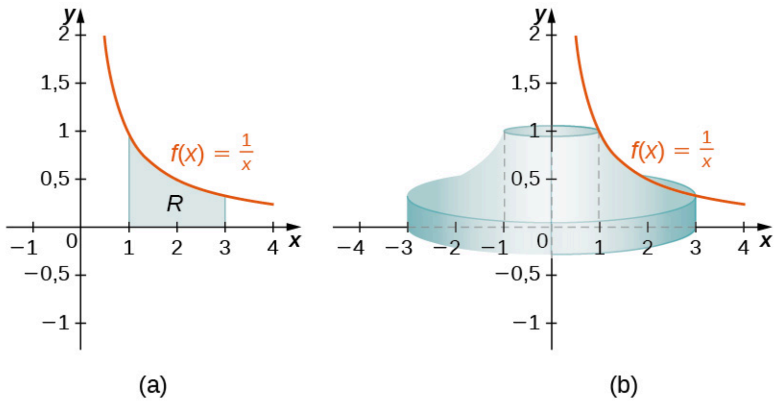


Figura 2.29 (a) La región R bajo el gráfico de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje y.

Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\pi x f(x))\, dx \\ &= \int_1^3 \left(2\pi x \left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\ &= \int_1^3 2\pi\, dx = 2\pi x|_1^3 = 4\pi \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

2.12 Definamos R como la región delimitada por el gráfico de $f(x) = x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[1, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

EJEMPLO 2.13

El método de las capas cilíndricas 2

Definamos R como la región delimitada por el gráfico de $f(x) = 2x – x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

Solución

Primer gráfico de la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

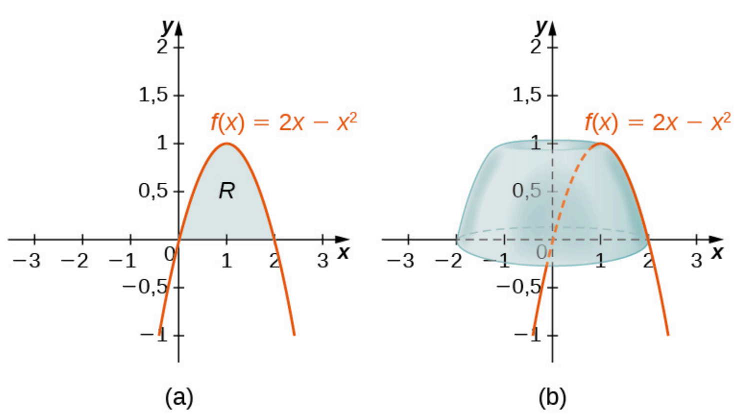


Figura 2.30 (a) La región R bajo el gráfico de $f(x) = 2x – x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. b) El volumen de revolución obtenido

al girar R alrededor del eje y.

Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx \\ &= \int_0^2 \left(2\pi x \left(2x - x^2\right)\right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

2.13 Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = 3x - x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

Al igual que con el método de los discos y el de las arandelas, también podemos aplicar el método de las capas cilíndricas a los sólidos de revolución que resultan, que giran alrededor del eje x, cuando queremos integrar con respecto a y. La regla análoga para este tipo de sólido se da aquí.

Regla: método de las capas cilíndricas para sólidos de revolución alrededor del eje x

Supongamos que $g(y)$ es continua y no negativa. Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y)$, a la izquierda por el eje y, abajo por la línea $y = c$, y arriba por la línea $y = d$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje x viene dada por

$$V = \int_c^d (2\pi y g(y))\,dy.$$

EJEMPLO 2.14

Método de las capas cilíndricas para un sólido que gira alrededor del eje x

Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y) = 2\sqrt{y}$ y a la izquierda por el eje y por $y \in [0, 4]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje de la x.

Solución

En primer lugar, debemos graficar la región Q y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

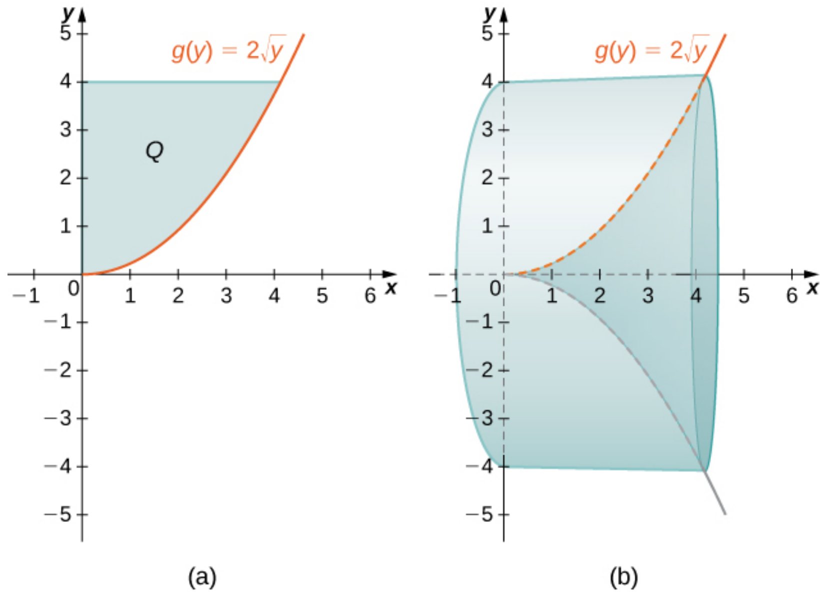


Figura 2.31 (a) La región Q a la izquierda de la función $g(y)$ en el intervalo $[0, 4]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar Q alrededor del eje x.

Rotule la región sombreada Q. Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d (2\pi y g(y))\, dy \\ &= \int_0^4 \left(2\pi y \left(2\sqrt{y}\right)\right) dy = 4\pi \int_0^4 y^{3/2}\, dy \\ &= 4\pi \left[\frac{2y^{5/2}}{5}\right]\Bigg|_0^4 = \frac{256\pi}{5} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

2.14 Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y) = 3/y$ y a la izquierda por el eje y por $y \in [1, 3]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje x.

En el siguiente ejemplo, observamos un sólido de revolución para el que el gráfico de una función gira en torno a una línea distinta de uno de los dos ejes de coordenadas. Para ello, es necesario volver a examinar el desarrollo del método de las capas cilíndricas. Recordemos que el volumen de una de las capas viene dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{capa}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Esto se basó en una capa con un radio exterior de x_i y un radio interior de x_{i-1} . Sin embargo, si giramos la región alrededor de una línea que no sea el eje y, tenemos un radio exterior e interior diferente. Supongamos, por ejemplo, que giramos la región alrededor de la línea $x = -k$, donde k es alguna constante positiva. Entonces, el radio exterior de la capa es $x_i + k$ y el radio interior es $x_{i-1} + k$. Sustituyendo estos términos en la expresión del volumen, vemos que cuando una región plana gira alrededor de la línea $x = -k$, el volumen de una capa viene dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{capa}} &= 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{(x_i + k) + (x_{i-1} + k)}{2}\right)\left((x_i + k) - \left(x_{i-1} + k\right)\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\left(\frac{x_i + x_{i-2}}{2}\right) + k\right)\Delta x. \end{aligned}$$

Como antes, observamos que $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ es el punto medio del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ y puede ser aproximado por x_i^*.

Entonces, el volumen aproximado de la capa es

$$V_{\text{capa}} \approx 2\pi \left(x_i^* + k\right) f(x_i^*)\Delta x.$$

El resto del desarrollo procede como antes, y vemos que

$$V = \int_a^b (2\pi\,(x+k)\,f(x))\,dx.$$

También podríamos girar la región alrededor de otras rectas horizontales o verticales, como una línea vertical en el semiplano derecho. En cada caso, la fórmula de volumen debe ajustarse en consecuencia. En concreto, el término x en la integral debe sustituirse por una expresión que represente el radio de una capa. Para ver cómo funciona, analice el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.15

Región de revolución que gira en torno a una línea

Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x$ y abajo por el eje x en el intervalo $[1, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la línea $x = -1$.

Solución

En primer lugar, grafique la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

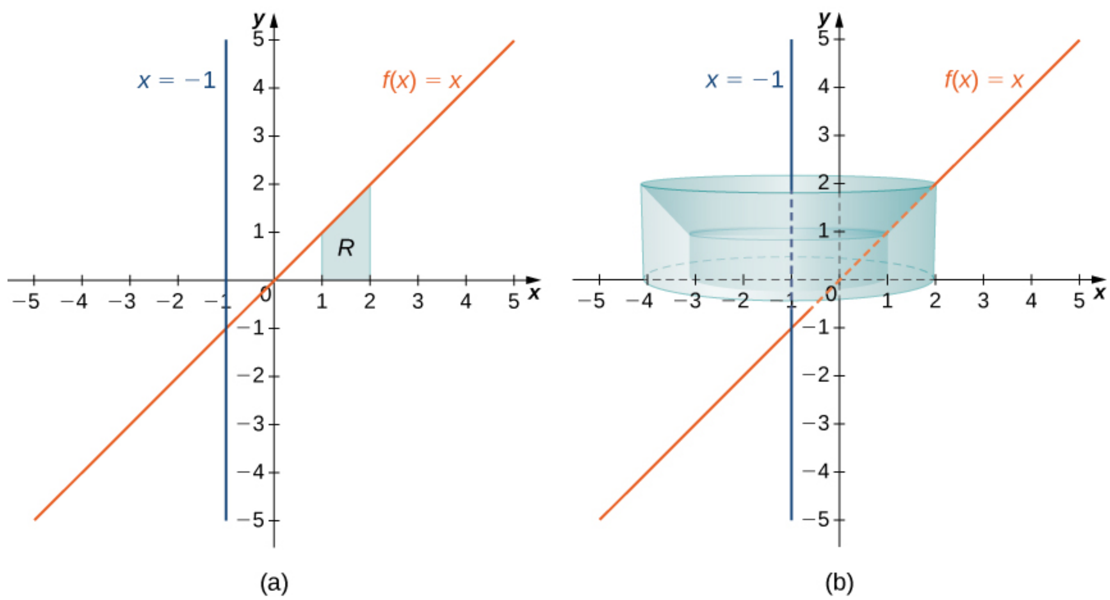


Figura 2.32 (a) La región R entre el gráfico de $f(x)$ y la intersección en eje x en el intervalo $[1, 2]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor de la línea $x = -1$.

Observe que el radio de una capa viene dado por $x + 1$. Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 (2\pi\,(x+1)\,f(x))\,dx \\ &= \int_1^2 (2\pi\,(x+1)\,x)\,dx = 2\pi \int_1^2 \left(x^2 + x\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{23\pi}{3} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

2.15 Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 1]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la línea $x = –2$.

En nuestro último ejemplo en esta sección, veamos el volumen de un sólido de revolución para el que la región de revolución está limitada por los gráficos de dos funciones.

EJEMPLO 2.16

Región de revolución limitada por los gráficos de dos funciones

Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 4]$. Halle el volumen del sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje y.

Solución

En primer lugar, grafique la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

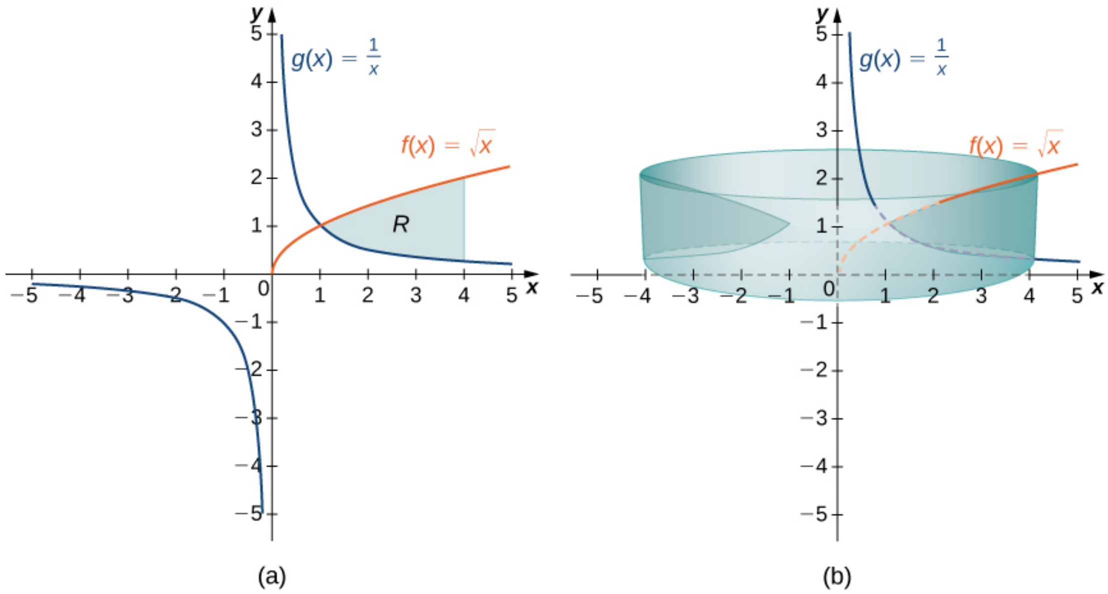


Figura 2.33 (a) La región R entre el gráfico de $f(x)$ y el gráfico de $g(x)$ en el intervalo $[1, 4]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje y.

Observe que el eje de revolución es el eje y, por lo que el radio de una capa viene dado simplemente por x. No necesitamos hacer ningún ajuste en el término $x$de nuestro integrando. Sin embargo, la altura de una capa viene dada por $f(x) - g(x)$, por lo que en este caso tenemos que ajustar el término $f(x)$ del integrando. Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 (2\pi x\,(f(x) - g(x)))\,dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\right) dx = 2\pi \int_1^4 \left(x^{3/2} - 1\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2x^{5/2}}{5} - x\right]\Bigg|_1^4 = \frac{94\pi}{5} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

2.16 Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x$ y abajo por el gráfico de $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

¿Qué método debemos utilizar?

Ya estudiamos varios métodos para hallar el volumen de un sólido de revolución, pero ¿cómo sabemos qué método utilizar? A menudo se trata de elegir qué integral es más fácil de evaluar. La Figura 2.34 describe los diferentes enfoques para los sólidos de revolución alrededor del eje x. Ahora es momento de que desarrolle la tabla análoga para los sólidos de revolución alrededor del eje y.

Comparación de los métodos para hallar el volumen de un sólido de revolución alrededor del eje de la x

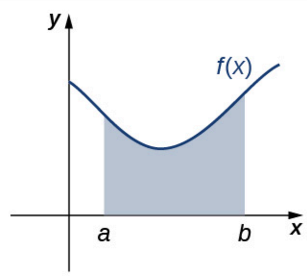
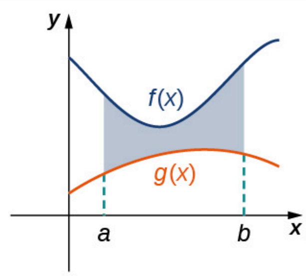
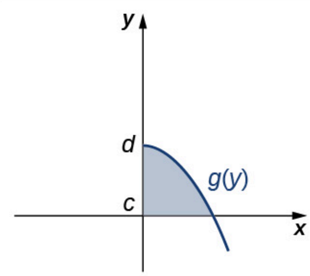
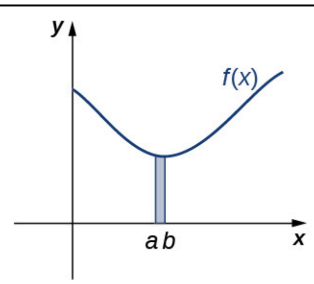
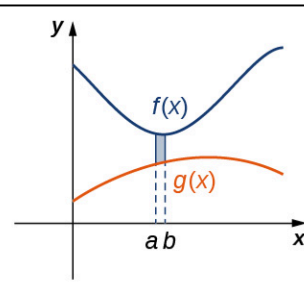
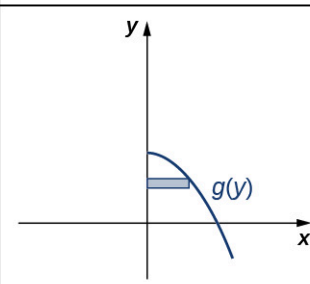
Comparación	Método de disco	Método de arandelas	Método de capa
Fórmula de volumen	$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$	$V = \int_a^b \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2]\, dx$	$V = \int_c^d 2\pi y\, g(y)\, dy$
Sólido	No hay cavidad en el centro	Cavidad en el centro	Con o sin cavidad en el centro
Intervalo para la partición	$[a, b]$ en el eje de la x	$[a, b]$ en el eje de la x	$[c, d]$ en el eje de la y
Rectángulo	Vertical	Vertical	Horizontal
Región típica			
Elemento típico			

Figura 2.34

Veamos un par de problemas adicionales y decidamos cuál es el mejor enfoque para resolverlos.

EJEMPLO 2.17

Selección del mejor método

Para cada uno de los siguientes problemas, seleccione el mejor método para hallar el volumen de un sólido de revolución generado al girar la región dada alrededor del eje x, y establezca la integral para encontrar el volumen (no evaluar la integral).

a. La región delimitada por los gráficos de $y = x$, $y = 2 - x$, y la intersección en x.
b. La región delimitada por los gráficos de $y = 4x - x^2$ y el eje x.

Solución

a. En primer lugar, dibuje la región y el sólido de revolución como se muestra.

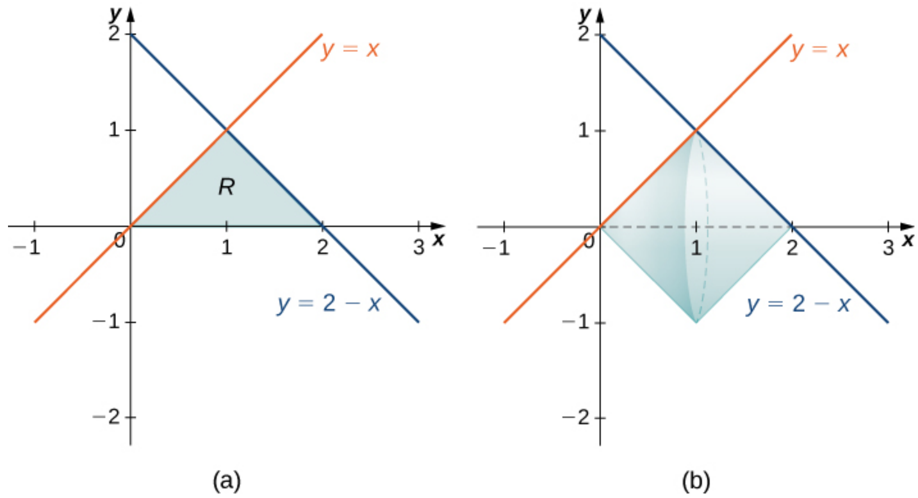


Figura 2.35 (a) La región R delimitado por dos rectas y el eje x. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje x.

Al observar la región, si queremos integrar con respecto a x, tendríamos que dividir la integral en dos partes, porque tenemos diferentes funciones que delimitan la región en $[0, 1]$ y $[1, 2]$. En este caso, utilizando el método de los discos, tendríamos

$$V = \int_0^1 \left(\pi x^2\right) dx + \int_1^2 \left(\pi(2-x)^2\right) dx.$$

Si en vez de ello utilizáramos el método de las capas, usaríamos funciones de y para representar las curvas, produciendo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 (2\pi y\,[(2-y)-y])\,dy \\ &= \int_0^1 (2\pi y\,[2-2y])\,dy. \end{aligned}$$

Ninguna de estas integrales es particularmente compleja, pero como el método de las capas requiere solo una integral, y el integrando requiere menos simplificación, es probable que en este caso utilicemos el método de las capas.

b. En primer lugar, dibuje la región y el sólido de revolución como se muestra.

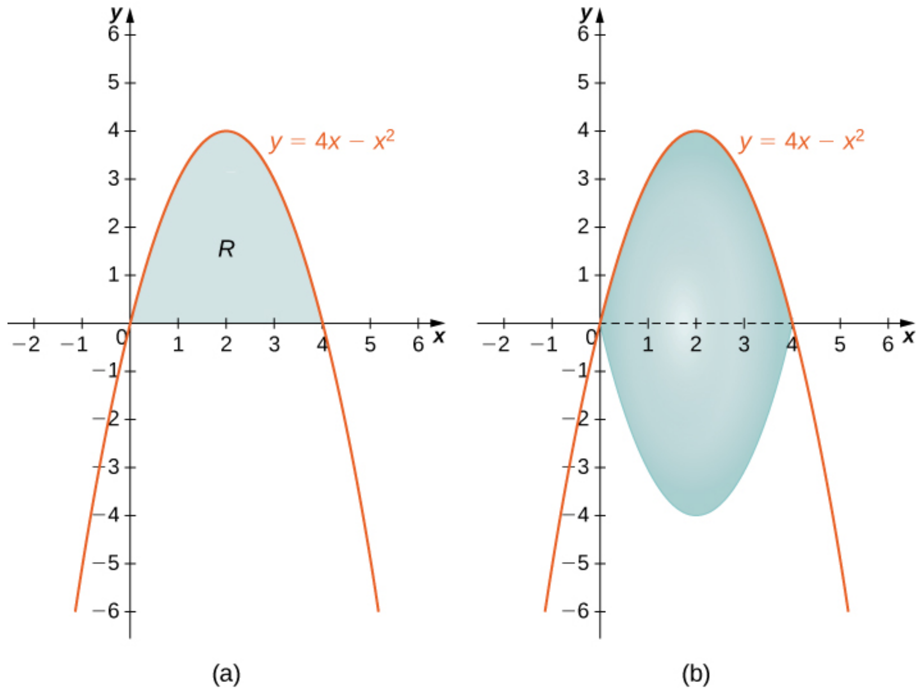


Figura 2.36 (a) La región R entre la curva y el eje x. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje x.

AL observar la región, sería problemático definir un rectángulo horizontal; la región está limitada a la izquierda y a la derecha por la misma función. Por lo tanto, podemos descartar el método de las capas. El sólido no tiene ninguna cavidad en el centro, por lo que podemos utilizar el método de los discos. Entonces

$$V = \int_0^4 \pi\left(4x - x^2\right)^2 dx.$$

2.17 Seleccione el mejor método para hallar el volumen de un sólido de revolución generado al girar la región dada alrededor del eje x, y establecer la integral para hallar el volumen (no evaluar la integral): la región limitada por los gráficos de $y = 2 - x^2$ y $y = x^2$.

SECCIÓN 2.3 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule el volumen generado cuando la región entre las dos curvas se gira alrededor del eje dado. Utilice tanto el método de las capas como el de las arandelas. Utilice la tecnología para graficar las funciones y dibujar un corte típico a mano.

114. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, x = 0,$ y $y = 3$ girado alrededor del eje y.

115. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, y = 0,$ y $x = 3$ girado alrededor del eje y.

116. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, y = 0,$ y $y = 3$ girado alrededor del x.

117. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, y = 0,$ y $x = 3$ girado alrededor del x.

118. **[T]** Limitado por las curvas $y = 2x^3, y = 0,$ y $x = 2$ girado alrededor del y.

119. **[T]** Limitado por las curvas $y = 2x^3, y = 0,$ y $x = 2$ girado alrededor del x.

En los siguientes ejercicios, utilice las capas para calcular el volumen de los sólidos dados. Observe que las regiones rotadas se encuentran entre la curva y el eje x y se giran alrededor del eje y.

120. $y = 1 - x^2, x = 0,$ y $x = 1$

121. $y = 5x^3, x = 0,$ y $x = 1$

122. $y = \frac{1}{x}, x = 1,$ y $x = 100$

123. $y = \sqrt{1 - x^2}, x = 0,$ y $x = 1$

124. $y = \frac{1}{1+x^2}, x = 0,$ y $x = 3$

125. $y = \text{sen} x^2, x = 0,$ y $x = \sqrt{\pi}$

126. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x = 0,$ y $x = \frac{1}{2}$

127. $y = \sqrt{x}, x = 0,$ y $x = 1$

128. $y = \left(1 + x^2\right)^3, x = 0,$ y $x = 1$

129. $y = 5x^3 - 2x^4, x = 0,$ y $x = 2$

En los siguientes ejercicios, utilice las capas para hallar el volumen generado por la rotación de las regiones entre la curva dada y $y = 0$ alrededor del eje x.

130. $y = \sqrt{1 - x^2}, x = 0,\ x = 1$ y el eje x

131. $y = x^2, x = 0,\ x = 2$ y el eje x

132. $y = \frac{x^3}{2},\ x = 0,\ x = 2,$ y el eje x

133. $y = \frac{2}{x^2},\ x = 1,\ x = 2,$ y el eje x

134. $x = \frac{1}{1+y^2}, y = 1,$ y $y = 4$

135. $x = \frac{1+y^2}{y}, y = 1,\ y = 4,$ y el eje y

136. $x = \cos y, y = 0,$ y $y = \pi$

137. $x = y^3 - 2y^2,\ x = 0,\ x = 9,$ y el eje y

138. $x = \sqrt{y} + 1,\ x = 1,\ x = 3,$ y el eje x

139. $x = \sqrt[3]{27y}$ y $x = \frac{3y}{4}$

En los siguientes ejercicios calcule el volumen generado cuando la región entre las curvas se gira alrededor del eje dado.

140. $y = 3 - x, y = 0, x = 0,$ y $x = 2$ girado alrededor del y.

141. $y = x^3, x = 0,$ y $y = 8$ girado alrededor del y.

142. $y = x^2, y = x,$ girado alrededor del y.

143. $y = \sqrt{x}, y = 0,$ y $x = 1$ girado alrededor de la línea $x = 2$.

144. $y = \frac{1}{4-x}, x = 1,\ x = 2$ y $y = 0$ girado alrededor de la línea $x = 4$.

145. $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ girado alrededor del y.

146. $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ girado alrededor de la línea $x = 2$.

147. $x = y^3, x = \frac{1}{y}, x = 1,$ y $x = 2$ girado alrededor del x.

148. $x = y^2$ y $y = x$ girado alrededor de la línea $y = 2$.

149. **[T]** A la izquierda de $x = \text{sen}\,(\pi y)$, derecha de $y = x$, alrededor del eje y.

En los siguientes ejercicios, utilice la tecnología para graficar la región. Determine qué método cree que sería más fácil de usar para calcular el volumen que se genera cuando la función gira alrededor del eje especificado. A continuación, utilice el método que haya elegido para hallar el volumen.

150. **[T]** $y = x^2$ y $y = 4x$ girado alrededor del y.

151. **[T]** $y = \cos(\pi x), y = \operatorname{sen}(\pi x), x = \frac{1}{4}$, y $x = \frac{5}{4}$ girado alrededor del y. Este ejercicio requiere una técnica avanzada. Puede utilizar la tecnología para realizar la integración.

152. **[T]** $y = x^2 - 2x, x = 2$, y $x = 4$ girado alrededor del y.

153. **[T]** $y = x^2 - 2x, x = 2$, y $x = 4$ girado alrededor del x.

154. **[T]** $y = 3x^3 - 2, y = x$, y $x = 2$ girado alrededor del x.

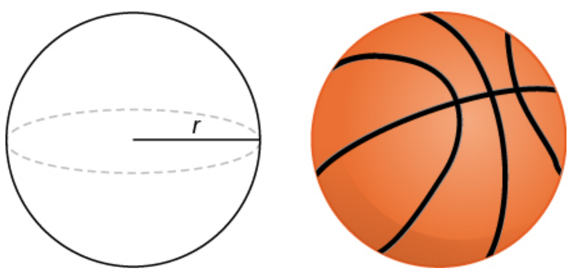
155. **[T]** $y = 3x^3 - 2, y = x$, y $x = 2$ girado alrededor del y.

156. **[T]** $x = \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right)$ y $x = \sqrt{2}y$ girado alrededor del x.

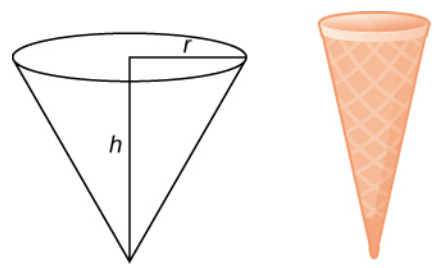
157. **[T]** $x = y^2, x = y^2 - 2y + 1$, y $x = 2$ girado alrededor del y.

En los siguientes ejercicios, utilice el método de las capas para aproximar los volúmenes de algunos objetos comunes, que están representados en las figuras adjuntas.

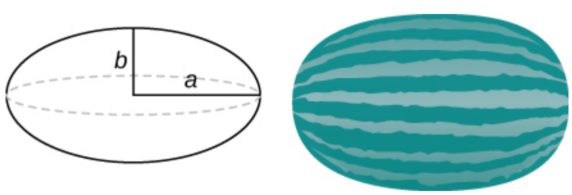
158. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de una esfera de radio r.



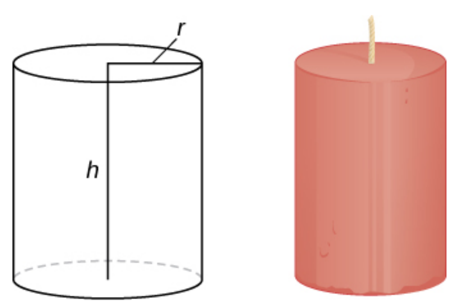
159. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de un cono de radio r y altura h.



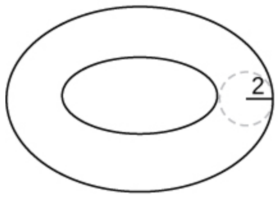
160. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de un elipsoide $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$ girado alrededor del x.



161. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de un cilindro de radio r y altura h.



162. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de una rosquilla que se crea cuando el círculo $x^2 + y^2 = 4$ se gira alrededor de la línea $x = 4$.





163. Consideremos la región delimitada por los gráficos de $y = f(x)$, $y = 1 + f(x)$, $x = 0$, $y = 0$, y $x = a > 0$. ¿Cuál es el volumen del sólido que se genera cuando esta región gira alrededor del eje y? Supongamos que la función se define en el intervalo $[0, a]$.

164. Considere la función $y = f(x)$, que disminuye de $f(0) = b$ al $f(1) = 0$. Establezca las integrales para determinar el volumen, utilizando tanto el método de las capas como el de los discos, del sólido generado cuando esta región, con $x = 0$ y $y = 0$, se gira alrededor del y. Demostrar que ambos métodos se aproximan al mismo volumen. ¿Qué método es más fácil de aplicar? (*Pista:* Dado que $f(x)$ es biunívoca, existe un inverso $f^{-1}(y)$.)

2.4 Longitud del arco de una curva y superficie

Objetivos de aprendizaje

2.4.1 Determine la longitud de una curva, $y = f(x)$, entre dos puntos.
2.4.2 Determine la longitud de una curva, $x = g(y)$, entre dos puntos.
2.4.3 Hallar el área superficial de un sólido de revolución.

En esta sección, utilizaremos las integrales definidas para encontrar la longitud de arco de una curva. Podemos pensar en la **longitud de arco** como la distancia que recorreríamos si camináramos por la trayectoria de la curva. Muchas aplicaciones del mundo real implican la longitud de arco. Si se lanza un cohete a lo largo de una trayectoria parabólica, querremos saber qué distancia recorre el cohete. O si una curva en un mapa representa una carretera, desearíamos saber qué distancia tenemos que recorrer para llegar a nuestro destino.

Comenzamos calculando la longitud de arco de las curvas definidas como funciones de x, luego examinamos el mismo proceso para las curvas definidas como funciones de y. (El proceso es idéntico, invirtiendo los roles de x como y). Las técnicas que utilizamos para hallar la longitud de arco pueden ampliarse para hallar el área superficial de una superficie de revolución, y cerramos la sección con un examen de este concepto.

Longitud de arco de la curva $y = f(x)$

En las aplicaciones anteriores de la integración, necesitamos que la función $f(x)$ fuera integrable o como máximo, continua. Sin embargo, para calcular la longitud del arco se nos presenta un requisito más estricto para $f(x)$. En este caso, necesitamos que $f(x)$ sea diferenciable, y además requerimos que su derivada, $f'(x)$, sea continua. Las funciones como esta, que tienen derivadas continuas, se denominan *suaves*. (Esta propiedad volverá a aparecer en capítulos posteriores).

Supongamos que $f(x)$ es una función suave definida sobre $[a, b]$. Queremos calcular la longitud de la curva desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$. Comenzamos utilizando segmentos de línea para aproximar la longitud de la curva.

Para $i = 0,\ 1, 2, \ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Luego, para $i = 1, 2, \ldots, n$, construya un segmento lineal desde el punto $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ al punto $(x_i, f(x_i))$. Aunque podría parecer lógico utilizar segmentos de línea horizontales o verticales, queremos que nuestros segmentos de línea que se aproximen a la curva lo más posible. La Figura 2.37 representa esta construcción para $n = 5$.

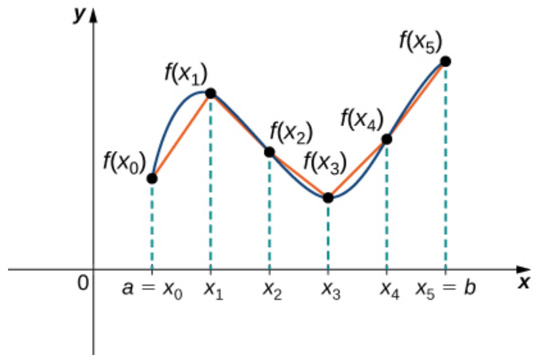


Figura 2.37 Podemos aproximar la longitud de una curva añadiendo segmentos de línea.

Para ayudarnos a encontrar la longitud de cada segmento de línea, debemos observar el cambio en la distancia vertical así como el cambio en la distancia horizontal en cada intervalo. Como utilizamos una partición regular, el cambio en la distancia horizontal en cada intervalo viene dado por Δx. Sin embargo, el cambio en la distancia vertical varía de un intervalo a otro, por lo que utilizamos $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ para representar el cambio de la distancia vertical en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, como se muestra en la Figura 2.38. Tenga en cuenta que algunos (o todos) Δy_i pueden ser negativos.

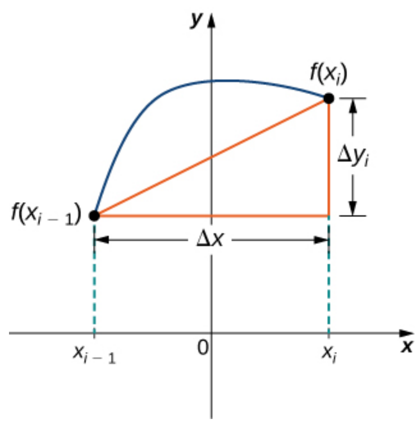


Figura 2.38 Un segmento de línea representativo aproxima la curva en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$.

Según el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento de línea es $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$. También podemos escribirlo como $\Delta x\sqrt{1 + ((\Delta y_i)/(\Delta x))^2}$. Ahora, según el teorema del valor medio, hay un punto $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ de manera que $f'(x_i^*) = (\Delta y_i)/(\Delta x)$. Entonces la longitud del segmento de línea viene dada por $\Delta x\sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}$. Sumando las longitudes de todos los segmentos de la línea, obtenemos

$$\text{Longitud de arco } \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\,\Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann. Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, tenemos

$$\text{Longitud de arco} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Resumimos estas conclusiones en el siguiente teorema.

Teorema 2.4

Longitud de arco para $y = f(x)$

Supongamos que $f(x)$ una función suave en el intervalo $[a, b]$. Entonces la longitud de arco de la porción del gráfico de $f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, \ f(b))$ está dada por

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx. \qquad (2.7)$$

Note que estamos integrando una expresión que implica $f'(x)$, así que tenemos que estar seguros de que $f'(x)$ es integrable. Por eso necesitamos que $f(x)$ sea suave. El siguiente ejemplo muestra cómo aplicar el teorema.

EJEMPLO 2.18

Cálculo de la longitud de arco de una función de *x*

Supongamos que $f(x) = 2x^{3/2}$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$. Redondee la respuesta a tres decimales.

Solución

Tenemos $f'(x) = 3x^{1/2}$, por lo que $\left[f'(x)\right]^2 = 9x$. Entonces, la longitud de arco es

$$\begin{aligned}\text{Longitud de arco} &= \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}\, dx.\end{aligned}$$

Sustituya $u = 1 + 9x$. Entonces, $du = 9\, dx$. Cuando $x = 0$, entonces $u = 1$, y cuando $x = 1$, entonces $u = 10$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Longitud de arco} &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}\, dx \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} 9 dx = \frac{1}{9} \int_1^{10} \sqrt{u}\, du \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{2}{27}\left[10\sqrt{10} - 1\right] \approx 2{,}268 \text{ al cuadrado.}\end{aligned}$$

2.18 Supongamos que $f(x) = (4/3)\, x^{3/2}$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$. Redondee la respuesta a tres decimales.

Aunque es bueno tener una fórmula para calcular la longitud de arco, este teorema en particular puede generar expresiones difíciles de integrar. En Introducción a técnicas de integración estudiamos algunas técnicas de integración. En algunos casos, es posible que tengamos que utilizar una computadora o una calculadora para aproximar el valor de la integral.

EJEMPLO 2.19

Utilizar una computadora o una calculadora para determinar la longitud de arco de una función de *x*

Supongamos que $f(x) = x^2$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[1, 3]$.

Solución

Tenemos $f'(x) = 2x$, por lo que $\left[f'(x)\right]^2 = 4x^2$. Entonces la longitud de arco viene dada por

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx = \int_1^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Al utilizar una computadora para aproximar el valor de esta integral, obtenemos

$$\int_1^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 8{,}26815.$$

2.19 Supongamos que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Utilice una computadora o una calculadora para aproximar el valor de la integral.

Longitud de arco de la curva $x = g(y)$

Acabamos de ver cómo aproximar la longitud de una curva con una línea segmentada. Si queremos encontrar la longitud de arco del gráfico de una función de y, podemos repetir el mismo proceso, excepto que dividimos el eje y en lugar del eje x. La Figura 2.39 muestra un segmento de línea representativo.

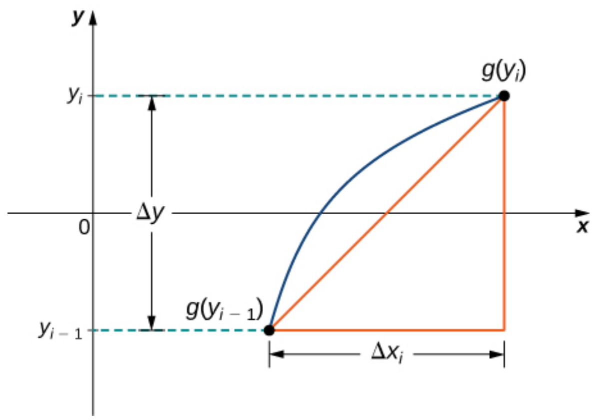


Figura 2.39 Un segmento de línea representativo en el intervalo $[y_{i-1}, y_i]$.

Entonces la longitud del segmento de línea es $\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x_i)^2}$, que también puede escribirse como $\Delta y\sqrt{1+((\Delta x_i)/(\Delta y))^2}$. Si ahora seguimos el mismo desarrollo anterior, obtenemos una fórmula para la longitud de arco de una función $x = g(y)$.

Teorema 2.5

Longitud de arco para $x = g(y)$

Supongamos que $g(y)$ es una función suave sobre un y intervalo $[c, d]$. Entonces, la longitud de arco del gráfico de $g(y)$ desde el punto $(g(d),\ d)$ al punto $(g(c),\ c)$ está dada por

$$\text{Longitud de arco} = \int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy. \tag{2.8}$$

EJEMPLO 2.20

Cálculo de la longitud de arco de una función de *y*

Supongamos que $g(y) = 3y^3$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $g(y)$ en el intervalo $[1, 2]$.

Solución

Tenemos $g'(y) = 9y^2$, por lo que $\left[g'(y)\right]^2 = 81y^4$. Entonces la longitud de arco es

$$\text{Longitud de arco} = \int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1+81y^4}\,dy.$$

Al utilizar una computadora para aproximar el valor de esta integral, obtenemos

$$\int_1^2 \sqrt{1 + 81y^4}\, dy \approx 21{,}0277.$$

2.20 Supongamos que $g(y) = 1/y$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $g(y)$ en el intervalo $[1, 4]$. Utilice una computadora o una calculadora para aproximar el valor de la integral.

Área de una superficie de revolución

Los conceptos que hemos utilizado para hallar la longitud de arco de una curva pueden extenderse para hallar el área superficial de una superficie de revolución. El **área superficial** es el área total de la capa exterior de un objeto. En objetos como cubos o ladrillos, el área superficial del objeto es la suma de las áreas de todas sus caras. En las superficies curvas, la situación es un poco más compleja. Supongamos que $f(x)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Queremos encontrar el área superficial de la superficie de revolución que se crea al girar el gráfico de $y = f(x)$ alrededor del eje x como se muestra en la siguiente figura.

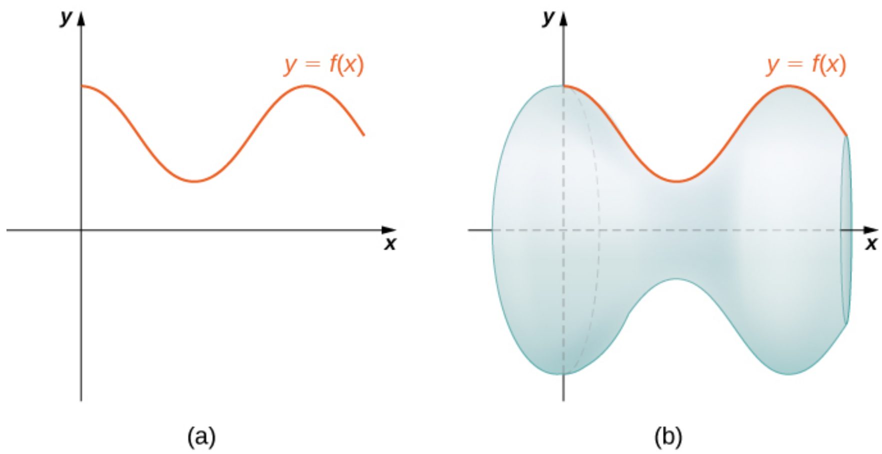


Figura 2.40 (a) Una curva que representa la función $f(x)$. b) La superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x.

Como ya hemos hecho muchas veces, vamos a dividir el intervalo $[a, b]$ y aproximar el área superficial calculando la superficie de formas más simples. Comenzamos utilizando segmentos de línea para aproximar la curva, como hicimos anteriormente en esta sección. Para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Luego, para $i = 1, 2,\ldots, n$, construya un segmento lineal desde el punto $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ al punto $(x_i, f(x_i))$. Ahora, gire estos segmentos de línea alrededor del eje x para generar una aproximación de la superficie de revolución como se muestra en la siguiente figura.

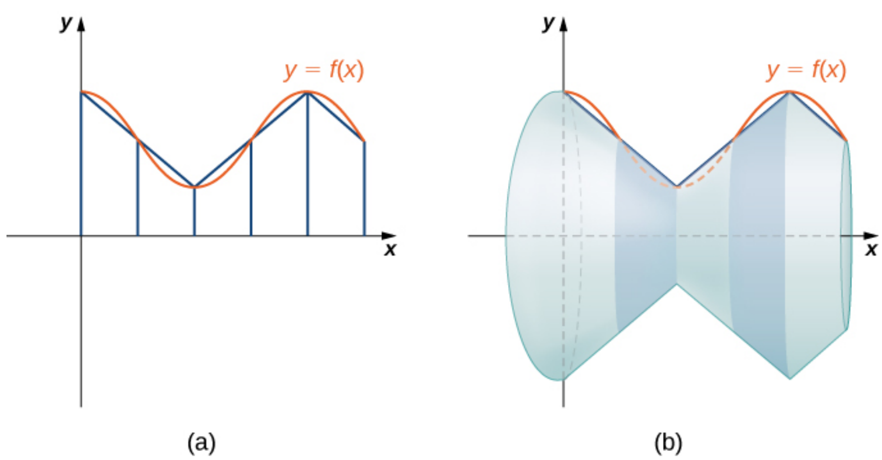


Figura 2.41 (a) Aproximación de $f(x)$ con segmentos de línea. (b) Superficie de revolución formada al girar los segmentos de línea alrededor del eje x.

Observe que, cuando cada segmento de línea gira alrededor del eje, produce una banda. Estas bandas son en realidad

trozos de conos (piense en un cono de helado con el extremo puntiagudo cortado). Un trozo de cono como este se denomina **tronco** de cono.

Para encontrar el área superficial de la banda, necesitamos encontrar el área superficial lateral, S, del tronco (solo el área de la superficie exterior inclinada del tronco, sin incluir las áreas de las caras superiores o inferiores). Supongamos que r_1 y r_2 son los radios del extremo ancho y del extremo estrecho del tronco respectivamente, y que l es la altura oblicua del tronco como se muestra en la siguiente figura.

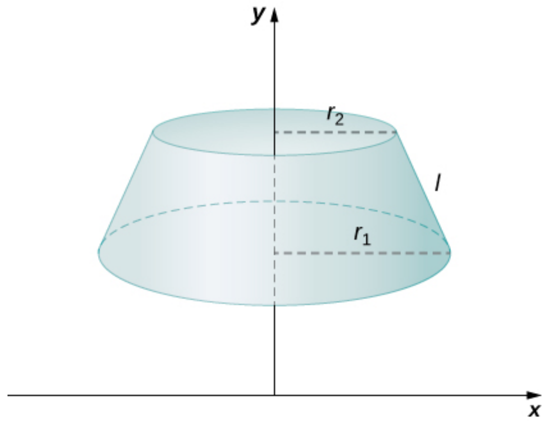


Figura 2.42 El tronco de un cono puede aproximarse a una pequeña parte del área superficial.

Sabemos que el área superficial lateral de un cono viene dada por

$$\text{Área superficial lateral} = \pi r s,$$

donde r es el radio de la base del cono y s es la altura de la inclinación (vea la siguiente figura).

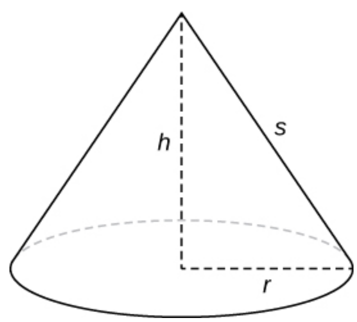


Figura 2.43 El área superficial lateral del cono viene dada por $\pi r s$.

Dado que un tronco puede considerarse como un trozo de cono, el área superficial lateral del tronco viene dada por el área superficial lateral del cono entero menos el área superficial lateral del cono más pequeño (la punta) que se cortó (vea la siguiente figura).

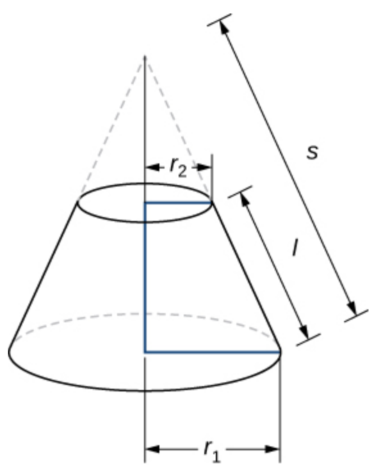


Figura 2.44 Cálculo del área superficial lateral del tronco de un cono.

Las secciones transversales del cono pequeño y del grande son triángulos similares, por lo que vemos que

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{s - l}{s}.$$

Al resolver para s, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} &= \frac{s-l}{s} \\ r_2 s &= r_1 (s - l) \\ r_2 s &= r_1 s - r_1 l \\ r_1 l &= r_1 s - r_2 s \\ r_1 l &= (r_1 - r_2) s \\ \frac{r_1 l}{r_1 - r_2} &= s. \end{aligned}$$

Entonces el área superficial lateral (SA) del tronco es

$$\begin{aligned} S &= \text{(SA lateral del cono grande)} - \text{(SA lateral del cono pequeño)} \\ &= \pi r_1 s - \pi r_2 (s - l) \\ &= \pi r_1 \left(\frac{r_1 l}{r_1 - r_2}\right) - \pi r_2 \left(\frac{r_1 l}{r_1 - r_2} - l\right) \\ &= \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} + \pi r_2 l \\ &= \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} + \frac{\pi r_2 l (r_1 - r_2)}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} + \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_2{}^2 l}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{\pi \left(r_1^2 - r_2^2\right) l}{r_1 - r_2} = \frac{\pi (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) l}{r_1 - r_2} = \pi (r_1 + r_2) l. \end{aligned}$$

Utilicemos ahora esta fórmula para calcular el área superficial de cada una de las bandas que se forman al girar los segmentos de la línea alrededor del eje x. En la siguiente figura se muestra una banda representativa.

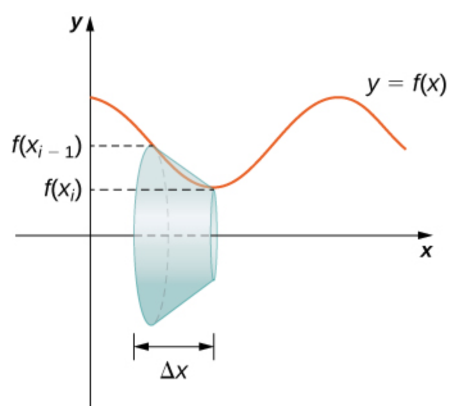


Figura 2.45 Banda representativa utilizada para determinar el área superficial.

Observe que la altura oblicua de este tronco es solo la longitud del segmento de línea que se usa para generarlo. Así, aplicando la fórmula del área superficial, tenemos

$$\begin{aligned} S &= \pi (r_1 + r_2) l \\ &= \pi \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{\Delta x^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \pi \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Ahora, como hicimos en el desarrollo de la fórmula de la longitud de arco, aplicamos el teorema del valor medio para seleccionar $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ de manera que $f'(x_i^*) = (\Delta y_i)/\Delta x$. Esto nos da

$$S = \pi \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \Delta x \sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Además, como $f(x)$ es continua, por el teorema del valor intermedio, hay un punto $x_i^{**} \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ de manera que $f(x_i^{**}) = (1/2)\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$, por lo que obtenemos

$$S = 2\pi f(x_i^{**})\Delta x\sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Entonces el área superficial aproximada de toda la superficie de revolución viene dada por

$$\text{Superficie} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^{**})\Delta x\sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Esto *casi* parece una suma de Riemann, excepto que tenemos funciones evaluadas en dos puntos diferentes, x_i^* y x_i^{**}, en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Aunque no examinamos los detalles aquí, resulta que ya que $f(x)$ es suave, si suponemos que $n \to \infty$, el límite funciona igual que una suma de Riemann incluso con los dos puntos de evaluación diferentes. De manera intuitiva, esto tiene sentido. Tanto x_i^* y x_i^{**} están en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, por lo que tiene sentido que, cuando $n \to \infty$, ambos x_i^* y x_i^{**} se acercan a x. Si le interesan los detalles debe consultar un texto de cálculo avanzado.

Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, obtenemos

$$\text{Superficie} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^{**})\Delta x\sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2} = \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\right) dx.$$

Al igual que con la longitud de arco, podemos realizar un desarrollo similar para las funciones de y a fin de obtener una fórmula del área superficial de las superficies de revolución alrededor del y. Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.6

Área superficial de una superficie de revolución

Supongamos que $f(x)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces, la superficie de la superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x viene dada por

$$\text{Superficie} = \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\right) dx. \tag{2.9}$$

Del mismo modo, supongamos que $g(y)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[c, d]$. Entonces, la superficie de la superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $g(y)$ alrededor del eje y viene dada por

$$\text{Superficie} = \int_c^d \left(2\pi g(y)\sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\right) dy.$$

EJEMPLO 2.21

Cálculo del área superficial de una superficie de revolución 1

Supongamos que $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x. Redondee la respuesta a tres decimales.

Solución

El gráfico de $f(x)$ y la superficie de rotación se muestran en la siguiente figura.

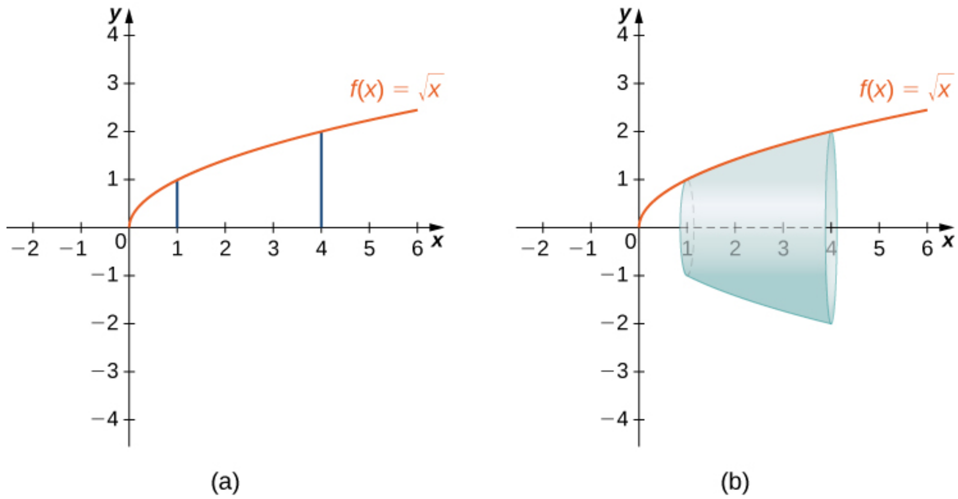


Figura 2.46 (a) El gráfico de $f(x)$. (b) La superficie de revolución.

Tenemos $f(x)=\sqrt{x}$. Entonces, $f'(x)=1/\left(2\sqrt{x}\right)$ y $\left(f'(x)\right)^2=1/(4x)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Superficie} &= \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right)dx\\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\right)dx\\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)dx.\end{aligned}$$

Supongamos que $u=x+1/4$. Entonces, $du=dx$. Cuando $x=1$, $u=5/4$, y cuando $x=4$, $u=17/4$. Esto nos da

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)dx &= \int_{5/4}^{17/4} 2\pi\sqrt{u}\,du\\ &= 2\pi\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_{5/4}^{17/4} = \tfrac{\pi}{6}\left[17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right] \approx 30{,}846.\end{aligned}$$

2.21 Supongamos que $f(x)=\sqrt{1-x}$ en el intervalo $[0, 1/2]$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x. Redondee la respuesta a tres decimales.

EJEMPLO 2.22

Cálculo del área superficial de una superficie de revolución 2

Supongamos que $f(x)=y=\sqrt[3]{3x}$. Considere la parte de la curva donde $0\le y\le 2$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje y.

Solución

Observe que estamos girando la curva alrededor del eje y, y el intervalo está en términos de y, por lo que queremos reescribir la función como una función de y. Obtenemos $x=g(y)=(1/3)\,y^3$. La gráfica de $g(y)$ y la superficie de rotación se muestran en la siguiente figura.

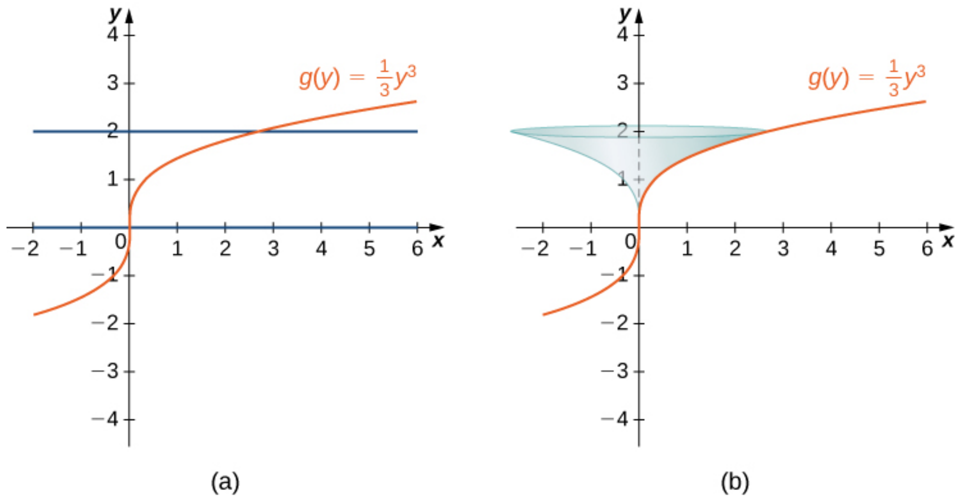


Figura 2.47 (a) El gráfico de $g(y)$. (b) La superficie de revolución.

Tenemos $g(y) = (1/3)\,y^3$, por lo que $g'(y) = y^2$ y $\left(g'(y)\right)^2 = y^4$. Entonces

$$\begin{aligned}\text{Superficie} &= \int_c^d \left(2\pi g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\right)dy \\ &= \int_0^2 \left(2\pi\left(\frac{1}{3}y^3\right)\sqrt{1+y^4}\right)dy \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^2 \left(y^3\sqrt{1+y^4}\right)dy.\end{aligned}$$

Supongamos que $u = y^4 + 1$. Entonces $du = 4y^3\,dy$. Cuando $y = 0$, $u = 1$, y cuando $y = 2$, $u = 17$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{3}\int_0^2 \left(y^3\sqrt{1+y^4}\right)dy &= \frac{2\pi}{3}\int_1^{17}\frac{1}{4}\sqrt{u}\,du \\ &= \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_1^{17} = \frac{\pi}{9}\left[(17)^{3/2}-1\right] \approx 24{,}118.\end{aligned}$$

2.22 Supongamos que $g(y) = \sqrt{9-y^2}$ en el intervalo $y \in [0, 2]$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $g(y)$ alrededor del eje y.

SECCIÓN 2.4 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, halle la longitud de las funciones en el intervalo dado.

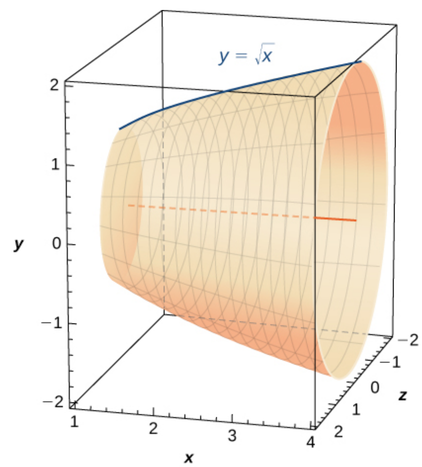
165. $y = 5x$ de $x = 0$ a $x = 2$

166. $y = -\frac{1}{2}x + 25$ de $x = 1$ para $x = 4$

167. $x = 4y$ de $y = -1$ para $y = 1$

168. Elija una función lineal arbitraria $x = g(y)$ en cualquier intervalo de su elección (y_1, y_2). Determine la longitud de la función y luego demuestre que la longitud es correcta utilizando la geometría.

169. Calcule la superficie del volumen generado cuando la curva $y = \sqrt{x}$ gira en torno a eje x a partir de $(1, 1)$ al $(4, 2)$, como se ve aquí.



170. Calcule la superficie del volumen generado cuando la curva $y = x^2$ gira en torno a y a partir de $(1,\ 1)$ al $(3, 9)$.



Para los siguientes ejercicios, calcule las longitudes de las funciones de x en el intervalo dado. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice la tecnología para aproximarla.

171. $y = x^{3/2}$ a partir de $(0, 0)$ para $(1, 1)$ grandes.

172. $y = x^{2/3}$ a partir de $(1, 1)$ para $(8, 4)$ grandes.

173. $y = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\right)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 1$

174. $y = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\right)^{3/2}$ de $x = 2$ hasta $x = 4$

175. **[T]** $y = e^x$ sobre $x = 0$ hasta $x = 1$

176. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ de $x = 1$ para $x = 3$

177. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ de $x = 1$ para $x = 2$

178. $y = \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^{1/2}}{2}$ de $x = 1$ para $x = 4$

179. $y = \frac{1}{27}\left(9x^2 + 6\right)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 2$

180. **[T]** $y = \operatorname{sen} x$ sobre $x = 0$ a $x = \pi$

Para los siguientes ejercicios, calcule las longitudes de las funciones de y en el intervalo dado. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice la tecnología para aproximarla.

181. $y = \frac{5-3x}{4}$ a partir de $y = 0$ al $y = 4$

182. $x = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right)$ a partir de $y = -1$ para $y = 1$

183. $x = 5y^{3/2}$ a partir de $y = 0$ al $y = 1$

184. **[T]** $x = y^2$ a partir de $y = 0$ al $y = 1$

185. $x = \sqrt{y}$ a partir de $y = 0$ para $y = 1$

186. $x = \frac{2}{3}\left(y^2 + 1\right)^{3/2}$ a partir de $y = 1$ hasta $y = 3$

187. **[T]** $x = \tan y$ a partir de $y = 0$ al $y = \frac{3}{4}$

188. **[T]** $x = \cos^2 y$ a partir de $y = -\frac{\pi}{2}$ al $y = \frac{\pi}{2}$

189. **[T]** $x = 4^y$ a partir de $y = 0$ para $y = 2$

190. **[T]** $x = \ln(y)$ sobre $y = \frac{1}{e}$ al $y = e$

Para los siguientes ejercicios, halle la superficie del área del volumen generado cuando las siguientes curvas giran alrededor del eje x. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice su calculadora para aproximarla.

191. $y = \sqrt{x}$ de $x = 2$ hasta $x = 6$

192. $y = x^3$ a partir de $x = 0$ hasta $x = 1$

193. $y = 7x$ de $x = -1$ para $x = 1$

194. **[T]** $y = \frac{1}{x^2}$ de $x = 1$ para $x = 3$

195. $y = \sqrt{4 - x^2}$ de $x = 0$ a $x = 2$

196. $y = \sqrt{4 - x^2}$ de $x = -1$ para $x = 1$

197. $y = 5x$ de $x = 1$ para $x = 5$

198. **[T]** $y = \tan x$ de $x = -\frac{\pi}{4}$ para $x = \frac{\pi}{4}$

Para los siguientes ejercicios, halle la superficie del área del volumen generado cuando las siguientes curvas giran alrededor del y. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice su calculadora para aproximarla.

199. $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 2$

200. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ de $x = 0$ a $x = 1$

201. $y = x + 1$ a partir de $x = 0$ a $x = 3$

202. **[T]** $y = \frac{1}{x}$ de $x = \frac{1}{2}$ hasta $x = 1$

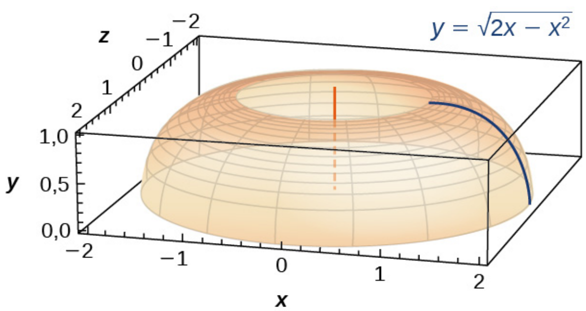
203. $y = \sqrt[3]{x}$ a partir de $x = 1$ para $x = 27$

204. **[T]** $y = 3x^4$ a partir de $x = 0$ hasta $x = 1$

205. **[T]** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ de $x = 1$ a $x = 3$

206. **[T]** $y = \cos x$ de $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$

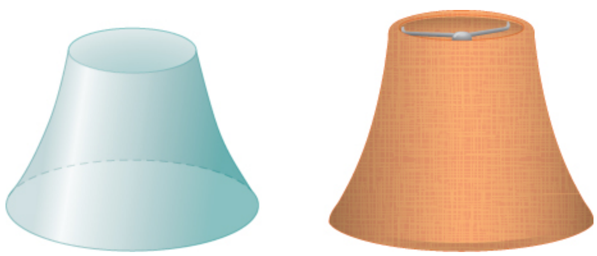
207. La base de una lámpara se construye girando un cuarto de círculo $y = \sqrt{2x - x^2}$ alrededor del eje y a partir de $x = 1$ a $x = 2$, como se ve aquí. Cree una integral para la superficie de esta curva y calcúlela.



208. Una bombilla es una esfera con un radio de $1/2$ in con la parte inferior cortada para que encaje exactamente en un cilindro con un radio de $1/4$ in y longitud $1/3$ in, como se ve aquí. La esfera se corta por la parte inferior para que encaje exactamente en el cilindro, por lo que el radio del corte es de $1/4$ pulgadas Halle el área superficial (sin incluir la parte superior o inferior del cilindro).



209. **[T]** Una pantalla se construye al girar $y = 1/x$ alrededor del eje x a partir de $y = 1$ hasta $y = 2$, como se ve aquí. Determine la cantidad de material que necesitará para construir esta pantalla de lámpara, es decir, el área superficial, con una precisión de cuatro decimales.



210. **[T]** Un ancla se arrastra detrás de un barco según la función $y = 24e^{-x/2} - 24$, donde y representa la profundidad bajo el barco y x es la distancia horizontal del ancla desde la parte trasera del barco. Si el ancla está a 23 ft por debajo del barco, ¿cuánta cuerda hay que tirar para alcanzar el ancla? Redondee su respuesta a tres decimales.

211. **[T]** Está construyendo un puente que abarcará 10 pies. Tiene la intención de añadir una cuerda decorativa en forma de $y = 5\,|\text{sen}\,((x\pi)/5)|$, donde x es la distancia en pies desde un extremo del puente. Averigüe cuánta cuerda necesita comprar, redondeada al pie más cercano.

En los siguientes ejercicios, halle la longitud de arco exacta para los siguientes problemas sobre el intervalo dado.

212. $y = \ln(\text{sen } x)$ de $x = \pi/4$ al $x = (3\pi)/4$. (*Pista:* Recuerde las identidades trigonométricas).

213. Dibuje gráficos de $y = x^2$, $y = x^6$, y $y = x^{10}$. Para $y = x^n$, cuando n aumenta, formule una predicción sobre la longitud del arco a partir de $(0, 0)$ al $(1, 1)$. Ahora, calcule las longitudes de estas tres funciones y determine si su predicción es correcta.

214. Compare las longitudes de la parábola $x = y^2$ y la línea $x = by$ a partir de $(0, 0)$ para $\left(b^2, b\right)$ cuando b aumenta. ¿Qué observa?

215. Resuelva la longitud de $x = y^2$ a partir de $(0, 0)$ para $(1, 1)$. Demuestre que $x = (1/2)\, y^2$ a partir de $(0, 0)$ al $(2,\ 2)$ es el doble de largo. Grafique ambas funciones y explique por qué es así.

216. **[T]** Qué es más largo entre $(1,\ 1)$ y $(2, 1/2)$: la hipérbola $y = 1/x$ o el gráfico de $x + 2y = 3$?

217. Explique por qué el área de superficie es infinita cuando $y = 1/x$ se gira alrededor del eje x por $1 \le x < \infty$, pero el volumen es finito.

2.5 Aplicaciones físicas

Objetivos de aprendizaje

- **2.5.1** Determinar la masa de un objeto unidimensional a partir de su función de densidad lineal.
- **2.5.2** Determinar la masa de un objeto circular bidimensional a partir de su función de densidad radial.
- **2.5.3** Calcular el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa a lo largo de una línea.
- **2.5.4** Calcular el trabajo realizado al bombear un líquido de una altura a otra.
- **2.5.5** Encontrar la fuerza hidrostática contra una placa vertical sumergida.

En esta sección, examinaremos algunas aplicaciones físicas de la integración. Comenzaremos dándole un vistazo al cálculo de la masa a partir de una función de densidad. A continuación, nos centraremos en el trabajo y cerraremos la sección con un estudio de la fuerza hidrostática.

Masa y Densidad

Podemos utilizar la integración para desarrollar una fórmula para calcular la masa con base en una función de densidad. En primer lugar, pensemos en una varilla o un cable delgado. Se orienta la varilla para que se alinee con el eje x—eje, con el extremo izquierdo de la varilla en $x = a$ y el extremo derecho en $x = b$ (Figura 2.48). Note que, aunque en las figuras representamos la varilla con cierto grosor, a efectos matemáticos suponemos que la varilla es lo suficientemente fina como para ser tratada como un objeto unidimensional.

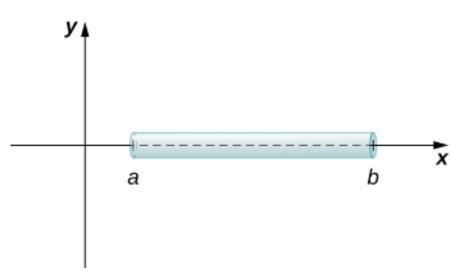


Figura 2.48 Podemos calcular la masa de una varilla delgada orientada a lo largo del eje x integrando su función de densidad.

Si la varilla tiene una densidad constante ρ, dada en términos de masa por unidad de longitud, entonces la masa de la varilla es solo el producto de la densidad y la longitud de la varilla: $(b– a)\, \rho$. Sin embargo, si la densidad de la varilla no es constante, el problema se vuelve un poco más difícil. Cuando la densidad de la varilla varía de un punto a otro,

utilizamos una **función de densidad** lineal, $\rho(x)$, para denotar la densidad de la varilla en cualquier punto, x. Supongamos que $\rho(x)$ es una función de densidad lineal integrable. Ahora, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$ supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[a, b]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$ elija un punto arbitrario $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. La Figura 2.49 muestra un segmento representativo de la varilla.

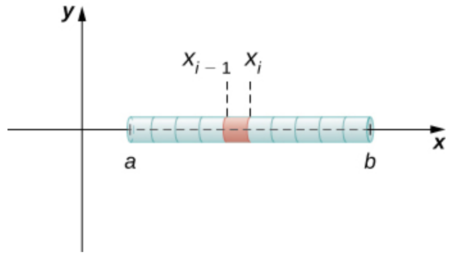


Figura 2.49 Un segmento representativo de la varilla.

La masa m_i del segmento de la varilla de x_{i-1} a x_i se aproxima por

$$m_i \approx \rho(x_i^*)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Sumando las masas de todos los segmentos obtenemos una aproximación a la masa de toda la varilla:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann. Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, obtenemos una expresión de la masa exacta de la varilla:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Enunciamos este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 2.7

Fórmula masa-densidad de un objeto unidimensional
Dada una varilla delgada orientada a lo largo del eje x en el intervalo $[a, b]$, supongamos que $\rho(x)$ denota una función de densidad lineal que da la densidad de la varilla en un punto x del intervalo. Entonces la masa de la varilla viene dada por

$$m = \int_a^b \rho(x)dx. \tag{2.10}$$

Aplicamos este teorema en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.23

Cálculo de la masa a partir de la densidad lineal
Consideremos una varilla delgada orientada en el eje x sobre el intervalo $[\pi/2, \pi]$. Si la densidad de la varilla viene dada por $\rho(x) = \text{sen } x$, ¿cuál es la masa de la varilla?

Solución
Aplicando directamente la Ecuación 2.10, tenemos

$$m = \int_a^b \rho(x)dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen } x\, dx = -\cos x|_{\pi/2}^{\pi} = 1.$$

2.23 Consideremos una varilla delgada orientada en el eje $x$sobre el intervalo $[1, 3]$. Si la densidad de la varilla

viene dada por $\rho(x) = 2x^2 + 3$, ¿cuál es la masa de la varilla?

Ahora extendemos este concepto para hallar la masa de un disco bidimensional de radio r. Al igual que con la varilla del caso unidimensional, aquí suponemos que el disco es lo suficientemente fino como para que, a efectos matemáticos, podamos tratarlo como un objeto bidimensional. Suponemos que la densidad está dada en términos de masa por unidad de superficie (denominada *densidad de área*), y además que la densidad varía solo a lo largo del radio del disco (denominada *densidad radial*). Orientamos el disco en elxy, con el centro en el origen. Entonces, la densidad del disco puede ser tratada como una función de x, denotado $\rho(x)$. Suponemos que $\rho(x)$ es integrable. Como la densidad es una función de x, dividimos el intervalo desde $[0, r]$ a lo largo del eje x. Para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[0, r]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. Ahora, utilice la división para dividir el disco en arandelas finas (bidimensionales). En la siguiente figura se muestra un disco y una arandela representativa.

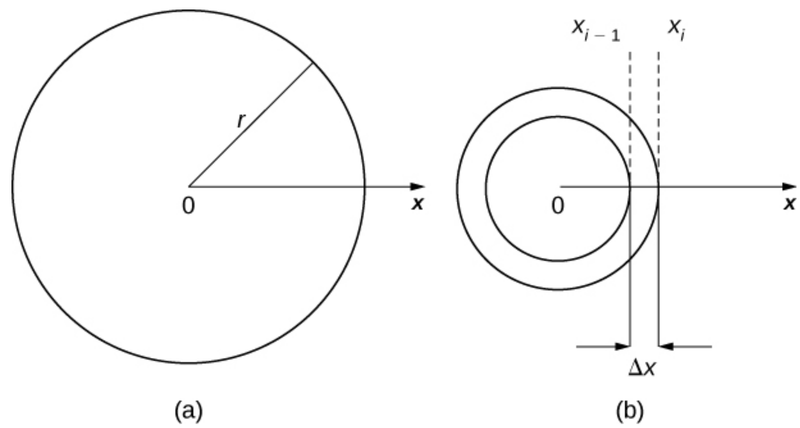


Figura 2.50 (a) Un disco fino en el plano *xy*. (b) Una arandela representativa.

Ahora aproximamos la densidad y el área de la arandela para calcular una masa aproximada, m_i. Observe que el área de la arandela viene dada por

$$\begin{aligned} A_i &= \pi(x_i)^2 - \pi(x_{i-1})^2 \\ &= \pi\left[x_i^2 - x_{i-1}^2\right] \\ &= \pi\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= \pi(x_i + x_{i-1})\Delta x. \end{aligned}$$

Es posible que recuerde que teníamos una expresión similar a esta cuando calculábamos los volúmenes por capas. Como hicimos allí, utilizamos $x_i^* \approx (x_i + x_{i-1})/2$ para aproximar al radio medio de la arandela. Obtenemos

$$A_i = \pi(x_i + x_{i-1})\Delta x \approx 2\pi x_i^* \Delta x.$$

Utilizando $\rho(x_i^*)$ para aproximar la densidad de la arandela, aproximamos la masa de la misma mediante

$$m_i \approx 2\pi x_i^* \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Sumando las masas de las arandelas, vemos que la masa m de todo el disco se aproxima por

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho(x_i^*)\Delta x.$$

De nuevo reconocemos que se trata de una suma de Riemann, y tomamos el límite como $n \to \infty$. Esto nos da

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho(x_i^*)\Delta x = \int_0^r 2\pi x\rho(x)dx.$$

Resumimos estas conclusiones en el siguiente teorema.

Teorema 2.8

Fórmula masa-densidad de un objeto circular

Supongamos que $\rho(x)$ es una función integrable que representa la densidad radial de un disco de radio r. Entonces la masa del disco viene dada por

$$m = \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx. \tag{2.11}$$

EJEMPLO 2.24

Cálculo de la masa a partir de la densidad radial

Supongamos que $\rho(x) = \sqrt{x}$ representan la densidad radial de un disco. Calcule la masa de un disco de radio 4.

Solución

Aplicando la fórmula, hallamos

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx \\ &= \int_0^4 2\pi x \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx \\ &= 2\pi \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \frac{4\pi}{5}[32] = \frac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

2.24 Supongamos que $\rho(x) = 3x + 2$ representan la densidad radial de un disco. Calcule la masa de un disco de radio 2.

Trabajo realizado por una fuerza

Ahora consideramos el trabajo. En física, el trabajo está relacionado con la fuerza, que a menudo se define intuitivamente como un empuje o un tirón sobre un objeto. Cuando una fuerza mueve un objeto, decimos que la fuerza realiza un trabajo sobre el objeto. En otras palabras, el trabajo puede considerarse como la cantidad de energía que se necesita para mover un objeto. Según la física, cuando tenemos una fuerza constante, el trabajo puede expresarse como el producto de la fuerza por la distancia.

En el sistema inglés, la unidad de fuerza es la libra y la unidad de distancia es el pie, por lo que el trabajo se da en pies-libra. En el sistema métrico se utilizan los kilogramos y los metros. Un newton es la fuerza necesaria para acelerar 1 kilogramo de masa a una tasa de 1 m/s^2. Así, la unidad de trabajo más común es el newton-metro. Esta misma unidad también se denomina *joule*. Ambos se definen como kilogramos por metros al cuadrado sobre segundos al cuadrado $\left(\text{kg. m}^2/\text{s}^2\right)$.

Cuando tenemos una fuerza constante, las cosas son bastante fáciles. Sin embargo, es raro que una fuerza sea constante. El trabajo realizado para comprimir (o alargar) un resorte, por ejemplo, varía en función de cuánto se lo haya comprimido o estirado. Más adelante, en esta misma sección, se analizan los resortes con más detalle.

Supongamos que tenemos una fuerza variable $F(x)$ que mueve un objeto en dirección positiva a lo largo del eje *x* desde el punto a al punto b. Para calcular el trabajo realizado, dividimos el intervalo $[a, b]$ y estimamos el trabajo realizado en cada subintervalo. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[a, b]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. Calcular el trabajo realizado para mover un objeto desde un punto x_{i-1} al punto x_i, suponemos que la fuerza es aproximadamente constante en el intervalo, y utilizamos $F(x_i^*)$ para aproximar la fuerza. El trabajo realizado en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, entonces, viene dado por

$$W_i \approx F(x_i^*)\left(x_i - x_{i-1}\right) = F(x_i^*)\Delta x.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado en el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x.$$

Tomando el límite de esta expresión como $n \to \infty$ nos da el valor exacto del trabajo:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x = \int_a^b F(x)dx.$$

Así, podemos definir el trabajo de la siguiente manera.

Definición

Si una fuerza variable $F(x)$ mueve un objeto en una dirección positiva a lo largo del eje *x* desde el punto *a* hasta el punto *b*, entonces el **trabajo** realizado sobre el objeto es

$$W = \int_a^b F(x)dx. \tag{2.12}$$

Note que si *F* es constante, la integral se evalúa como $F.(b – a) = F.d$, que es la fórmula que indicamos al principio de esta sección.

Veamos ahora el ejemplo concreto del trabajo realizado para comprimir o alargar un resorte. Consideremos un bloque unido a un resorte horizontal. El bloque se mueve hacia adelante y hacia atrás cuando el resorte se estira y se comprime. Aunque en el mundo real tendríamos que tener en cuenta la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie sobre la que se apoya, aquí ignoramos la fricción y suponemos que el bloque está apoyado sobre una superficie sin fricción. Cuando el resorte está en su longitud natural (en reposo), se dice que el sistema está en equilibrio. En este estado, el resorte no se alarga ni se comprime, y en esta posición de equilibrio el bloque no se mueve hasta que se introduce alguna fuerza. Orientamos el sistema de forma que $x = 0$ corresponde a la posición de equilibrio (vea la siguiente figura).

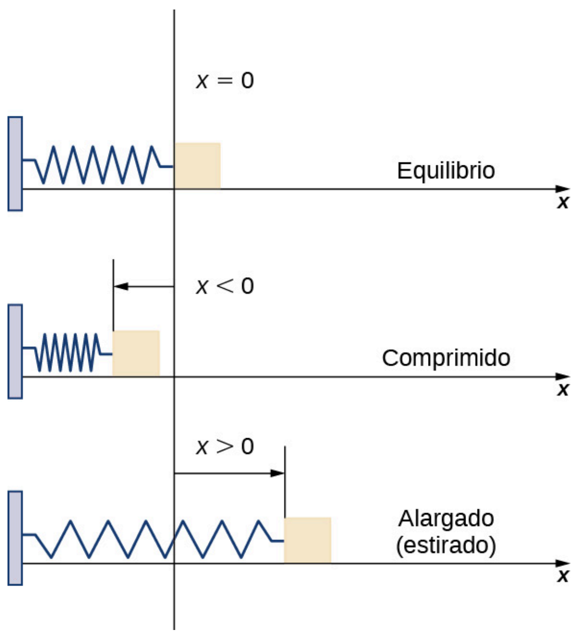


Figura 2.51 Un bloque unido a un resorte horizontal en equilibrio, comprimido y alargado.

Según la **ley de Hooke**, la fuerza necesaria para comprimir o estirar un resorte desde una posición de equilibrio viene dada por $F(x) = kx$, para alguna constante k. El valor de k depende de las características físicas del resorte. La constante k se denomina *constante del resorte* y siempre es positiva. Podemos utilizar esta información para calcular el trabajo realizado para comprimir o alargar un resorte, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.25

El trabajo necesario para estirar o comprimir un resorte

Supongamos que se necesita una fuerza de 10 N (en sentido negativo) para comprimir un resorte $0{,}2$ m de la posición de equilibrio. Cuánto trabajo se hace para estirar el resorte $0{,}5$ m de la posición de equilibrio?

Solución

Primero halle la constante del resorte, k. Cuando $x = -0{,}2$, sabemos que $F(x) = -10$, así que

$$\begin{aligned} F(x) &= kx \\ -10 &= k(-0{,}2) \\ k &= 50 \end{aligned}$$

y $F(x) = 50x$. Entonces, para calcular el trabajo, integramos la función de fuerza, obteniendo

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{0{,}5} 50x\, dx = 25x^2\Big|_0^{0{,}5} = 6{,}25.$$

El trabajo realizado para estirar el resorte es $6{,}25$ J.

2.25 Supongamos que se necesita una fuerza de 8 lb para estirar un resorte de 6 pulgadas desde la posición de equilibrio. Cuánto trabajo se hace para estirar el resorte 1 pies de la posición de equilibrio?

Trabajo realizado en el bombeo

Considere el trabajo realizado para bombear agua (o algún otro líquido) fuera de un tanque. Los problemas de bombeo son un poco más complicados que los de los resortes porque muchos de los cálculos dependen de la forma y el tamaño del depósito. Además, en vez de preocuparnos por el trabajo realizado para mover una sola masa, nos fijamos en el trabajo realizado para mover un volumen de agua, y se necesita más trabajo para mover el agua desde el fondo del tanque que para mover el agua desde la parte superior del tanque.

Examinamos el proceso en el contexto de un tanque cilíndrico, y luego vemos un par de ejemplos utilizando tanques de diferentes formas. Supongamos un depósito cilíndrico de un radio de 4 m y de 10 m de altura se llena hasta una profundidad de 8 m. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear toda el agua sobre el borde superior del tanque?

Lo primero que tenemos que hacer es definir un marco de referencia. Supongamos que x representa la distancia vertical por debajo de la parte superior del tanque. Es decir, orientamos el eje x verticalmente, con el origen en la parte superior del tanque y la dirección hacia abajo que es positiva (ver la siguiente figura).

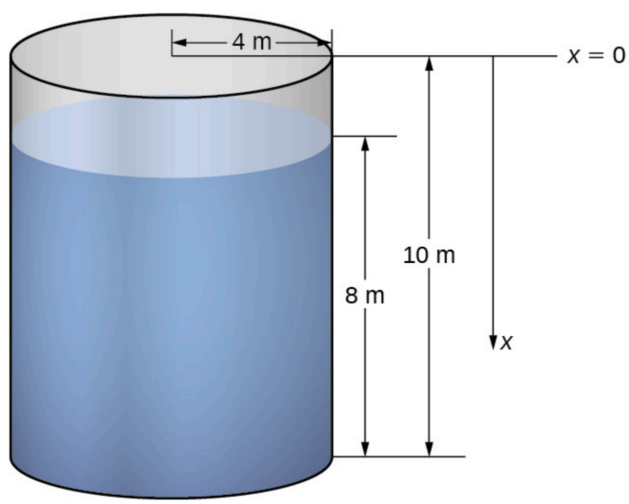


Figura 2.52 ¿Cuánto trabajo se necesita para vaciar un depósito parcialmente lleno de agua?

Utilizando este sistema de coordenadas, el agua se extiende desde $x = 2$ hasta $x = 10$. Por lo tanto, dividimos el intervalo $[2,\ 10]$ y observamos el trabajo necesario para levantar cada "capa" de agua. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[2,\ 10]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario

$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La Figura 2.53 muestra una capa representativa.

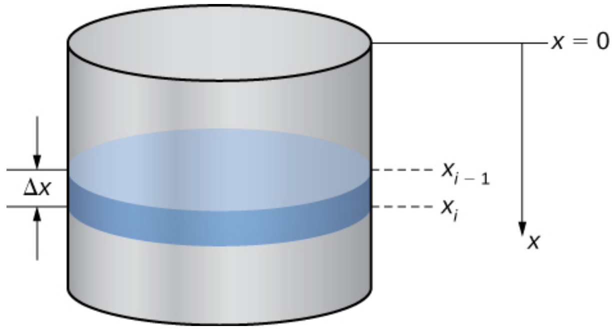


Figura 2.53 Una capa representativa de agua.

En los problemas de bombeo, la fuerza necesaria para elevar el agua hasta la parte superior del depósito es la fuerza necesaria para vencer la gravedad, por lo que es igual al peso del agua. Dado que el peso-densidad del agua es 9800 N/m^3, o 62,4 lb/ft^3, al calcular el volumen de cada capa obtenemos el peso. En este caso, tenemos

$$V = \pi(4)^2 \Delta x = 16\pi\Delta x.$$

Entonces, la fuerza necesaria para levantar cada capa es

$$F = 9800.\, 16\pi\Delta x = 156800\pi\Delta x.$$

Tenga en cuenta que este paso se vuelve un poco más difícil si tenemos un tanque no cilíndrico. En el siguiente ejemplo veremos un tanque no cilíndrico.

También necesitamos saber la distancia a la que debe elevarse el agua. Con base en nuestra elección de sistemas de coordenadas, podemos utilizar x_i^* como una aproximación a la distancia que debe levantar la capa. A continuación, el trabajo para levantar la $i\text{−ésima}$ capa de agua W_i es aproximadamente

$$W_i \approx 156800\pi x_i^* \Delta x.$$

Sumando el trabajo de cada capa, vemos que el trabajo aproximado para vaciar el depósito viene dado por

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 156800\pi x_i^* \Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomando el límite como $n \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 156800\pi x_i^* \Delta x \\ &= 156800\pi \int_2^{10} x\,dx \\ &= 156800\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_2^{10} = 7526400\pi \approx 23.644.883. \end{aligned}$$

El trabajo necesario para vaciar el depósito es de aproximadamente 23.650.000 J.

En el caso de los problemas de bombeo, los cálculos varían en función de la forma del depósito o contenedor. La siguiente estrategia de resolución de problemas establece un proceso paso a paso para resolver problemas de bombeo.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Solución de problemas de bombeo

1. Haga un dibujo del tanque y seleccione un marco de referencia adecuado.
2. Calcule el volumen de una capa representativa de agua.
3. Multiplique el volumen por el peso-densidad del agua para obtener la fuerza.
4. Calcule la distancia a la que debe elevarse la capa de agua.
5. Multiplique la fuerza y la distancia para obtener una estimación del trabajo necesario para levantar la capa de

agua.

6. Sume el trabajo necesario para levantar todas las capas. Esta expresión es una estimación del trabajo necesario para bombear la cantidad de agua deseada, y tiene la forma de una suma de Riemann.
7. Tome el límite como $n \to \infty$ y evalúe la integral resultante para obtener el trabajo exacto necesario para bombear la cantidad de agua deseada.

Ahora aplicamos esta estrategia de resolución de problemas en un ejemplo con un tanque no cilíndrico.

EJEMPLO 2.26

Un problema de bombeo con un depósito no cilíndrico

Supongamos un tanque en forma de cono invertido, con una altura de 12 pies y radio de la base de 4 pies. Al principio el depósito está lleno y el agua se bombea sobre su borde superior hasta que la altura del agua que queda en el depósito es de 4 pies. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear esa cantidad de agua?

Solución

El tanque está representado en la Figura 2.54. Como hicimos en el ejemplo del tanque cilíndrico, orientamos verticalmente el eje x, con el origen en la parte superior del tanque y la dirección hacia abajo siendo positiva (paso 1).

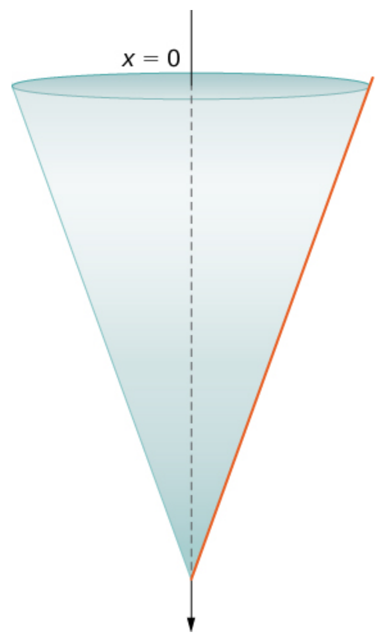


Figura 2.54 Un depósito de agua en forma de cono invertido.

El depósito comienza lleno y termina con 4 ft de agua, por lo que, basándonos en el marco de referencia que hemos elegido, tenemos que dividir el intervalo $[0, 8]$. Luego, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[0, 8]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Podemos aproximar el volumen de una capa utilizando un disco, y luego utilizar triángulos similares para encontrar el radio del disco (vea la siguiente figura).

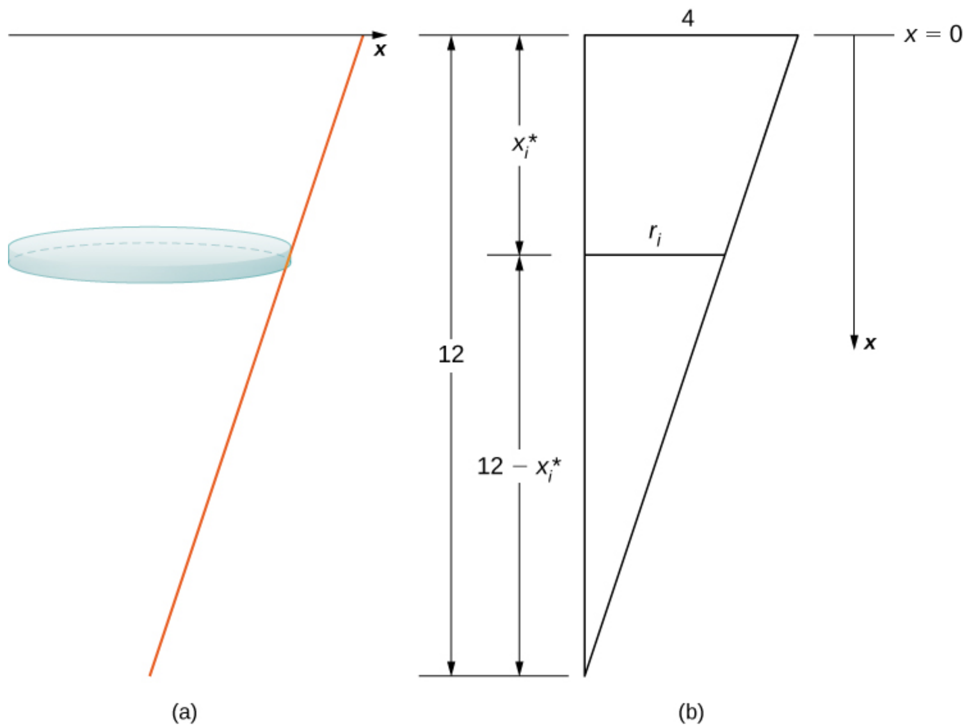


Figura 2.55 Utilizar triángulos semejantes para expresar el radio de un disco de agua.

A partir de las propiedades de los triángulos semejantes, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{r_i}{12-x_i^*} &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ 3r_i &= 12 - x_i^* \\ r_i &= \frac{12-x_i^*}{3} \\ &= 4 - \frac{x_i^*}{3}. \end{aligned}$$

Entonces el volumen del disco es

$$V_i = \pi\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 2).}$$

La densidad del peso del agua es 62,4 lb/ft^3, por lo que la fuerza necesaria para levantar cada capa es aproximadamente

$$F_i \approx 62{,}4\pi\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 3).}$$

Según el diagrama, la distancia a la que debe elevarse el agua es de aproximadamente x_i^* ft (paso 4), por lo que el trabajo aproximado necesario para levantar la capa es

$$W_i \approx 62{,}4\pi x_i^*\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 5).}$$

Sumando el trabajo necesario para levantar todas las capas, obtenemos un valor aproximado del trabajo total:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 62{,}4\pi x_i^*\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 6).}$$

Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62{,}4\pi x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \\ &= \int_0^8 62{,}4\pi x \left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 dx \\ &= 62{,}4\pi \int_0^8 x\left(16 - \frac{8x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) dx = 62{,}4\pi \int_0^8 \left(16x - \frac{8x^2}{3} + \frac{x^3}{9}\right) dx \\ &= 62{,}4\pi \left[8x^2 - \frac{8x^3}{9} + \frac{x^4}{36}\right]\Bigg|_0^8 = 10649.6\pi \approx 33.456{,}7. \end{aligned}$$

Se necesita aproximadamente 33.450 ft-lb de trabajo para vaciar el depósito hasta el nivel deseado.

2.26 Un tanque tiene forma de cono invertido, con una altura de 10 ft y el radio de la base es de 6 ft. El tanque se llena hasta una profundidad de 8 ft para empezar, y el agua se bombea sobre el borde superior del tanque hasta que quedan 3 ft de agua en el tanque. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear esa cantidad de agua?

Fuerza y presión hidrostáticas

En este último apartado, estudiamos la fuerza y la presión que se ejerce sobre un objeto sumergido en un líquido. En el sistema inglés, la fuerza se mide en libras. En el sistema métrico, se mide en newtons. La presión es la fuerza por unidad de superficie, por lo que en el sistema inglés tenemos libras por pie cuadrado (o tal vez más comúnmente, libras por pulgada cuadrada, denotadas psi). En el sistema métrico tenemos newtons por metro cuadrado, también llamados *pascales*.

Empecemos con el caso sencillo de un plato de superficie A sumergido horizontalmente en el agua a una profundidad s (Figura 2.56). Entonces, la fuerza ejercida sobre la placa es simplemente el peso del agua sobre ella, que viene dado por $F = \rho A s$, donde ρ es la densidad del peso del agua (peso por unidad de volumen). Para hallar la **presión hidrostática**, es decir, la presión que ejerce el agua sobre un objeto sumergido, dividimos la fuerza entre el área. Así que la presión es $p = F/A = \rho s$.

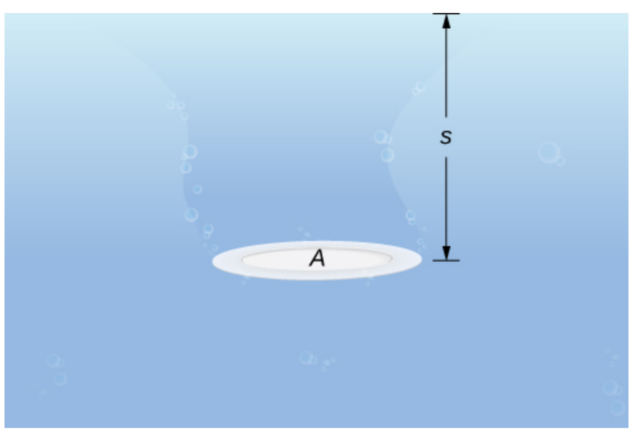


Figura 2.56 Una placa sumergida horizontalmente en el agua.

Según el principio de Pascal, la presión a una profundidad determinada es la misma en todas las direcciones, por lo que no importa si la placa está sumergida horizontal o verticalmente. Así que, mientras conozcamos la profundidad, conoceremos la presión. Podemos aplicar el principio de Pascal para hallar la fuerza ejercida sobre superficies como las presas, que están orientadas verticalmente. No podemos aplicar la fórmula $F = \rho A s$ directamente, porque la profundidad varía de un punto a otro en una superficie orientada verticalmente. Así que, como hemos hecho muchas veces antes, hacemos una partición, una suma de Riemann y, en última instancia, una integral definida para calcular la fuerza.

Supongamos que una placa delgada está sumergida en el agua. Elegimos nuestro marco de referencia de tal manera que el eje *x* está orientado verticalmente, con la dirección hacia abajo siendo positiva, y el punto $x = 0$ correspondiente a un punto de referencia lógico. Supongamos que $s(x)$ denota la profundidad en el punto *x*. Tenga en cuenta que a

menudo suponemos que $x = 0$ corresponde a la superficie del agua. En este caso, la profundidad en cualquier punto viene dada simplemente por $s(x) = x$. Sin embargo, es posible que en algunos casos queramos seleccionar un punto de referencia diferente para $x = 0$, por lo que procedemos al desarrollo en el caso más general. Por último, supongamos que $w(x)$ denota la anchura de la placa en el punto x.

Supongamos que el borde superior de la placa está en el punto $x = a$ y el borde inferior de la placa en el punto $x = b$. Luego, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[a, b]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La partición divide la placa en varias tiras finas y rectangulares (vea la siguiente figura).

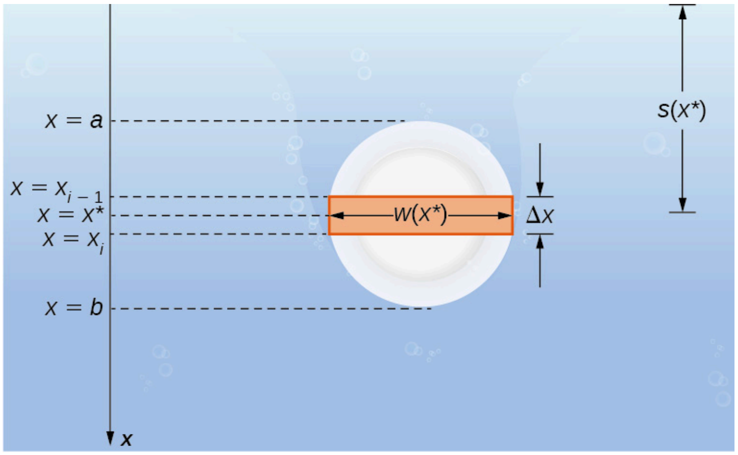


Figura 2.57 Una placa fina sumergida verticalmente en el agua.

Estimemos ahora la fuerza sobre una banda representativa. Si la banda es lo suficientemente fina, podemos tratarla como si estuviera a una profundidad constante, $s(x_i^*)$. Entonces tenemos

$$F_i = \rho As = \rho \left[w(x_i^*)\Delta x\right] s(x_i^*).$$

Al sumar las fuerzas, obtenemos una estimación de la fuerza sobre la placa:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \rho \left[w(x_i^*)\Delta x\right] s(x_i^*).$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomando el límite obtenemos la fuerza exacta. Obtenemos

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \left[w(x_i^*)\Delta x\right] s(x_i^*) = \int_a^b \rho w(x)s(x)dx. \quad \textbf{(2.13)}$$

Evaluando esta integral obtenemos la fuerza sobre la placa. Lo resumimos en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Calcule la fuerza hidrostática

1. Elabore un dibujo y seleccione un marco de referencia adecuado. (Tenga en cuenta que si seleccionamos un marco de referencia distinto al utilizado anteriormente, es posible que tengamos que ajustar la Ecuación 2.13 en consecuencia).
2. Determine las funciones de profundidad y anchura, $s(x)$ y $w(x)$.
3. Determine el peso-densidad del líquido con el que está trabajando. La densidad del peso del agua es $62{,}4$ lb/ft^3, o 9800 N/m^3.
4. Utilice la ecuación para calcular la fuerza total.

EJEMPLO 2.27

Calcule la fuerza hidrostática

Un abrevadero de 15 ft de largo tiene los extremos en forma de triángulo isósceles invertido, con base de 8 ft y altura de 3 ft. Calcule la fuerza en un extremo de la canaleta si está llena de agua.

Solución

La Figura 2.58 muestra el canal y una vista más detallada de un extremo.

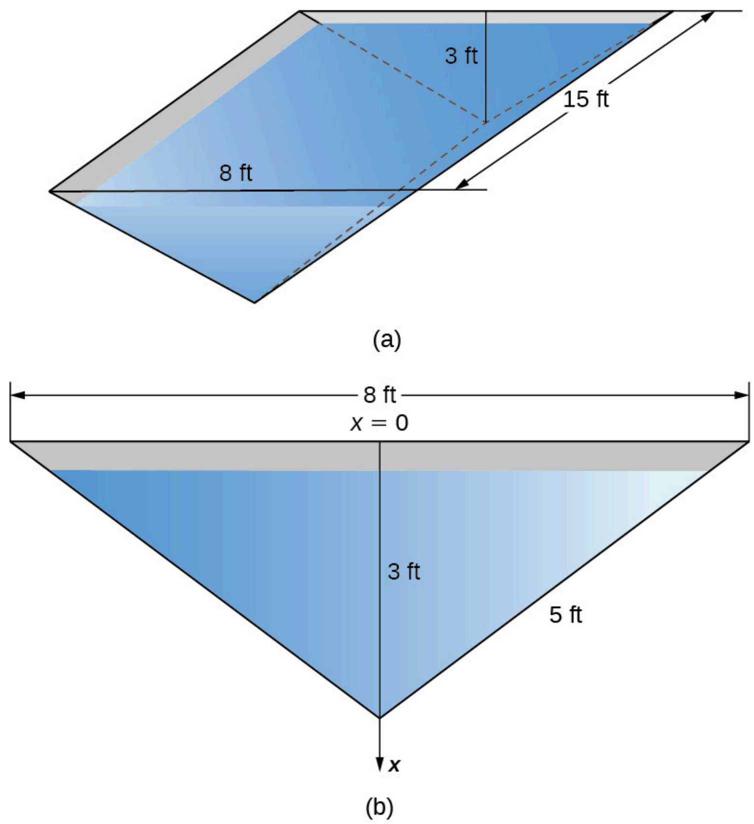


Figura 2.58 (a) Una sección transversal triangular del abrevadero. (b) Dimensiones de un extremo del mismo.

Seleccione un marco de referencia con el eje x orientado verticalmente y la dirección de bajada es positiva. Seleccione la parte superior del abrevadero como el punto correspondiente a $x = 0$ (paso 1). La función de profundidad, entonces, es $s(x) = x$. Utilizando triángulos similares, vemos que $w(x) = 8 - (8/3)\,x$ (paso 2). Ahora, la densidad del peso del agua es 62,4 lb/ft^3 (paso 3), por lo que aplicando la Ecuación 2.13, obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho w(x)s(x)dx \\ &= \int_0^3 62{,}4 \left(8 - \frac{8}{3}x\right) x\, dx = 62{,}4 \int_0^3 \left(8x - \frac{8}{3}x^2\right) dx \\ &= 62{,}4\left[4x^2 - \tfrac{8}{9}x^3\right]\Big|_0^3 = 748{,}8. \end{aligned}$$

El agua ejerce una fuerza de 748,8 lb sobre el extremo del abrevadero (paso 4).

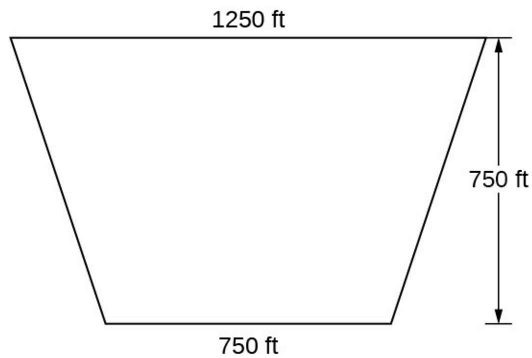
2.27 Un abrevadero de 12 m de longitud tiene los extremos en forma de triángulo isósceles invertido, con base de 6 m y altura de 4 m. Calcule la fuerza en un extremo de la canaleta si está llena de agua.

EJEMPLO 2.28

Inicio del capítulo: Calcule la fuerza hidrostática

Ahora volvemos a centrarnos en la presa Hoover, mencionada al principio de este capítulo. La presa real es arqueada, en vez de plana, pero vamos a hacer algunas suposiciones simplificadoras para ayudarnos con los cálculos. Supongamos que la cara de la presa Hoover tiene forma de trapecio isósceles con base inferior de 750 ft, base superior de 1.250 ft y altura de 750 ft (vea la siguiente figura).





Cuando el embalse está lleno, la profundidad máxima del lago Mead es de unos 530 ft, y la superficie del lago está a unos 10 ft por debajo de la parte superior de la presa (vea la siguiente figura).

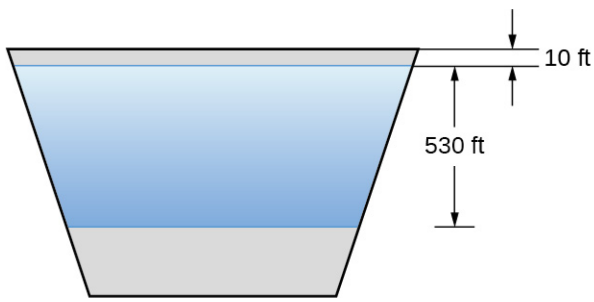


Figura 2.59 Un modelo simplificado de la presa Hoover con dimensiones supuestas.

a. Halle la fuerza en la cara de la presa cuando el embalse está lleno.
b. El suroeste de Estados Unidos ha sufrido una sequía, y la superficie del lago Mead está a unos 125 ft por debajo de donde estaría si el embalse estuviera lleno. ¿Cuál es la fuerza sobre la cara de la represa en estas circunstancias?

Solución

a. Empecemos por establecer un marco de referencia. Como es habitual, optamos por orientar el eje x verticalmente, siendo positiva la dirección de bajada. Esta vez, sin embargo, vamos a permitir que $x = 0$ represente la parte superior de la presa, en vez de la superficie del agua. Cuando el embalse está lleno, la superficie del agua es de 10 ft por debajo de la parte superior de la presa, por lo que $s(x) = x - 10$ (vea la siguiente figura).

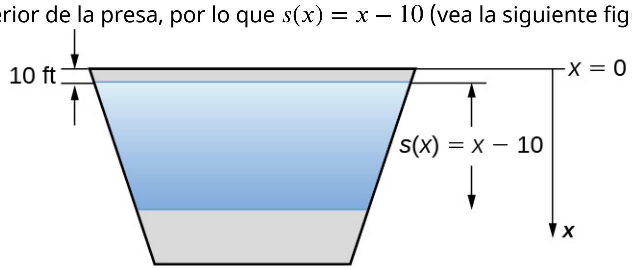


Figura 2.60 Primero elegimos un marco de referencia.

Para encontrar la función de anchura, volvemos a recurrir a los triángulos semejantes, como se muestra en la figura siguiente

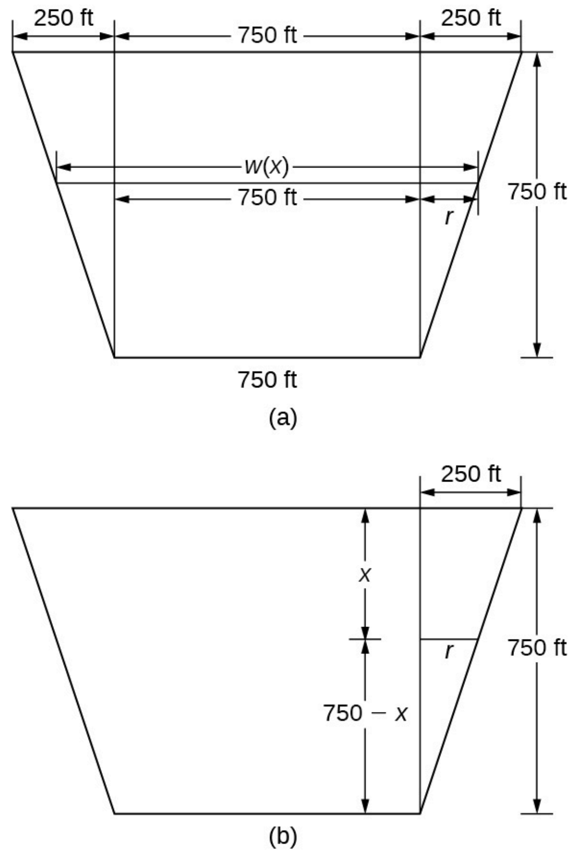


Figura 2.61 Utilizamos triángulos similares para determinar una función para la anchura de la presa. (a) Dimensiones supuestas de la presa; (b) se destacan los triángulos similares.

En la figura, vemos que $w(x) = 750 + 2r$. Utilizando las propiedades de los triángulos semejantes, obtenemos $r = 250 - (1/3)\,x$. Por lo tanto,

$$w(x) = 1.250 - \frac{2}{3}x \text{ (paso 2).}$$

Utilizando una densidad de peso de 62,4 lb/ft^3 (paso 3) y aplicando la Ecuación 2.13, obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho w(x)s(x)dx \\ &= \int_{10}^{540} 62{,}4\left(1.250 - \frac{2}{3}x\right)(x-10)\,dx = 62{,}4\int_{10}^{540} -\frac{2}{3}\left[x^2 - 1885x + 18750\right]dx \\ &= -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{1885x^2}{2} + 18750x\right]\Big|_{10}^{540} \approx 8.832.245.000 \text{ lb} = 4416122.5 \text{ t.} \end{aligned}$$

Observe el cambio de libras a toneladas (2000 lb = 1 ton) (paso 4).

b. Fíjate en que la sequía cambia nuestra función de profundidad, $s(x)$, y nuestros límites de integración. Tenemos $s(x) = x - 135$. El límite inferior de integración es 135. El límite superior sigue siendo 540. Evaluando la integral, obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho w(x)s(x)dx \\ &= \int_{135}^{540} 62{,}4\left(1.250 - \frac{2}{3}x\right)(x-135)\,dx \\ &= -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\int_{135}^{540}(x-1875)(x-135)\,dx = -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\int_{135}^{540}\left(x^2-2010x+253125\right)dx \\ &= -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\left[\tfrac{x^3}{3} - 1005x^2 + 253125x\right]\Big|_{135}^{540} \approx 5.015.230.000\text{ lb} = 2507615\text{ t.} \end{aligned}$$

2.28 Cuando el embalse está en su nivel medio, la superficie del agua está unos 50 ft por debajo de donde estaría si el embalse estuviera lleno. ¿Cuál es la fuerza sobre la cara de la represa en estas circunstancias?

MEDIOS

Para saber más sobre la presa Hoover, consulte este artículo (http://www.openstax.org/l/20_HooverDam) publicado por History Channel.

SECCIÓN 2.5 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule el trabajo realizado.

218. Halle el trabajo realizado cuando una fuerza constante $F = 12$ lb mueve una silla de $x = 0{,}9$ al $x = 1{,}1$ pies.

219. ¿Cuánto trabajo se realiza cuando una persona levanta 50 lb de cajas de cómics en un camión que está a 3 ft del suelo?

220. ¿Cuál es el trabajo realizado levantando un niño de 20 kg desde el suelo hasta una altura de 2 m? (Tenga en cuenta que una masa de1 kg pesa 9,8 N cerca de la superficie de la Tierra).

221. Halle el trabajo realizado al empujar una caja por el suelo por 2 m, cuando se aplica una fuerza constante de $F = 100$ N.

222. Calcule el trabajo realizado para una fuerza $F = 12/x^2$ N de $x = 1$ a $x = 2$ m.

223. ¿Cuál es el trabajo realizado al mover una partícula desde $x = 0$ hasta $x = 1$ m si la fuerza que actúa sobre ella es $F = 3x^2$ N?

En los siguientes ejercicios, halle la masa del objeto unidimensional.

224. Un cable que tiene 2 pies de largo (a partir de $x = 0$) y tiene una función de densidad de $\rho(x) = x^2 + 2x$ lb/ft

225. Una antena de automóvil que tiene 3 ft de largo (a partir de $x = 0$) y tiene una función de densidad de $\rho(x) = 3x + 2$ lb/ft

226. Una barra de metal que tiene 8 in de longitud (a partir de $x = 0$) y tiene una función de densidad de $\rho(x) = e^{1/2x}$ lb/in.

227. Un lápiz que tiene 4 in. de longitud (a partir de $x = 2$) y tiene una función de densidad de $\rho(x) = 5/x$ oz/in.

228. Una regla que tiene 12 in. de longitud (a partir de $x = 5$) y tiene una función de densidad de $\rho(x) = \ln(x) + (1/2)x^2$ oz/in.

En los siguientes ejercicios, halle la masa del objeto bidimensional centrado en el origen.

229. Un disco de hockey de gran tamaño con un radio de 2 in con función de densidad $\rho(x) = x^3 - 2x + 5$

230. Un frisbee con un radio de 6 in con función de densidad $\rho(x) = e^{-x}$

231. Una placa con un radio de radio 10 in con función de densidad $\rho(x) = 1 + \cos(\pi x)$ grandes.

232. Una tapa de tarro con un radio de 3 in con función de densidad $\rho(x) = \ln(x + 1)$

233. Un disco con 5 cm de radio y con función de densidad $\rho(x) = \sqrt{3x}$

234. Un resorte de 12 in se estira hasta 15 in por una fuerza de 75 lb. ¿Cuál es la constante del resorte?

235. Un resorte tiene una longitud natural de 10 cm. Se necesitan 2 J para estirar el resorte hasta 15 cm. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte de 15 cm a 20 cm?

236. Un resorte de 1 m requiere 10 J para estirar el resorte hasta $1{,}1$ m. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte de 1 m a $1{,}2$ m?

237. Un resorte requiere 5 J para estirar el resorte de 8 cm a 12 cm, y adicionalmente 4 J para estirar el resorte de 12 cm a 14 cm. ¿Cuál es la longitud natural del resorte?

238. Un amortiguador se comprime 1 in por un peso de 1 t. ¿Cuál es la constante del resorte?

239. Una fuerza de $F = 20x – x^3$ N estira un resorte no lineal en x metros. ¿Qué trabajo se requiere para estirar el resorte de $x = 0$ hasta $x = 2$ m?

240. Halle el trabajo realizado al enrollar un cable colgante de una longitud de 100 ft y un peso-densidad de 5 lb/ft.

241. Para el cable del ejercicio anterior, ¿cuánto trabajo se realiza para levantarlo 50 ft?

242. Para el cable del ejercicio anterior, ¿cuánto trabajo adicional se realiza al colgar 200 lb de peso en el extremo del cable?

243. **[T]** Una pirámide de 500 ft de altura tiene una base cuadrada 800 ft por 800 pies. Halle el área A en la altura h. Si la roca utilizada para construir la pirámide pesa aproximadamente $w = 100\ \text{lb/ft}^3$, ¿cuánto trabajo costó levantar toda la roca?

244. **[T]** Para la pirámide del ejercicio anterior, suponga que había 1.000 trabajadores que trabajan cada uno 10 horas al día, 5 días a la semana, 50 semanas al año. Si los trabajadores en promedio levantaron 10 rocas de 100 libras 2 ft/h, ¿cuánto tiempo se tardó en construir la pirámide?

245. **[T]** La fuerza de gravedad sobre una masa m ¿es $F = -\left((GMm)/x^2\right)$ newtons. Para un cohete de masa $m = 1.000\,\text{kg}$, calcule el trabajo para elevarlo desde $x = 6.400$ al $x = 6500$ km. Indique sus respuestas con tres cifras significativas. (*Nota*: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2$ y $M = 6 \times 10^{24}$ kg.) grandes.

246. **[T]** Para el cohete del ejercicio anterior, calcule el trabajo para elevarlo desde $x = 6.400$ al $x = \infty$.

247. **[T]** Una presa rectangular tiene 40 ft de altura y 60 ft de ancho. Calcule la fuerza total F en la presa cuando

a. la superficie del agua está en la parte superior de la presa y
b. la superficie del agua está a la mitad de la presa.

248. **[T]** Halle el trabajo necesario para bombear toda el agua de un cilindro que tiene una base circular de un radio de 5 ft y altura de 200 pies. Utilice el hecho de que la densidad del agua es 62 lb/ft^3.

249. **[T]** Halle el trabajo necesario para bombear toda el agua del cilindro en el ejercicio anterior si el cilindro está lleno solo hasta la mitad.

250. **[T]** ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear una piscina si el área de la base es de 800 ft^2, el agua es de 4 ft de profundidad, y la parte superior es de 1 ft sobre el nivel del agua? Supongamos que la densidad del agua es de 62 lb/ft^3.

251. Un cilindro de profundidad H y el área de la sección transversal A está lleno de agua a la densidad ρ. Calcule el trabajo para bombear toda el agua afuera por la parte superior.

252. Para el cilindro del ejercicio anterior, calcule el trabajo para bombear toda el agua hasta la parte superior si el cilindro está lleno solo hasta la mitad.

253. Un tanque con forma de cono tiene una sección transversal que aumenta con su profundidad: $A = \left(\pi r^2 h^2\right)/H^3$. Demuestre que el trabajo para vaciarlo es la mitad del trabajo para un cilindro con la misma altura y base.

2.6 Momentos y centros de masa

Objetivos de aprendizaje

2.6.1 Encontrar el centro de masa de objetos distribuidos a lo largo de una línea.
2.6.2 Localizar el centro de masa de una placa delgada.
2.6.3 Utilizar la simetría para ayudar a localizar el centroide de una placa delgada.
2.6.4 Aplicar el teorema de Pappus para el volumen.

En esta sección, analizaremos los centros de masa (también llamados *centroides*, bajo ciertas condiciones) y los momentos. La idea básica del centro de masa es la noción de un punto de equilibrio. Muchos hemos visto a artistas que hacen girar un plato en la punta de un palo e intentan mantener varios de ellos girando sin caerse. Si observamos un plato simple (sin girarlo), hay un punto ideal en el plato donde se equilibra perfectamente en el palo. Si ponemos el palo en cualquier otro lugar que no sea ese punto ideal, el plato no se equilibra y se cae al suelo. (Por eso los artistas los hacen girar: el giro ayuda a que los platos no se caigan aunque el palo no esté exactamente en el lugar correcto). Matemáticamente, ese punto ideal se denomina *centro de masa de la placa*.

En esta sección, primero examinaremos esos conceptos en un contexto unidimensional, y luego ampliaremos nuestro desarrollo para considerar los centros de masa de las regiones bidimensionales y la simetría. Por último, utilizaremos los centroides para encontrar el volumen de ciertos sólidos aplicando el teorema de Pappus.

Centro de masa y momentos

Empecemos por ver el centro de masa en un contexto unidimensional. Piense en un alambre o varilla larga y delgada de masa despreciable que descansa sobre un punto de apoyo, como se muestra en la Figura 2.62(a). Ahora supongamos que colocamos objetos con masas m_1 y m_2 a las distancias d_1 y d_2 del punto de apoyo, respectivamente, como se muestra en la Figura 2.62(b).

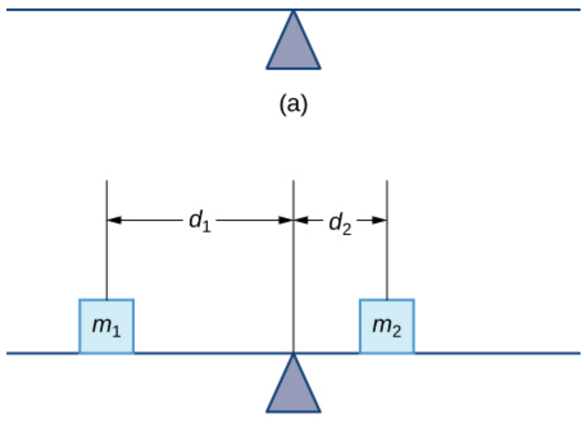


Figura 2.62 (a) Una varilla delgada descansa sobre un punto de apoyo. (b) Se colocan masas sobre la varilla.

El ejemplo más común en la vida real de un sistema de este tipo es el balancín de un parque infantil, con niños de distinto peso sentados a diferentes distancias del centro. En un balancín, si un niño se sienta en cada extremo, el más pesado se hunde y el más ligero se eleva en el aire. Sin embargo, si el niño más pesado se desliza hacia el centro, el balancín se equilibra. Aplicando este concepto a las masas de la varilla, observamos que las masas se equilibran entre sí si y solo si $m_1 d_1 = m_2 d_2$.

En el ejemplo del balancín, equilibramos el sistema moviendo las masas (los niños) con respecto al punto de apoyo. Sin embargo, lo que realmente nos interesa son los sistemas en los que no se permite el movimiento de las masas, y en su lugar equilibramos el sistema moviendo el punto de apoyo. Supongamos que tenemos dos masas puntuales, m_1 y m_2, situadas en una línea numérica en los puntos x_1 y x_2, respectivamente (Figura 2.63). El centro de masa, $\bar{x}$, es el punto donde se debe colocar el punto de apoyo para que el sistema se equilibre.

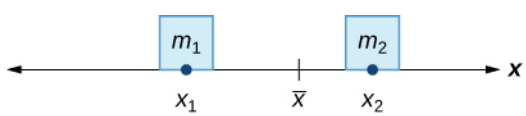


Figura 2.63 El centro de masa $\bar{x}$ es el punto de equilibrio del sistema.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} m_1 \left| \bar{x} - x_1 \right| &= m_2 \left| x_2 - \bar{x} \right| \\ m_1 \left(\bar{x} - x_1 \right) &= m_2 \left(x_2 - \bar{x} \right) \\ m_1 \bar{x} - m_1 x_1 &= m_2 x_2 - m_2 \bar{x} \\ \bar{x} \left(m_1 + m_2 \right) &= m_1 x_1 + m_2 x_2 \\ \bar{x} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

La expresión en el numerador, $m_1 x_1 + m_2 x_2$, se denomina *primer momento del sistema con respecto al origen.* Si el contexto es claro, a menudo se prescinde de la palabra *primero* y se denomina simplemente **momento** del sistema. La expresión en el denominador, $m_1 + m_2$, es la masa total del sistema. Por lo tanto, el **centro de masa** del sistema es el punto en el que se podría concentrar la masa total del sistema sin cambiar el momento.

Esta idea no se limita solo a dos masas puntuales. En general, si *n* masas, $m_1, m_2,\ldots, m_n$, se colocan en una línea numérica en los puntos $x_1, x_2,\ldots, x_n$, respectivamente, entonces el centro de masa del sistema viene dado por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Teorema 2.9

Centro de masa de objetos en una línea

Supongamos que $m_1, m_2,\ldots, m_n$ son masas puntuales situadas en una línea numérica en los puntos $x_1, x_2,\ldots, x_n$, respectivamente y supongamos que $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ denotan la masa total del sistema. Entonces, el momento del sistema con respecto al origen viene dado por

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{2.14}$$

y el centro de masa del sistema viene dado por

$$\bar{x} = \frac{M}{m}. \tag{2.15}$$

Aplicamos este teorema en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.29

Encontrar el centro de masa de los objetos a lo largo de una línea

Supongamos que se colocan cuatro masas puntuales en una línea numérica de la siguiente manera:

$$m_1 = 30\text{ kg, colocado en } x_1 = -2\text{ m} \qquad m_2 = 5\text{ kg, colocado en } x_2 = 3\text{ m}$$
$$m_3 = 10\text{ kg, colocado en } x_3 = 6\text{ m} \qquad m_4 = 15\text{ kg, colocado en } x_4 = -3\text{ m.}$$

Calcule el momento del sistema respecto al origen y halle el centro de masa del sistema.

Solución

En primer lugar, tenemos que calcular el momento del sistema:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{4} m_i x_i \\ &= -60 + 15 + 60 - 45 = -30. \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar el centro de masa, necesitamos la masa total del sistema:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{4} m_i \\ &= 30 + 5 + 10 + 15 = 60\text{ kg.} \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{-30}{60} = -\frac{1}{2}.$$

El centro de masa se encuentra a 1/2 m a la izquierda del origen.

2.29 Supongamos que se colocan cuatro masas puntuales en una línea numérica de la siguiente manera:

$$m_1 = 12 \text{ kg, colocado en } x_1 = -4 \text{ m} \qquad m_2 = 12 \text{ kg, colocado en } x_2 = 4 \text{ m}$$
$$m_3 = 30 \text{ kg, colocado en } x_3 = 2 \text{ m} \qquad m_4 = 6 \text{ kg, colocado en } x_4 = -6 \text{ m.}$$

Calcule el momento del sistema respecto al origen y halle el centro de masa del sistema.

Podemos generalizar este concepto para encontrar el centro de masa de un sistema de masas puntuales en un plano. Supongamos que m_1 es una masa puntual situada en el punto (x_1, y_1) en el plano. Entonces el momento M_x de la masa con respecto al eje *x* viene dado por $M_x = m_1 y_1$. Del mismo modo, el momento M_y con respecto al eje *y* viene dado por $M_y = m_1 x_1$. Observe que la coordenada *x* del punto se utiliza para calcular el momento con respecto al eje *y*, y viceversa. La razón es que la coordenada *x* da la distancia de la masa puntual al eje *y*, en tanto que la coordenada *y* da la distancia al eje *x* (vea la siguiente figura).

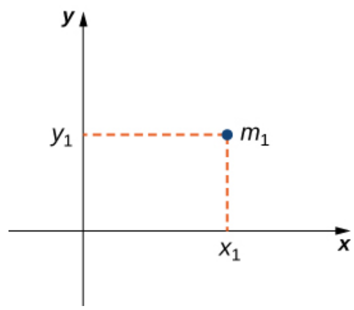


Figura 2.64 La masa puntual m_1 se encuentra en el punto (x_1, y_1) en el plano.

Si tenemos varias masas puntuales en el plano *xy*, podemos utilizar los momentos respecto a los ejes *x* y *y* para calcular las coordenadas *x* y *y* del centro de masa del sistema.

Teorema 2.10

Centro de masa de objetos en un plano

Supongamos que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son masas puntuales situadas en el plano *xy* en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, respectivamente y supongamos que $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ denotan la masa total del sistema. Entonces los momentos M_x y M_y del sistema con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, vienen dados por

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{y} \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{2.16}$$

Además, las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ del sistema son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}. \tag{2.17}$$

El siguiente ejemplo demuestra cómo aplicar este teorema.

EJEMPLO 2.30

Encontrar el centro de masa de los objetos en un plano

Supongamos que tres masas puntuales se colocan en el plano *xy* de la siguiente manera (supongamos que las coordenadas están dadas en metros):

$$\begin{aligned} m_1 &= 2 \text{ kg, colocado en } (-1, 3), \\ m_2 &= 6 \text{ kg, colocado en } (1, 1), \\ m_3 &= 4 \text{ kg, colocado en } (2, -2). \end{aligned}$$

Halle el centro de masa del sistema.

Solución

Primero calculamos la masa total del sistema:

$$m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 2 + 6 + 4 = 12 \text{ kg}.$$

A continuación, hallamos los momentos con respecto a los ejes *x* y *y*:

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = -2 + 6 + 8 = 12, \\ M_x &= \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 6 + 6 - 8 = 4. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{12}{12} = 1 \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

El centro de masa del sistema es $(1, 1/3)$, en metros.

2.30 Supongamos que tres masas puntuales se colocan en una línea numérica de la siguiente manera (asumimos que las coordenadas se dan en metros):

$$\begin{aligned} m_1 &= 5 \text{ kg, colocado en } (-2, -3), \\ m_2 &= 3 \text{ kg, colocado en } (2, 3), \\ m_3 &= 2 \text{ kg, colocado en } (-3, -2). \end{aligned}$$

Halle el centro de masa del sistema.

Centro de masa de las placas finas

Hasta ahora hemos visto sistemas de masas puntuales en una línea y en un plano. Ahora, en vez de tener la masa de un sistema concentrada en puntos discretos, queremos observar sistemas en los que la masa del sistema se distribuye continuamente a través de una fina lámina de material. Para ello, suponemos que la hoja es lo suficientemente delgada como para poder tratarla como si fuera bidimensional. Dicha hoja se denomina **lámina**. A continuación desarrollaremos técnicas para encontrar el centro de masa de una lámina. En esta sección, también suponemos que la densidad de la lámina es constante.

Las láminas suelen representarse mediante una región bidimensional en un plano. El centro geométrico de dicha región se denomina **centroide**. Como supusimos que la densidad de la lámina es constante, el centro de masa de la lámina solo depende de la forma de la región correspondiente en el plano; no depende de la densidad. En este caso, el centro de masa de la lámina corresponde al centroide de la región delineada en el plano. Al igual que con los sistemas de masas puntuales, necesitamos encontrar la masa total de la lámina, así como los momentos de la lámina con respecto a los ejes *x* y *y*.

Consideraremos primero una lámina con forma de rectángulo. Recordemos que el centro de masa de una lámina es el punto de equilibrio de la misma. En un rectángulo, ese punto es el centro horizontal y vertical del rectángulo. En base a este entendimiento, está claro que el centro de masa de una lámina rectangular es el punto donde se cruzan las diagonales, lo cual es un resultado del **principio de simetría**, y se afirma aquí sin pruebas.

Teorema 2.11

El principio de simetría

Si una región *R* es simétrica respecto a una línea *l*, entonces el centroide de *R* se encuentra en *l*.

Pasemos a las láminas más generales. Supongamos que tenemos una lámina limitada por encima por el gráfico de una función continua $f(x)$, abajo por el eje *x* y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente, como se muestra en la siguiente figura.

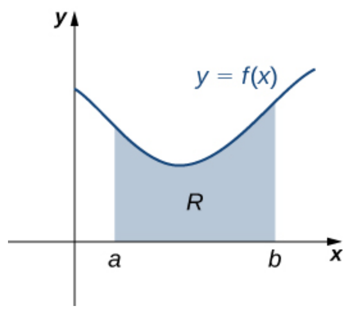


Figura 2.65 Una región en el plano que representa una lámina.

Al igual que con los sistemas de masas puntuales, para encontrar el centro de masa de la lámina necesitamos encontrar la masa total de esta, así como los momentos de la lámina con respecto a los ejes *x* y *y*. Como ya hemos hecho muchas veces, aproximamos estas cantidades dividiendo el intervalo $[a, b]$ y construyendo rectángulos.

Para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Recordemos que podemos elegir cualquier punto dentro del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ como nuestra x_i^*. En este caso, queremos x_i^* para ser la coordenada *x* del centroide de nuestros rectángulos. Así, para $i = 1, 2,\ldots, n$, seleccionamos $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ de manera que x_i^* es el punto medio del intervalo. Eso es, $x_i^* = \left(x_{i-1} + x_i\right)/2$. Ahora, para $i = 1, 2,\ldots, n$, construya un rectángulo de altura $f\left(x_i^*\right)$ sobre $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. El centro de masa de este rectángulo es $\left(x_i^*, \left(f(x_i^*)\right)/2\right)$, como se muestra en la siguiente figura.

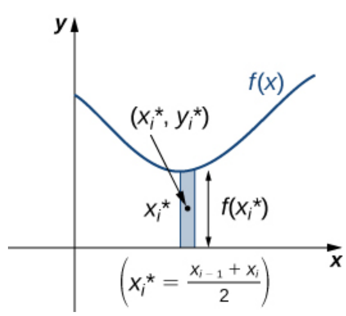


Figura 2.66 Un rectángulo representativo de la lámina.

A continuación, tenemos que encontrar la masa total del rectángulo. Supongamos que ρ representa la densidad de la lámina (nótese que ρ es una constante). En este caso, ρ se expresa en términos de masa por unidad de superficie. Así, para encontrar la masa total del rectángulo, multiplicamos el área del rectángulo por ρ. Entonces, la masa del rectángulo viene dada por $\rho f(x_i^*)\Delta x$.

Para obtener la masa aproximada de la lámina, sumamos las masas de todos los rectángulos para obtener

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho f(x_i^*)\Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann. Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$ da la masa exacta de la lámina:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho f(x_i^*)\Delta x = \rho \int_a^b f(x)dx.$$

A continuación, calculamos el momento de la lámina con respecto al eje *x*. Volviendo al rectángulo representativo, recordemos que su centro de masa es $\left(x_i^*, \left(f(x_i^*)\right)/2\right)$. Recordemos también si tratamos el rectángulo como si fuera una masa puntual situada en el centro de masa no cambia el momento. Así, el momento del rectángulo con respecto al eje *x* viene dado por la masa del rectángulo, $\rho f(x_i^*)\Delta x$, multiplicado por la distancia desde centro de masa al eje *x*: $\left(f(x_i^*)\right)/2$. Por lo tanto, el momento con respecto al eje *x* del rectángulo es $\rho\left(\left[f(x_i^*)\right]^2/2\right)\Delta x$. Al sumar los momentos de los rectángulos y tomando el límite de la suma de Riemann resultante, vemos que el momento de la lámina respecto al eje *x* es

$$M_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho\frac{\left[f(x_i^*)\right]^2}{2}\Delta x = \rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx.$$

Derivamos el momento con respecto al eje *y* de forma similar, observando que la distancia desde el centro de masa del rectángulo al eje *y* es x_i^*. Entonces el momento de la lámina con respecto al eje *y* viene dado por

$$M_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho x_i^* f(x_i^*)\Delta x = \rho\int_a^b x f(x)dx.$$

Hallamos las coordenadas del centro de masa dividiendo los momentos por la masa total para obtener $\bar{x} = M_y/m$ y $\bar{y} = M_x/m$. Si observamos detenidamente las expresiones de $M_x, M_y,$ y m, observamos que la constante ρ se cancela cuando $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se calculan.

Resumimos estas conclusiones en el siguiente teorema.

Teorema 2.12

Centro de masa de una placa delgada en el plano *xy*

Supongamos que *R* denota una región delimitada por el gráfico de una función continua $f(x)$, abajo por el eje *x* y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Supongamos que ρ denota la densidad de la lámina asociada. Entonces podemos hacer las siguientes afirmaciones:

i. La masa de la lámina es

$$m = \rho\int_a^b f(x)dx. \tag{2.18}$$

ii. Los momentos M_x y M_y de la lámina con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son

$$M_x = \rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx \text{ y } M_y = \rho\int_a^b x f(x)dx. \tag{2.19}$$

iii. Las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m}. \tag{2.20}$$

En el siguiente ejemplo, utilizamos este teorema para hallar el centro de masa de una lámina.

EJEMPLO 2.31

Hallar el centro de masa de una lámina

Supongamos que *R* es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y abajo por el eje *x* en el intervalo $[0, 4]$. Halle el centroide de la región.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

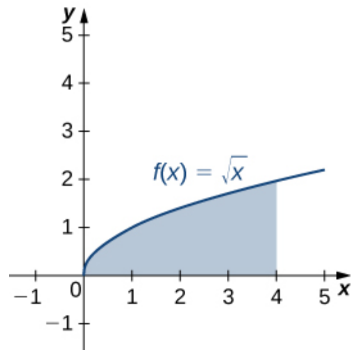


Figura 2.67 Encontrar el centro de masa de una lámina.

Como solo se nos pide el centroide de la región, y no la masa o los momentos de la lámina asociada, sabemos que la constante de densidad ρ eventualmente se cancela de los cálculos. Por lo tanto, por razones de conveniencia, supongamos que $\rho = 1$.

En primer lugar, tenemos que calcular la masa total:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx \\ &= \tfrac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{3}[8 - 0] = \tfrac{16}{3}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos los momentos:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx \\ &= \int_0^4 \frac{x}{2} dx = \tfrac{1}{4}x^2\Big|_0^4 = 4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_a^b x f(x)dx \\ &= \int_0^4 x\sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{3/2} dx \\ &= \tfrac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{5}[32 - 0] = \tfrac{64}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{64/5}{16/3} = \frac{64}{5}.\frac{3}{16} = \frac{12}{5} \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{16/3} = 4.\frac{3}{16} = \frac{3}{4}.$$

El centroide de la región es $(12/5, 3/4)$.

2.31 Supongamos que *R* es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^2$ y abajo por el eje *x* en el intervalo $[0, 2]$. Halle el centroide de la región.

Podemos adaptar este enfoque para encontrar también los centroides de regiones más complejas. Supongamos que nuestra región está limitada por el gráfico de una función continua $f(x)$, como antes, pero ahora, en vez de que el límite inferior de la región sea el eje *x*, supondremos que la región está limitada por debajo por el gráfico de una segunda función continua, $g(x)$, como se muestra en la siguiente figura.

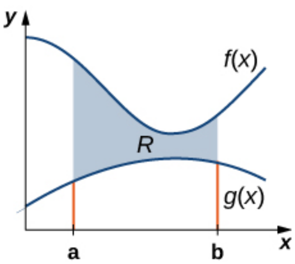


Figura 2.68 Una región entre dos funciones.

De nuevo, dividimos el intervalo $[a, b]$ y construimos rectángulos. En la siguiente figura se muestra un rectángulo representativo.

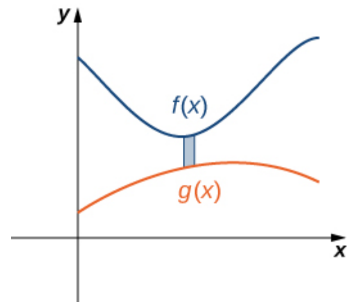


Figura 2.69 Un rectángulo representativo de la región entre dos funciones.

Observe que el centroide de este rectángulo es $\left(x_i^*, \left(f(x_i^*) + g(x_i^*)\right)/2\right)$. No vamos a repasar todos los detalles de la formulación de la suma de Riemann, pero veamos algunos de los pasos clave. En el desarrollo de las fórmulas para la masa de la lámina y el momento con respecto al eje *y*, la altura de cada rectángulo viene dada por $f(x_i^*) - g(x_i^*)$, lo que nos dirige a la expresión $f(x) - g(x)$ en los integrandos.

En el desarrollo de la fórmula del momento con respecto al eje *x*, el momento de cada rectángulo se halla al multiplicar el área del rectángulo, $\rho\left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right]\Delta x$, por la distancia del centroide al eje *x*, $\left(f(x_i^*) + g(x_i^*)\right)/2$, que da $\rho(1/2)\left\{\left[f(x_i^*)\right]^2 - \left[g(x_i^*)\right]^2\right\}\Delta x$. Al resumir estas conclusiones, llegamos al siguiente teorema.

Teorema 2.13

Centro de masa de una lámina delimitada por dos funciones

Supongamos que *R* denota una región delimitada por el gráfico de una función continua $f(x)$, abajo por el gráfico de la función continua $g(x)$, y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Supongamos que ρ denota la densidad de la lámina asociada. Entonces podemos hacer las siguientes afirmaciones:

i. La masa de la lámina es

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \tag{2.21}$$

ii. Los momentos M_x y M_y de la lámina con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2}\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx \text{ y } M_y = \rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\, dx. \tag{2.22}$$

iii. Las coordenadas del centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$ son

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \text{ y } \overline{y} = \frac{M_x}{m}. \tag{2.23}$$

Ilustramos este teorema con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.32

Hallar el centroide de una región delimitada por dos funciones

Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 1 - x^2$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = x - 1$. Halle el centroide de la región.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

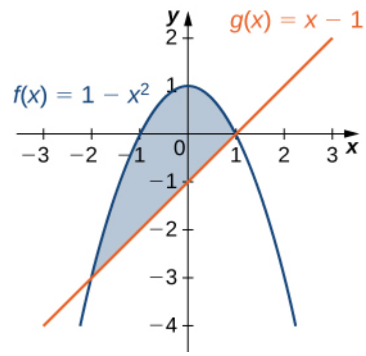


Figura 2.70 Hale el centroide de una región entre dos curvas.

Los gráficos de las funciones se cruzan en $(-2, -3)$ y $(1, 0)$, por lo que integramos de -2 a 1. Una vez más, por comodidad, supongamos que $\rho = 1$.

En primer lugar, tenemos que calcular la masa total:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \\ &= \int_{-2}^{1} \left[1 - x^2 - (x-1)\right] dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx \\ &= \left[2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]\Big|_{-2}^{1} = \left[2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right] - \left[-4 + \tfrac{8}{3} - 2\right] = \tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos los momentos:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{1}{2}\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{1} \left(\left(1 - x^2\right)^2 - (x-1)^2\right) dx = \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{1} \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right]\Bigg|_{-2}^{1} = -\tfrac{27}{10} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= \int_{-2}^{1} x\left[(1 - x^2) - (x-1)\right] dx = \int_{-2}^{1} x\left[2 - x^2 - x\right] dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(2x - x^4 - x^2\right) dx$$

$$= \left[x^2 - \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-2}^{1} = -\tfrac{9}{4}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = -\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{9} = -\frac{1}{2} \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = -\frac{27}{10} \cdot \frac{2}{9} = -\frac{3}{5}.$$

El centroide de la región es $(-(1/2), -(3/5))$.

2.32 Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 6 - x^2$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 3 - 2x$. Halle el centroide de la región.

El principio de simetría

El principio de simetría lo enunciamos antes, cuando observamos el centroide de un rectángulo. El principio de simetría puede ser muy útil para encontrar los centroides de las regiones simétricas. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.33

Encontrar el centroide de una región simétrica

Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 4 - x^2$ y abajo por el eje *x*. Halle el centroide de la región.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

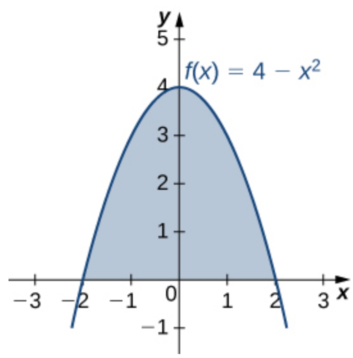


Figura 2.71 Podemos utilizar el principio de simetría para encontrar el centroide de una región simétrica.

La región es simétrica con respecto al eje *y*. Por lo tanto, la coordenada *x* del centroide es cero. Solo tenemos que calcular $\bar{y}$. Una vez más, para mayor facilidad, supongamos que $\rho = 1$.

En primer lugar, calculamos la masa total:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos los momentos. Solo necesitamos M_x:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left[4 - x^2\right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x\right]\Big|_{-2}^{2} = \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256}{15} \cdot \frac{3}{32} = \frac{8}{5}.$$

El centroide de la región es $(0, 8/5)$.

2.33 Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 1 - x^2$ y abajo por el eje x. Halle el centroide de la región.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

El mirador de cristal Skywalk del Gran Cañón

El Skywalk del Gran Cañón se abrió al público el 28 de marzo de 2007. Esta maravilla de la ingeniería es una plataforma de observación en forma de herradura suspendida a 4.000 ft sobre el río Colorado, en el borde oeste del Gran Cañón. Su suelo de cristal permite unas vistas impresionantes del cañón (vea la siguiente figura).



Figura 2.72 El Skywalk del Gran Cañón ofrece magníficas vistas del cañón (créditos: 10da_ralta, Wikimedia Commons).

El Skywalk es un diseño en voladizo, lo que significa que la plataforma de observación se extiende sobre el borde del cañón, sin ningún medio de apoyo visible por debajo. A pesar de la falta de postes o puntales de apoyo visibles, las estructuras en voladizo están diseñadas para ser muy estables y el Skywalk no es una excepción. La plataforma de observación está firmemente sujeta a postes de apoyo que se extienden 46 pies de profundidad en el lecho de roca. La estructura se construyó para resistir vientos de 100 mph y un terremoto de 8,0 de magnitud en un radio de 50 mi, y es capaz de soportar más de 70.000.000 lb.

Un factor que afecta a la estabilidad del Skywalk es el centro de gravedad de la estructura. Calculemos el centro de

gravedad del Skywalk y examinemos cómo cambia el centro de gravedad cuando los turistas salen a la plataforma de observación.

La plataforma de observación tiene forma de U. Las patas de la U tienen 10 ft de ancho y comienzan en tierra, bajo el centro de visitantes, a 48 ft del borde del cañón. La plataforma se extiende 70 ft sobre el borde del cañón.

Para calcular el centro de masa de la estructura, la tratamos como una lámina y utilizamos una región bidimensional en el plano *xy* para representar la plataforma. Comenzamos dividiendo la región en tres subregiones para poder considerar cada una de ellas por separado. La primera región, denotada R_1, consiste en la parte curva de la U. Modelamos R_1 como un anillo semicircular, con un radio interior de 25 pies y un radio exterior de 35 pies, centrado en el origen (vea la siguiente figura).

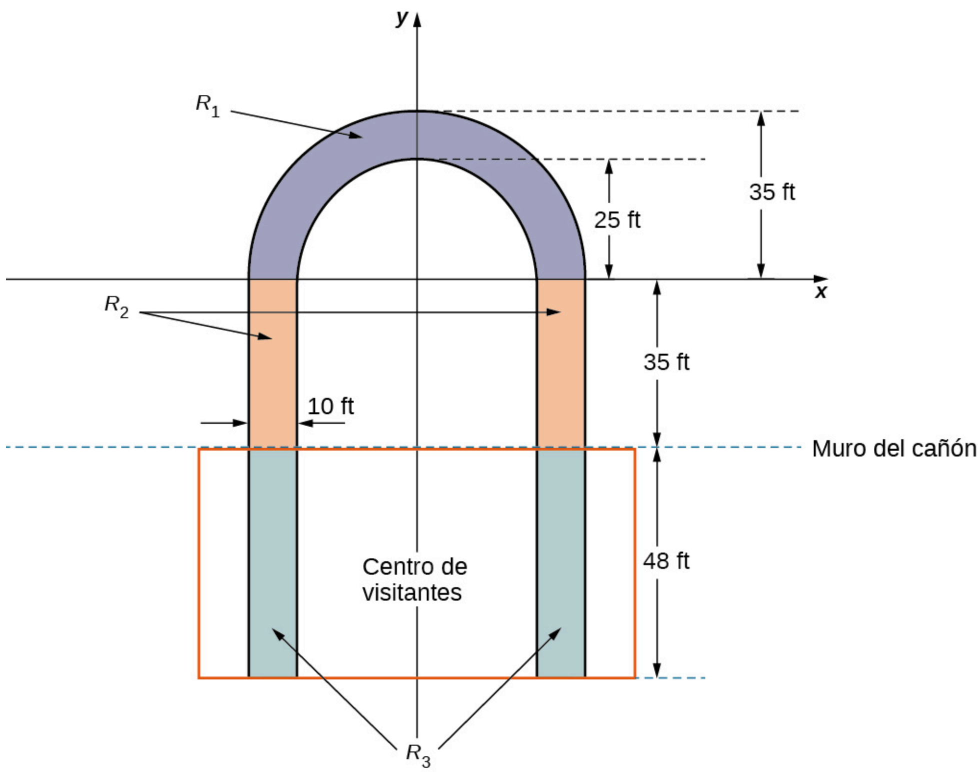


Figura 2.73 Modelamos el Skywalk con tres subregiones.

Las patas de la plataforma, que se extienden 35 ft entre R_1 y la pared del cañón comprenden la segunda subregión, R_2. Por último, los extremos de las patas, que se extienden 48 ft por debajo del centro de visitantes, comprenden la tercera subregión, R_3. Suponga que la densidad de la lámina es constante y asuma que el peso total de la plataforma es de 1.200.000 lb (sin incluir el peso del centro de visitantes; lo consideraremos más adelante). Utilice la sustitución en $g = 32 \text{ ft/s}^2$.

1. Calcule el área de cada una de las tres subregiones. Observe que las áreas de las regiones R_2 y R_3 deben incluir solo las zonas de las piernas, no el espacio abierto entre ellas. Redondee las respuestas al pie cuadrado más cercano.
2. Determine la masa asociada a cada una de las tres subregiones.
3. Calcule el centro de masa de cada una de las tres subregiones.
4. Ahora, considere cada una de las tres subregiones como una masa puntual situada en el centro de masa de la subregión correspondiente. Utilizando esta representación, calcule el centro de masa de toda la plataforma.
5. Supongamos que el centro de visitantes pesa 2.200.000 lb, con un centro de masa correspondiente al centro de masa de R_3. Considerando el centro de visitantes como una masa puntual, recalcule el centro de masa del sistema. ¿Cómo cambia el centro de masa?
6. Aunque el Skywalk se construyó para limitar el número de personas en la plataforma de observación a 120, la plataforma es capaz de soportar hasta 800 personas de 200 libras cada una. Si se permitiera la entrada de las

800 personas en el andén y todas se dirigieran al extremo más alejado del mismo, ¿cómo se vería afectado el centro de gravedad del sistema? (Incluya el centro de visitantes en los cálculos y represente las personas mediante una masa puntual situada en el borde más alejado de la plataforma, a 70 ft de la pared del cañón).

Teorema de Pappus

Esta sección termina con una discusión del **teorema de Pappus para el volumen**, que nos permite calcular el volumen de determinados tipos de sólidos utilizando el centroide (también existe un teorema de Pappus para el área superficial, pero su utilidad es mucho menor que la del teorema para el volumen).

Teorema 2.14

Teorema de Pappus para el volumen
Sea *R* una región del plano y sea *l* una línea del plano que no interseca a *R*. Entonces el volumen del sólido de revolución formado al girar *R* alrededor de *l* es igual al área de *R* multiplicada por la distancia *d* recorrida por el centroide de *R*.

Prueba

Podemos demostrar el caso en el que la región está limitada por el gráfico de una función $f(x)$ y abajo por el gráfico de una función $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$, y cuyo eje de revolución es el eje *y*. En este caso, el área de la región es $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$. Como el eje de rotación es el eje *y*, la distancia recorrida por el centroide de la región depende solo de la coordenada *x* del centroide, $\bar{x}$, que es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m},$$

donde

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ y } M_y = \rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Entonces,

$$d = 2\pi \frac{\rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

y así

$$d.\,A = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Sin embargo, si utilizamos el método de las capas cilíndricas, tenemos

$$V = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Así que,

$$V = d.\,A$$

y la prueba está completa.

□

EJEMPLO 2.34

Uso del teorema de Pappus para el volumen

Sea *R* un círculo de radio 2 con centro en $(4, 0)$. Utilice el teorema de Pappus para el volumen para calcular el volumen del toro que se genera al girar *R* alrededor del eje *y*.

Solución

La región y el toro se representan en la siguiente figura.

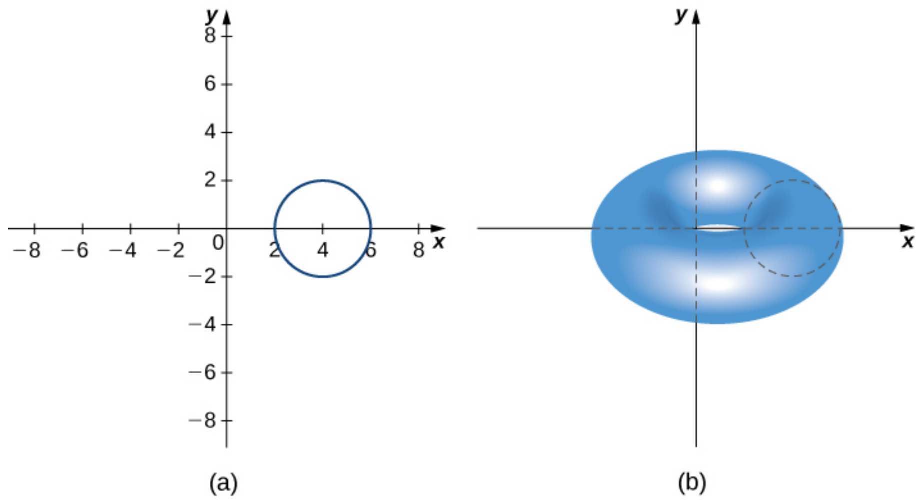


Figura 2.74 Determinación del volumen de un toro utilizando el teorema de Pappus. (a) Una región circular *R* en el plano; (b) el toro generado al girar *R* alrededor del eje *y*.

La región *R* es un círculo de radio 2, por lo que el área de *R* es $A = 4\pi$ unidades^2. Por el principio de simetría, el centroide de *R* es el centro del círculo. El centroide se desplaza alrededor del eje *y* en una trayectoria circular de radio 4, por lo que el centroide se desplaza $d = 8\pi$. Entonces, el volumen del toro es $A.\, d = 32\pi^2$ unidades^3.

2.34 Sea *R* un círculo de radio 1 con centro en $(3, 0)$. Utilice el teorema de Pappus para el volumen para calcular el volumen del toro que se genera al girar *R* alrededor del eje *y*.

SECCIÓN 2.6 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule el centro de masa para el conjunto de masas dadas.

254. $m_1 = 2$ en $x_1 = 1$ y $m_2 = 4$ en $x_2 = 2$

255. $m_1 = 1$ en $x_1 = -1$ y $m_2 = 3$ en $x_2 = 2$

256. $m = 3$ en $x = 0, 1, 2, 6$

257. Masas unitarias en $(x, y) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ grandes.

258. $m_1 = 1$ a las $(1, 0)$ y $m_2 = 4$ a las $(0, 1)$ grandes.

259. $m_1 = 1$ a las $(1, 0)$ y $m_2 = 3$ a las $(2, 2)$ grandes.

Para los siguientes ejercicios, calcule el centro de masa $\bar{x}$.

260. $\rho = 1$ para $x \in (-1, 3)$ grandes.

261. $\rho = x^2$ por $x \in (0, L)$ grandes.

262. $\rho = 1$ para $x \in (0, 1)$ y $\rho = 2$ por $x \in (1, 2)$ grandes.

263. $\rho = \operatorname{sen} x$ para $x \in (0, \pi)$ grandes.

264. $\rho = \cos x$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ grandes.

265. $\rho = e^x$ para $x \in (0, 2)$ grandes.

266. $\rho = x^3 + xe^{-x}$ para $x \in (0, 1)$ grandes.

267. $\rho = x \operatorname{sen} x$ para $x \in (0, \pi)$ grandes.

268. $\rho = \sqrt{x}$ para $x \in (1, 4)$ grandes.

269. $\rho = \ln x$ para $x \in (1, e)$ grandes.

Para los siguientes ejercicios, calcule el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$. Utilice la simetría para ayudar a localizar el centro de masa siempre que sea posible.

270. $\rho = 7$ en el cuadrado $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

271. $\rho = 3$ en el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, y $(0, b)$ grandes.

272. $\rho = 2$ para la región delimitada por $y = \cos(x)$, $y = -\cos(x)$, $x = -\frac{\pi}{2}$, y $x = \frac{\pi}{2}$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para dibujar la región y luego calcule el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$. Utilice la simetría para ayudar a localizar el centro de masa siempre que sea posible.

273. **[T]** La región delimitada por $y = \cos(2x)$, $x = -\frac{\pi}{4}$, y $x = \frac{\pi}{4}$

274. **[T]** La región entre $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$

275. **[T]** La región entre $y = \frac{5}{4}x^2$ y $y = 5$

276. **[T]** La región entre $y = \sqrt{x}$, $y = \ln(x)$, $x = 1$, y $x = 4$

277. **[T]** La región delimitada por $y = 0$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

278. **[T]** La región delimitada por $y = 0$, $x = 0$, y $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

279. **[T]** La región delimitada por $y = x^2$ y $y = x^4$ en el primer cuadrante

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema de Pappus para determinar el volumen de la forma.

280. Si giramos $y = mx$ alrededor del eje x entre $x = 0$ y $x = 1$

281. Si giramos $y = mx$ alrededor del eje y entre $x = 0$ y $x = 1$

282. Un cono recto creado al girar un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, y $(0, b)$ alrededor del eje y. ¿Coincide su respuesta con el volumen de un cono?

283. Un cilindro recto creado al girar un rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, y (a, b) alrededor del eje y. ¿Coincide su respuesta con el volumen de un cilindro?

284. Una esfera creada al girar un semicírculo de radio a alrededor del eje y. ¿Coincide su respuesta con el volumen de una esfera?

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para dibujar la región delimitada por la curva. Halle el área M y el centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ para las formas dadas. Utilice la simetría para ayudar a localizar el centro de masa siempre que sea posible.

285. **[T]** Cuarto de círculo: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$, y $x = 0$

286. **[T]** Triángulo: $y = x$, $y = 2 - x$, y $y = 0$

287. **[T]** Lente: $y = x^2$ y $y = x$

288. **[T]** Anillo: $y^2 + x^2 = 1$ y $y^2 + x^2 = 4$

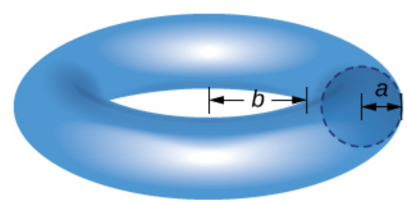
289. **[T]** Medio anillo: $y^2 + x^2 = 1$, $y^2 + x^2 = 4$, y $y = 0$

290. Halle el centro de masa generalizado en la franja entre $y = x^a$ y $y = x^b$ con la $a > b$. A continuación, utilice el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje *y*.

291. Halle el centro de masa generalizado entre $y = a^2 - x^2$, $x = 0$, y $y = 0$. A continuación, utilice el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje *y*.

292. Halle el centro de masa generalizado entre $y = b\,\text{sen}(ax)$, $x = 0$, y $x = \frac{\pi}{a}$. A continuación, utilice el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje *y*.

293. Utilice el teorema de Pappus para hallar el volumen de un toro (que se muestra aquí). Supongamos que un disco de radio a se sitúa con el extremo izquierdo del círculo en $x = b$, $b > 0$, y gira en torno al eje *y*.



294. Halle el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$ para un cable fino a lo largo del semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ con masa unitaria. (*Pista:* Utilice el teorema de Pappus)

2.7 Integrales, funciones exponenciales y logaritmos

Objetivos de aprendizaje

- **2.7.1** Escribir la definición del logaritmo natural como una integral.
- **2.7.2** Reconocer la derivada del logaritmo natural.
- **2.7.3** Integrar funciones que impliquen la función logarítmica natural.
- **2.7.4** Definir el número e a través de una integral.
- **2.7.5** Reconocer la derivada y la integral de la función exponencial.
- **2.7.6** Demostrar las propiedades de los logaritmos y las funciones exponenciales utilizando las integrales.
- **2.7.7** Expresar funciones logarítmicas y exponenciales generales en términos de logaritmos naturales y exponenciales.

En capítulos anteriores examinamos las funciones exponenciales y los logaritmos. Sin embargo, pasamos por alto algunos detalles clave en los debates anteriores. Por ejemplo, no hemos estudiado cómo tratar las funciones exponenciales con exponentes irracionales. La definición del número *e* es otra área que no se desarrolló totalmente. Ahora tenemos las herramientas para analizar estos conceptos de una manera más rigurosa desde el punto de vista matemático, y lo haremos en esta sección.

Para los fines de esta sección, supongamos que aún no hemos definido el logaritmo natural, el número e, ni ninguna de las fórmulas de integración y diferenciación asociadas a estas funciones. Al final de la sección habremos estudiado estos conceptos de forma matemáticamente rigurosa (y veremos que son coherentes con los conceptos que aprendimos anteriormente).

Comenzaremos la sección definiendo el logaritmo natural en términos de una integral. Esta definición constituye la base de esta sección. A partir de esta definición, derivaremos fórmulas de diferenciación, definiremos el número e, y ampliaremos estos conceptos a logaritmos y funciones exponenciales de cualquier base.

El logaritmo natural como integral

Recordemos la regla de la potencia para las integrales:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$$

Está claro que esto no funciona cuando $n = -1$, ya que nos obligaría a dividir entre cero. Entonces, ¿qué hacemos con $\int \frac{1}{x}dx$? Recordemos que el teorema fundamental del cálculo dice que $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ es una antiderivada de $1/x$. Por lo tanto, podemos hacer la siguiente definición.

Definición

Para $x > 0$, defina la función logarítmica natural por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt. \tag{2.24}$$

Para $x > 1$, esto es solo el área bajo la curva $y = 1/t$ a partir de 1 a x. Para $x < 1$, tenemos $\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$, por lo que en este caso es el negativo del área bajo la curva de x para 1 (vea la siguiente figura).

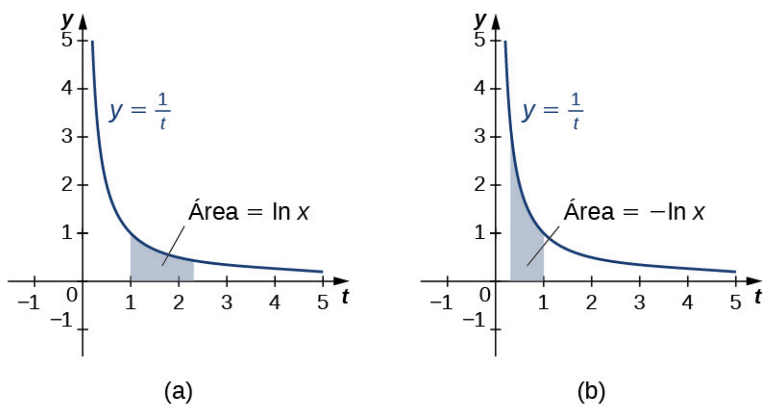


Figura 2.75 (a) Cuando $x > 1$, el logaritmo natural es el área bajo la curva $y = 1/t$ a partir de 1 para x. (b) Cuando $x < 1$, el logaritmo natural es el negativo del área bajo la curva de x al 1.

Observe que $\ln 1 = 0$. Además, la función $y = 1/t > 0$ por $x > 0$. Por lo tanto, según las propiedades de las integrales, está claro que $\ln x$ aumenta para $x > 0$.

Propiedades del logaritmo natural

Debido a la forma en que definimos el logaritmo natural, la siguiente fórmula de diferenciación surge inmediatamente como resultado del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 2.15

Derivada del logaritmo natural

Para $x > 0$, la derivada del logaritmo natural viene dada por

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Teorema 2.16

Corolario de la derivada del logaritmo natural
La función $\ln x$ es diferenciable; por lo tanto, es continua.

Un gráfico de $\ln x$ se muestra en la Figura 2.76. Observe que es continua en todo su dominio de $(0, \infty)$.

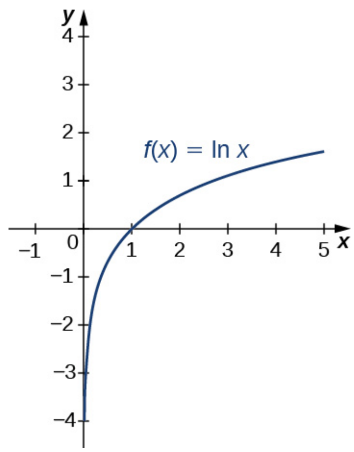


Figura 2.76 El gráfico de $f(x) = \ln x$ muestra que es una función continua.

EJEMPLO 2.35

Cálculo de las derivadas de los logaritmos naturales
Calcule las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(5x^3 - 2\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}(\ln(3x))^2$

Solución
En ambos casos tenemos que aplicar la regla de la cadena.

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(5x^3 - 2\right) = \frac{15x^2}{5x^3-2}$
b. $\frac{d}{dx}(\ln(3x))^2 = \frac{2(\ln(3x)).3}{3x} = \frac{2(\ln(3x))}{x}$

2.35 Calcule las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(2x^2 + x\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x^3\right)\right)^2$

Observe que si utilizamos la función de valor absoluto y creamos una nueva función $\ln\ |x|$, podemos ampliar el dominio del logaritmo natural para incluir $x < 0$. Entonces $(d/(dx))\ln\ |x| = 1/x$. Esto da lugar a la conocida fórmula de integración.

Teorema 2.17

Integral de $(1/u)\, du$
El logaritmo natural es la antiderivada de la función $f(u) = 1/u$:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C.$$

EJEMPLO 2.36

Cálculo de integrales que implica logaritmos naturales

Calcule la integral $\int \frac{x}{x^2+4} dx$.

Solución

Utilizando u–sustitución, supongamos que $u = x^2 + 4$. Entonces $du = 2x\, dx$ y tenemos

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ln |u| + C = \frac{1}{2}\ln \left|x^2+4\right| + C = \frac{1}{2}\ln \left(x^2+4\right) + C.$$

2.36 Calcule la integral $\int \frac{x^2}{x^3+6} dx$.

Aunque hemos llamado a nuestra función "logaritmo", en realidad no hemos demostrado que ninguna de las propiedades de los logaritmos se cumpla para esta función. Lo haremos aquí.

Teorema 2.18

Propiedades del logaritmo natural
Si los valores de $a, b > 0$ y r es un número racional, entonces

i. $\ln 1 = 0$
ii. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
iii. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
iv. $\ln(a^r) = r \ln a$

Prueba

i. Por definición, $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$

ii. Tenemos

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt.$$

Use la sustitución u en la última integral de esta expresión. Supongamos que $u = t/a$. Entonces $du = (1/a)\, dt$. Además, cuando $t = a, u = 1$, y cuando $t = ab, u = b$. Así que obtenemos

$$\ln(ab) = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{a} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{u} du = \ln a + \ln b.$$

iv. Tenga en cuenta que

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^r\right) = \frac{rx^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x}.$$

Además,

$$\frac{d}{dx}(r \ln x) = \frac{r}{x}.$$

Como las derivadas de estas dos funciones son iguales, según el teorema fundamental del cálculo, deben diferir en una constante. Así que tenemos

$$\ln\left(x^r\right) = r \ln x + C$$

para alguna constante C. Si tomamos $x = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(1^r) &= r \ln(1) + C \\ 0 &= r(0) + C \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Así que $\ln(x^r) = r \ln x$ y la prueba está completa. Observe que podemos extender esta propiedad a los valores irracionales de r más adelante en esta sección.
La parte iii. se deduce de las partes ii. y iv. y la prueba se deja a su criterio.

□

EJEMPLO 2.37

Uso de las propiedades de los logaritmos
Utilice las propiedades de los logaritmos para simplificar la siguiente expresión en un solo logaritmo:

$$\ln 9 - 2 \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{3}\right).$$

Solución
Tenemos

$$\ln 9 - 2 \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(3^2\right) - 2 \ln 3 + \ln\left(3^{-1}\right) = 2 \ln 3 - 2 \ln 3 - \ln 3 = -\ln 3.$$

2.37 Utilice las propiedades de los logaritmos para simplificar la siguiente expresión en un solo logaritmo:

$$\ln 8 - \ln 2 - \ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

Definición del número *e*

Ya que definimos el logaritmo natural, podemos utilizar esa función para definir el número e.

Definición

El número e se define como el número real tal que

$$\ln e = 1.$$

Para decirlo de otra manera, el área bajo la curva $y = 1/t$ entre $t = 1$ y $t = e$ ¿es 1 (Figura 2.77). Se deja a su criterio la prueba de que ese número existe y es único. (*Pista*: Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar la existencia y el hecho de que $\ln x$ es creciente para demostrar su unicidad).

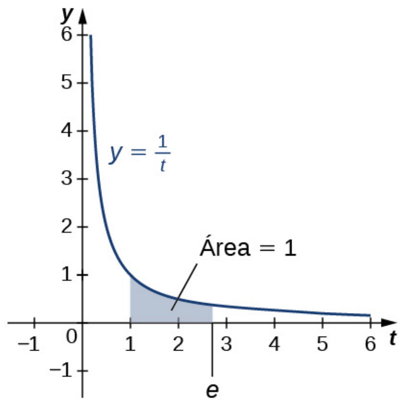


Figura 2.77 El área bajo la curva de 1 al e es igual a uno.

El número e puede demostrarse que es irracional, aunque no lo haremos aquí (vea el proyecto estudiantil en la Serie Taylor y Maclaurin). Su valor aproximado viene dado por

$$e \approx 2{,}71828182846.$$

La función exponencial

Ahora nos centraremos en la función e^x. Observe que el logaritmo natural es biunívoco y, por tanto, tiene una función inversa. Por ahora, denotamos esta función inversa por $\exp x$. Entonces,

$$\exp(\ln x) = x \text{ para } x > 0 \text{ y } \ln(\exp x) = x \text{ para todo } x.$$

La siguiente figura muestra los gráficos de $\exp x$ y $\ln x$.

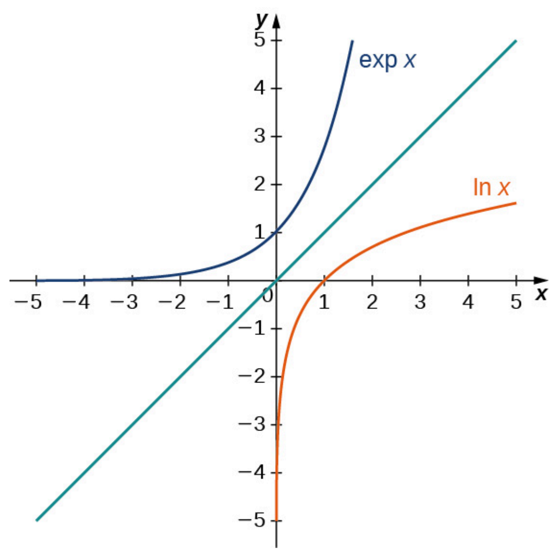


Figura 2.78 Los gráficos de $\ln x$ y $\exp x$.

Nuestra hipótesis es que $\exp x = e^x$. Para valores racionales de x, esto es fácil de mostrar. Si los valores de x es racional, entonces tenemos $\ln(e^x) = x \ln e = x$. Así, cuando x es racional, $e^x = \exp x$. Para valores irracionales de x, simplemente definimos e^x como función inversa de $\ln x$.

Definición

Para cualquier número real x, defina $y = e^x$ para ser el número para el que

$$\ln y = \ln\left(e^x\right) = x. \quad \textbf{(2.25)}$$

Entonces tenemos $e^x = \exp(x)$ para todo x, y por lo tanto

$$e^{\ln x} = x \text{ para } x > 0 \text{ y } \ln\left(e^x\right) = x \quad \textbf{(2.26)}$$

para todos los x.

Propiedades de la función exponencial

Dado que la función exponencial se definió en términos de una función inversa, y no en términos de una potencia de e, debemos comprobar que las leyes generales de los exponentes se cumplen para la función e^x.

Teorema 2.19

Propiedades de la función exponencial

Si los valores de p y q son números reales cualquiera y r es un número racional, entonces

i. $e^p e^q = e^{p+q}$
ii. $\frac{e^p}{e^q} = e^{p-q}$
iii. $(e^p)^r = e^{pr}$

Prueba

Observe que si p y q son racionales, las propiedades se mantienen. Sin embargo, si p o q son irracionales, debemos aplicar la definición de función inversa de e^x y verificar las propiedades. Aquí solo verificamos la primera propiedad; verifique las dos restantes. Tenemos

$$\ln\left(e^p e^q\right) = \ln\left(e^p\right) + \ln\left(e^q\right) = p + q = \ln\left(e^{p+q}\right).$$

Dado que $\ln x$ es biunívoca, entonces

$$e^p e^q = e^{p+q}.$$

□

Al igual que con la parte iv. de las propiedades del logaritmo, podemos extender la propiedad iii. a los valores irracionales de r, y lo haremos al final de la sección.

También queremos verificar la fórmula de diferenciación de la función $y = e^x$. Para ello, tenemos que utilizar la diferenciación implícita. Supongamos que $y = e^x$. Entonces

$$\begin{aligned} \ln y &= x \\ \frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= y. \end{aligned}$$

Así, vemos

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

como esperábamos, lo que conduce inmediatamente a la fórmula de integración

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

Aplicaremos estas fórmulas en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2.38

Uso de las propiedades de las funciones exponenciales

Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2}$
b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2}$

Solución

Aplicamos la regla de la cadena según sea necesario.

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2} = \frac{d}{dt}e^{3t+t^2} = e^{3t+t^2}(3+2t)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2} = e^{3x^2}6x$

2.38 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3$

EJEMPLO 2.39

Uso de las propiedades de las funciones exponenciales

Evalúe la siguiente integral $\int 2xe^{-x^2}\,dx$.

Solución

Utilizando u–sustitución, supongamos que $u = -x^2$. Entonces $du = -2x\,dx$, y tenemos

$$\int 2xe^{-x^2}\,dx = -\int e^u\,du = -e^u + C = -e^{-x^2} + C.$$

2.39 Evalúe la siguiente integral $\int \frac{4}{e^{3x}}dx$.

Funciones logarítmicas y exponenciales generales

Cerraremos esta sección viendo las funciones exponenciales y los logaritmos con bases distintas a e. Las funciones exponenciales son funciones de la forma $f(x) = a^x$. Tenga en cuenta que, a menos que $a = e$, todavía no tenemos una definición matemáticamente rigurosa de estas funciones para los exponentes irracionales. Rectifiquemos aquí definiendo la función $f(x) = a^x$ en términos de la función exponencial e^x. A continuación examinaremos los logaritmos con bases distintas a e como funciones inversas de funciones exponenciales.

Definición

para cualquier $a > 0$, y para cualquier número real x, defina $y = a^x$ de la siguiente forma:

$$y = a^x = e^{x\ln a}.$$

Ahora, a^x se define rigurosamente para todos los valores de x. Esta definición también nos permite generalizar la propiedad iv. de los logaritmos y la propiedad iii. de las funciones exponenciales para aplicarlas tanto a los valores racionales como irracionales de r. Es sencillo demostrar que las propiedades de los exponentes se mantienen para las funciones exponenciales generales definidas de esta manera.

Apliquemos ahora esta definición para calcular una fórmula de diferenciación para a^x. Tenemos

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a.$$

La fórmula de integración correspondiente se deduce inmediatamente.

Teorema 2.20

Derivadas e integrales con funciones exponenciales generales
Supongamos que $a > 0$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

y

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$$

Si los valores de $a \neq 1$, entonces la función a^x es biunívoca y tiene una inversa bien definida. Su inversa se denota por $\log_a x$. Entonces,

$$y = \log_a x \text{ si y solo si } x = a^y.$$

Nótese que las funciones logarítmicas generales pueden escribirse en términos del logaritmo natural. Supongamos que $y = \log_a x$. Entonces, $x = a^y$. Al tomar el logaritmo natural de ambos lados de esta segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln\left(a^y\right) \\ \ln x &= y \ln a \\ y &= \frac{\ln x}{\ln a} \\ \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a}. \end{aligned}$$

Así, vemos que todas las funciones logarítmicas son múltiplos constantes unas de otras. A continuación, utilizamos esta fórmula para encontrar una fórmula de diferenciación para un logaritmo con base a. De nuevo, supongamos $y = \log_a x$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Teorema 2.21

Derivadas de funciones logarítmicas generales
Supongamos que $a > 0$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

EJEMPLO 2.40

Cálculo de las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas generales
Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t . 2^{t^2}\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2+4\right)$

Solución
Tenemos que aplicar la regla de la cadena según sea necesario.

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t . 2^{t^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(2^{2t} . 2^{t^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(2^{2t+t^2}\right) = 2^{2t+t^2} \ln(2)(2+2t)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2+4\right) = \frac{1}{\left(7x^2+4\right)(\ln 8)}(14x)$

2.40 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dt}4^{t^4}$
b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

EJEMPLO 2.41

Integración de funciones exponenciales generales

Evalúe la siguiente integral $\int \frac{3}{2^{3x}}dx$.

Solución

Utilice la sustitución en u y supongamos que $u = -3x$. Entonces $du = -3dx$ y tenemos

$$\int \frac{3}{2^{3x}}dx = \int 3.2^{-3x}dx = -\int 2^u du = -\frac{1}{\ln 2}2^u + C = -\frac{1}{\ln 2}2^{-3x} + C.$$

2.41 Evalúe la siguiente integral $\int x^2 2^{x^3} dx$.

SECCIÓN 2.7 EJERCICIOS

Para los siguientes ejercicios, calcule la derivada $\frac{dy}{dx}$.

295. $y = \ln(2x)$ grandes.

296. $y = \ln(2x+1)$ grandes.

297. $y = \frac{1}{\ln x}$

En los siguientes ejercicios, halle la integral indefinida.

298. $\int \frac{dt}{3t}$

299. $\int \frac{dx}{1+x}$

Para los siguientes ejercicios, calcule la derivada dy/dx. (Puede utilizar una calculadora para trazar la función y la derivada para confirmar que es correcta).

300. **[T]** $y = \frac{\ln(x)}{x}$

301. **[T]** $y = x\ln(x)$ grandes.

302. **[T]** $y = \log_{10}x$

303. **[T]** $y = \ln(\text{sen }x)$ grandes.

304. **[T]** $y = \ln(\ln x)$

305. **[T]** $y = 7\ln(4x)$ grandes.

306. **[T]** $y = \ln\left((4x)^7\right)$

307. **[T]** $y = \ln(\tan x)$ grandes.

308. **[T]** $y = \ln(\tan(3x))$

309. **[T]** $y = \ln\left(\cos^2 x\right)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, halle la integral definida o indefinida.

310. $\int_0^1 \frac{dx}{3+x}$

311. $\int_0^1 \frac{dt}{3+2t}$

312. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

313. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x^2+1}$

314. $\int_2^e \frac{dx}{x\ln x}$

315. $\int_2^e \frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$

316. $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x}$

317. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

318. $\int \cot(3x)\,dx$

319. $\int \frac{(\ln x)^2\,dx}{x}$

En los siguientes ejercicios, calcule dy/dx diferenciando $\ln y$.

320. $y = \sqrt{x^2+1}$

321. $y = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}$

322. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

323. $y = x^{-1/x}$

324. $y = e^{(ex)}$ grandes.

325. $y = x^e$

326. $y = x^{(ex)}$ grandes.

327. $y = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{x}$

328. $y = x^{-1/\ln x}$

329. $y = e^{-\ln x}$

En los siguientes ejercicios, evalúe mediante cualquier método.

330. $\int_5^{10} \frac{dt}{t} - \int_{5x}^{10x} \frac{dt}{t}$

331. $\int_1^{e^\pi} \frac{dx}{x} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

332. $\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{dt}{t}$

333. $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$

334. $\frac{d}{dx}\ln(\sec x + \tan x)$

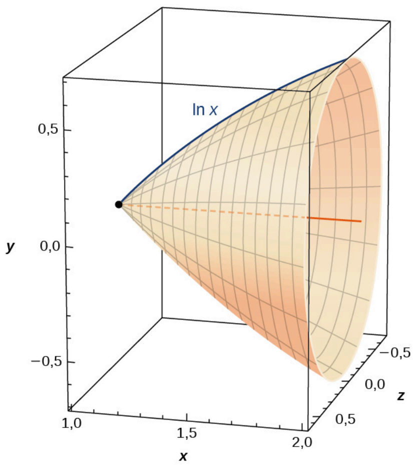
En los siguientes ejercicios, utilice la función $\ln x$. Si no puede encontrar los puntos de intersección de forma analítica, utilice una calculadora.

335. Halle el área de la región encerrada por $x = 1$ y $y = 5$ arriba $y = \ln x$.

336. **[T]** Calcule la longitud de arco de $\ln x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

337. Halle el área entre $\ln x$ y el eje x de $x = 1$ para $x = 2$.

338. Calcule el volumen de la forma que se crea al girar esta curva desde $x = 1$ para $x = 2$ alrededor del eje *x*, como se muestra aquí.



339. **[T]** Halle el área superficial de la forma que se crea al girar la curva del ejercicio anterior a partir de $x = 1$ a $x = 2$ alrededor del eje *x*.

Si no puede hallar los puntos de intersección analíticamente en los siguientes ejercicios, utilice una calculadora.

340. Halle el área del cuarto de círculo hiperbólico delimitado por $x = 2$ y $y = 2$ arriba $y = 1/x$.

341. **[T]** Calcule la longitud de arco de $y = 1/x$ de $x = 1$ para $x = 4$.

342. Halle el área bajo $y = 1/x$ y por encima del eje *x* de $x = 1$ para $x = 4$.

En los siguientes ejercicios, compruebe las derivadas y antiderivadas.

343. $\frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

344. $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \frac{2a}{\left(x^2-a^2\right)}$ grandes.

345. $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

346. $\frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

347. $\int \frac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln x)} = \ln(\ln(\ln x)) + C$

2.8 Crecimiento y decaimiento exponencial

Objetivos de aprendizaje

2.8.1 Utilizar el modelo de crecimiento exponencial en aplicaciones, lo que incluye crecimiento de la población e interés compuesto.
2.8.2 Explicar el concepto de tiempo de duplicación.
2.8.3 Utilizar el modelo de decrecimiento exponencial en aplicaciones, lo que incluye decaimiento radiactivo y la ley de enfriamiento de Newton.
2.8.4 Explicar el concepto de vida media.

Una de las aplicaciones más frecuentes de las funciones exponenciales es la de los modelos de crecimiento y decrecimiento. El crecimiento exponencial y el decrecimiento aparecen en multitud de aplicaciones naturales. Desde el crecimiento de la población y el interés capitalizado continuamente hasta el decaimiento radiactivo y la ley de enfriamiento de Newton, las funciones exponenciales son omnipresentes en la naturaleza. En esta sección, examinamos el crecimiento y el decrecimiento exponencial en el contexto de algunas de estas aplicaciones.

Modelo de crecimiento exponencial

Muchos sistemas presentan un crecimiento exponencial. Estos sistemas siguen un modelo de la forma $y = y_0e^{kt}$, donde

y_0 representa el estado inicial del sistema y k es una constante positiva, denominada *constante de crecimiento*. Observe que en un modelo de crecimiento exponencial, tenemos

$$y' = ky_0e^{kt} = ky. \tag{2.27}$$

Es decir, la tasa de crecimiento es proporcional al valor actual de la función. Esta es una característica clave del crecimiento exponencial. La Ecuación 2.27 involucra derivadas y se denomina *ecuación diferencial*. Aprenderemos más sobre esto en Introducción a las ecuaciones diferenciales.

Regla: modelo de crecimiento exponencial

Los sistemas que presentan un **crecimiento exponencial** aumentan según el modelo matemático

$$y = y_0e^{kt},$$

donde y_0 representa el estado inicial del sistema y $k > 0$ es una constante, denominada *constante de crecimiento*.

Elcrecimiento de la población es un ejemplo común de crecimiento exponencial. Consideremos una población de bacterias, por ejemplo. Parece razonable que la tasa de crecimiento de la población sea proporcional al tamaño de la misma. Al fin y al cabo, cuantas más bacterias haya para reproducirse, más rápido crecerá la población. La Figura 2.79 y la Tabla 2.1 representan el crecimiento de una población de bacterias con una población inicial de 200 y una constante de crecimiento de $0{,}02$. Observe que después de apenas 2 horas $(120$ minutos), ¡la población es 10 veces su tamaño original!

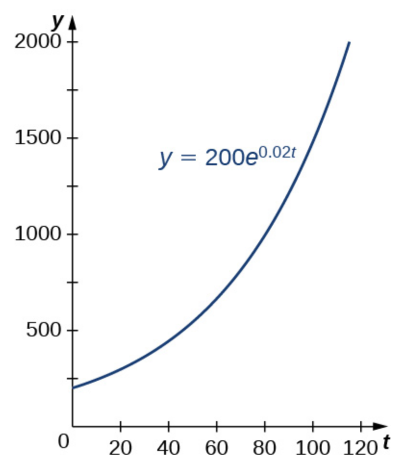


Figura 2.79 Un ejemplo de crecimiento exponencial de las bacterias.

Tiempo (min)	Tamaño de la población (n.º de bacterias)
10	244
20	298
30	364
40	445
50	544
60	664

Tabla 2.1 Crecimiento exponencial de una población bacteriana

Tiempo (min)	Tamaño de la población (n.º de bacterias)
70	811
80	991
90	1.210
100	1.478
110	1.805
120	2.205

Tabla 2.1 Crecimiento exponencial de una población bacteriana

Tenga en cuenta que estamos utilizando una función continua para modelar lo que es esencialmente un comportamiento discreto. En cualquier momento, la población del mundo real contiene un número entero de bacterias, aunque el modelo adopta valores no enteros. Cuando se utilizan modelos de crecimiento exponencial, siempre hay que tener cuidado de interpretar los valores de la función en el contexto del fenómeno que estamos modelando.

EJEMPLO 2.42

Crecimiento de la población

Consideremos la población de bacterias descrita anteriormente. Esta población crece según la función $f(t) = 200e^{0,02t}$, donde t se mide en minutos. ¿Cuántas bacterias están presentes en la población después de 5 horas (300 minutos)? ¿Cuándo alcanza la población 100.000 bacterias?

Solución

Tenemos $f(t) = 200e^{0,02t}$. Entonces

$$f(300) = 200e^{0,02(300)} \approx 80686.$$

Hay 80686 bacterias en la población después de 5 horas.

Para saber cuándo la población alcanza 100.000 bacterias, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} 100.000 &= 200e^{0,02t} \\ 500 &= e^{0,02t} \\ \ln 500 &= 0,02t \\ t &= \frac{\ln 500}{0,02} \approx 310,73. \end{aligned}$$

La población alcanza 100.000 bacterias después de $310,73$ minutos.

2.42 Consideremos una población de bacterias que crece según la función $f(t) = 500e^{0,05t}$, donde t se mide en minutos. ¿Cuántas bacterias hay en la población después de 4 horas? ¿Cuándo alcanza la población 100 millones de bacterias?

Pasemos ahora a una aplicación financiera: el interés compuesto. El interés que no se capitaliza se denomina *interés simple*. El interés simple se paga una vez, al final del periodo especificado (normalmente 1 año). Así que, si ponemos $\$1.000$ en una cuenta de ahorros ganando el $2\ \%$ de interés simple anual, entonces al final del año tendremos

$$1.000\,(1 + 0,02) = \$1.020.$$

El interés compuesto se paga varias veces al año, según el periodo de capitalización. Por lo tanto, si el banco compone los intereses cada 6 meses, acredita la mitad de los intereses del año en la cuenta después de 6 meses. En la segunda mitad del año, la cuenta devenga intereses no solo por el importe inicial de $\$1.000$, sino también sobre los intereses

obtenidos durante el primer semestre. Matemáticamente hablando, al final del año, tendremos

$$1.000\left(1+\frac{0{,}02}{2}\right)^2 = \$1020{,}10.$$

Del mismo modo, si los intereses se capitalizan cada 4 meses, tendremos

$$1.000\left(1+\frac{0{,}02}{3}\right)^3 = \$1020{,}13,$$

y si el interés se capitaliza diariamente (365 veces al año), tenemos $\$1020{,}20$. Si ampliamos este concepto de manera que el interés se capitalice continuamente, después de t años tendremos

$$1.000 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{nt}.$$

Ahora vamos a manipular esta expresión para tener una función de crecimiento exponencial. Recordemos que el número e puede expresarse como un límite:

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Con base en esto, queremos que la expresión dentro del paréntesis tenga la forma $(1+1/m)$. Supongamos que $n = 0{,}02m$. Tenga en cuenta que como $n\to\infty$, $m\to\infty$ también. Entonces obtenemos

$$1.000 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{nt} = 1.000 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{0{,}02m}\right)^{0{,}02mt} = 1.000\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{0{,}02t}.$$

Reconocemos el límite dentro de los paréntesis como el número e. Entonces, el saldo de nuestra cuenta bancaria después de t años viene dado por $1.000e^{0{,}02t}$. Al generalizar este concepto, vemos que si una cuenta bancaria con un saldo inicial de $\$P$ gana intereses a una tasa de r %, capitalizado continuamente; entonces el saldo de la cuenta después de t años es

$$\text{Saldo} = Pe^{rt}.$$

EJEMPLO 2.43

Interés compuesto

A un estudiante de 25 años se le ofrece la oportunidad de invertir algo de dinero en una cuenta de jubilación que paga 5 % interés anual capitalizado continuamente. ¿Cuánto necesita invertir hoy el estudiante para tener $\$1$ millón cuando se jubile a la edad de 65? ¿Y si más bien pudiera ganar 6 % interés anual capitalizado continuamente?

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} 1.000.000 &= Pe^{0{,}05(40)} \\ P &= 135.335{,}28. \end{aligned}$$

Debe invertir $\$135.335{,}28$ a las 5 % interés.

Si en cambio puede ganar 6 %, entonces la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} 1.000.000 &= Pe^{0{,}06(40)} \\ P &= 90.717{,}95. \end{aligned}$$

En este caso, solo necesita invertir $\$90.717{,}95$. Esto es aproximadamente dos tercios de la cantidad que necesita invertir al 5 %. El hecho de que el interés se capitalice de forma continua magnifica en gran medida el efecto del 1 % de aumento de la tasa de interés.

2.43 Supongamos que en vez de invertir a la edad de 25, el estudiante espera hasta la edad de 35. ¿Cuánto

tendría que invertir al 5%? A $6\ \%$?

Si una cantidad crece exponencialmente, el tiempo que tarda en duplicarse permanece constante. En otras palabras, una población de bacterias tarda el mismo tiempo en crecer de 100 a 200 que el que tarda para crecer de 10.000 al 20.000 bacterias. Este tiempo se denomina tiempo de duplicación. Para calcular el tiempo de duplicación, tenemos que saber cuándo la cantidad alcanza el doble de su tamaño original. Así que tenemos

$$\begin{aligned} 2y_0 &= y_0 e^{kt} \\ 2 &= e^{kt} \\ \ln 2 &= kt \\ t &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Definición

Si una cantidad crece exponencialmente, el **tiempo de duplicación** es el tiempo que tarda la cantidad en duplicarse. Viene dado por

$$\text{Tiempo de duplicación} = \frac{\ln 2}{k}.$$

EJEMPLO 2.44

Uso del tiempo de duplicación

Supongamos que una población de peces crece exponencialmente. Un estanque se abastece inicialmente con 500 peces. Después de 6 meses, hay 1.000 peces en el estanque. El propietario permitirá a sus amigos y vecinos pescar en su estanque cuando la población de peces alcance 10.000. ¿Cuándo podrán pescar los amigos del propietario?

Solución

Sabemos que la población de peces tarda 6 meses para duplicar su número. Así, si t representa el tiempo en meses, por la fórmula del tiempo de duplicación, tenemos $6 = (\ln 2)/k$. Entonces, $k = (\ln 2)/6$. Así, la población viene dada por $y = 500e^{((\ln 2)/6)t}$. Para saber cuándo la población alcanza 10.000 peces, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 10.000 &= 500e^{(\ln 2/6)t} \\ 20 &= e^{(\ln 2/6)t} \\ \ln 20 &= \left(\frac{\ln 2}{6}\right)t \\ t &= \frac{6(\ln 20)}{\ln 2} \approx 25{,}93. \end{aligned}$$

Los amigos del dueño tienen que esperar $25{,}93$ meses (un poco más de 2 años) para pescar en el estanque.

2.44 Supongamos que se necesita 9 meses para que la población de peces en el Ejemplo 2.44 alcance 1.000 peces. En estas circunstancias, ¿cuánto tiempo tienen que esperar los amigos del propietario?

Modelo de decrecimiento exponencial

Las funciones exponenciales también pueden usarse para modelar poblaciones que se reducen (por ejemplo, a causa de una enfermedad) o compuestos químicos que se descomponen con el tiempo. Decimos que tales sistemas exhiben un decrecimiento exponencial en vez de un crecimiento exponencial. El modelo es casi el mismo, excepto que hay un signo negativo en el exponente. Así, para alguna constante positiva k, tenemos $y = y_0 e^{-kt}$.

Al igual que con el crecimiento exponencial, existe una ecuación diferencial asociada al decrecimiento exponencial. Tenemos

$$y' = -ky_0 e^{-kt} = -ky.$$

Regla: modelo de decrecimiento exponencial

Los sistemas que presentan **un decrecimiento exponencial** se comportan según el modelo

$$y = y_0 e^{-kt},$$

donde y_0 representa el estado inicial del sistema y $k > 0$ es una constante, llamada *constante de decrecimiento*.

La siguiente figura muestra un gráfico de una función representativa de decrecimiento exponencial.

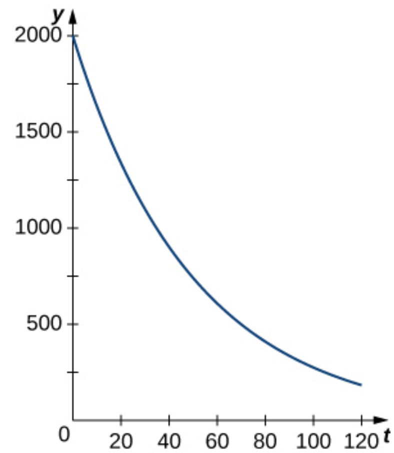


Figura 2.80 Ejemplo de decrecimiento exponencial.

Veamos una aplicación física del decrecimiento exponencial. La ley de enfriamiento de Newton dice que un objeto se enfría a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del entorno. En otras palabras, si T representa la temperatura del objeto y T_a representa la temperatura ambiente en una habitación, entonces

$$T' = -k(T - T_a).$$

Hay que tener en cuenta que este no es el modelo correcto para el decrecimiento exponencial. Queremos que la derivada sea proporcional a la función, y esta expresión tiene el término adicional T_a. Por suerte podemos hacer un cambio de variables que resuelva este problema. Supongamos que $y(t) = T(t) - T_a$. Entonces $y'(t) = T'(t) - 0 = T'(t)$, y nuestra ecuación se convierte en

$$y' = -ky.$$

Por nuestro trabajo anterior, sabemos que esta relación entre y y su derivada conduce a un decrecimiento exponencial. Por lo tanto,

$$y = y_0 e^{-kt},$$

y vemos que

$$\begin{aligned} T - T_a &= (T_0 - T_a) e^{-kt} \\ T &= (T_0 - T_a) e^{-kt} + T_a \end{aligned}$$

donde T_0 representa la temperatura inicial. Apliquemos esta fórmula en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.45

Ley de enfriamiento de Newton

Según los baristas experimentados, la temperatura óptima para servir el café está entre $155°\text{F}$ y $175°\text{F}$. Supongamos que el café se vierte a una temperatura de $200°\text{F}$, y después de 2 minutos en una habitación a $70\ °\text{F}$ el café se enfría a $180°\text{F}$. ¿Cuándo se enfría el café lo suficiente por primera vez para servirlo? ¿Cuándo está demasiado frío para servirlo? Redondee las respuestas al medio minuto más cercano.

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} T &= (T_0 - T_a)\, e^{-kt} + T_a \\ 180 &= (200 - 70)e^{-k(2)} + 70 \\ 110 &= 130e^{-2k} \\ \frac{11}{13} &= e^{-2k} \\ \ln \frac{11}{13} &= -2k \\ \ln 11 - \ln 13 &= -2k \\ k &= \frac{\ln 13 - \ln 11}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, el modelo es

$$T = 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} + 70.$$

El café alcanza $175°F$ cuando

$$\begin{aligned} 175 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} + 70 \\ 105 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \frac{21}{26} &= e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \ln \frac{21}{26} &= \frac{\ln 11 - \ln 13}{2}t \\ \ln 21 - \ln 26 &= \frac{\ln 11 - \ln 13}{2}t \\ t &= \frac{2(\ln 21 - \ln 26)}{\ln 11 - \ln 13} \approx 2{,}56. \end{aligned}$$

El café puede servirse alrededor de $2{,}5$ minutos después de ser vertido. El café alcanza $155°F$ en

$$\begin{aligned} 155 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} + 70 \\ 85 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \frac{17}{26} &= e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \ln 17 - \ln 26 &= \left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right) t \\ t &= \frac{2(\ln 17 - \ln 26)}{\ln 11 - \ln 13} \approx 5{,}09. \end{aligned}$$

El café está demasiado frío para ser servido cerca de 5 minutos después de ser vertido.

2.45 Supongamos que la habitación está más cálida $(75°F)$ y, después de 2 minutos, el café se ha enfriado solo a $185°F$. ¿Cuándo se enfría el café lo suficiente por primera vez para servirlo? ¿Cuándo está demasiado frío para servirlo? Redondee las respuestas al medio minuto más cercano.

Al igual que los sistemas que presentan un crecimiento exponencial tienen un tiempo de duplicación constante, los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial tienen una vida media constante. Para calcular la vida media, queremos saber cuándo la cantidad llega a la mitad de su tamaño original. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\ \frac{1}{2} &= e^{-kt} \\ -\ln 2 &= -kt \\ t &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Nota: Esta es la misma expresión que se nos ocurrió para duplicar el tiempo.

Definición

Si una cantidad decrece exponencialmente, la **vida media** es el tiempo que la misma tarda en reducirse a la mitad. Viene dado por

$$\text{Semivida} = \frac{\ln 2}{k}.$$

EJEMPLO 2.46

Datación por radiocarbono

Una de las aplicaciones más comunes de un modelo de decrecimiento exponencial es la datación por carbono El $\text{carbono-}14$ decae (emite una partícula radiactiva) a un ritmo exponencial regular y constante. Por lo tanto, si sabemos cuánto carbono había originalmente en un objeto y cuánto carbono queda, podemos determinar la edad del objeto. La semivida del $\text{carbono-}14$ es, aproximadamente, 5730 años, lo que significa que después de tantos años, la mitad del material se ha convertido del $\text{carbono-}14$ original al nuevo y no radiactivo $\text{nitrógeno}14$. Si tenemos 100 g $\text{carbono-}14$ hoy, cuánto quedará en 50 años? Si un artefacto que originalmente contenía 100 g de carbono contiene ahora 10 g de carbono, ¿qué edad tiene? Redondee la respuesta a la centena de años más cercana.

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} 5730 &= \frac{\ln 2}{k} \\ k &= \frac{\ln 2}{5730}. \end{aligned}$$

Entonces, el modelo dice

$$y = 100e^{-(\ln 2/5730)t}.$$

En 50 años, tenemos

$$\begin{aligned} y &= 100e^{-(\ln 2/5730)(50)} \\ &\approx 99{,}40. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en 50 años, $99{,}40$ g de $\text{carbono-}14$ permanecerán.

Para determinar la edad del artefacto, debemos resolver

$$\begin{aligned} 10 &= 100e^{-(\ln 2/5730)t} \\ \frac{1}{10} &= e^{-(\ln 2/5730)t} \\ t &\approx 19.035. \end{aligned}$$

El artefacto tiene aproximadamente 19.000 años.

2.46 Si tenemos 100 g de $\text{carbono-}14$, ¿cuánto queda después de t años? Si un artefacto que originalmente contenía 100 g de carbono contiene ahora $20g$ de carbono, ¿cuántos años tiene? Redondee la respuesta a la centena de años más cercana.

SECCIÓN 2.8 EJERCICIOS

¿Verdadero o falso? Si es cierto, demuéstrelo. Si es falso, halle la respuesta correcta.

348. El tiempo de duplicación para $y = e^{ct}$ ¿es $(\ln(2))/(\ln(c))$.

349. Si invierte $\$500$, a una tasa de interés anual de $3\ \%$ obtiene más dinero en el primer año que a $2{,}5\ \%$ de interés continuo.

350. Si deja una tetera a $100°C$ a temperatura ambiente $(25°C)$ y una olla idéntica en el refrigerador $(5°C)$, con la $k = 0{,}02$, el té en el refrigerador alcanza una temperatura potable $(70°C)$ en más de 5 minutos antes que el té a temperatura ambiente.

351. Dada una vida media de t años, la constante k por $y = e^{kt}$ se calcula mediante $k = \ln(1/2)/t$.

En los siguientes ejercicios, utilice $y = y_0 e^{kt}$.

352. Si un cultivo de bacterias se duplica en 3 horas, ¿cuántas horas se tarda para multiplicarse por 10?

353. Si las bacterias se multiplican por 10 en 10 horas, ¿cuántas horas necesitan para aumentar por 100?

354. ¿Qué antigüedad tiene un cráneo que contiene la quinta parte de radiocarbono de un cráneo moderno? Tenga en cuenta que la vida media del radiocarbono es 5730 años.

355. Si una reliquia contiene el $90\ \%$ de radiocarbono que contendría un material nuevo, ¿podría proceder de la época de Cristo (hace aproximadamente 2000 años)? Tenga en cuenta que la vida media del radiocarbono es 5730 años.

356. La población de El Cairo creció de 5 millones a 10 millones en 20 años. Utilice un modelo exponencial para encontrar en qué momento la población fue de 8 millones de dólares.

357. Las poblaciones de Nueva York y Los Ángeles crecen a $1\ \%$ y $1{,}4\ \%$ al año, respectivamente. A partir de 8 millones (Nueva York) y 6 millones (Los Ángeles), ¿cuándo se igualan las poblaciones?

358. Supongamos que el valor de $\$1$ en yenes japoneses disminuye en $2\ \%$ por año. A partir de $\$1 = ¥250$, ¿cuándo serán $\$1 = ¥1$?

359. El efecto de la publicidad decrece exponencialmente. Si los valores de $40\ \%$ de la población recuerda un nuevo producto después de 3 días, ¿cuánto tiempo el $20\ \%$ lo recordará?

360. Si los valores de $y = 1.000$ a las $t = 3$ y $y = 3.000$ a las $t = 4$, ¿cuál era y_0 en $t = 0$?

361. Si $y = 100$ a las $t = 4$ en tanto que $y = 10$ a las $t = 8$, ¿cuándo es $y = 1$?

362. Si un banco ofrece un interés anual de $7{,}5\ \%$ o un interés continuo de $7{,}25\ \%$, ¿cuál tiene el mejor rendimiento anual?

363. ¿Qué tipo de interés continuo tiene el mismo rendimiento que un interés anual de $9\ \%$?

364. Si deposita $\$5.000$ al $8\ \%$ interés anual, en cuántos años se puede retirar $\$500$ (a partir del primer año) sin quedarse sin dinero?

365. Usted está tratando de ahorrar $\$50\ 000$ en 20 años para la matrícula universitaria de su hijo. Si se trata de un interés continuo al $10\ \%$, ¿cuál es el monto de la inversión inicial?

366. Usted está enfriando un pavo que al sacarlo del horno tenía una temperatura interna de $165°\text{F}$. Después de 10 minutos de reposo del pavo en un apartamento a $70\ °\text{F}$ su temperatura alcanza $155°\text{F}$. ¿Cuál es la temperatura del pavo 20 minutos después de sacarlo del horno?

367. Está intentando descongelar unas verduras que están a una temperatura de $1°\text{F}$. Para descongelar las verduras de forma segura, hay que ponerlas en el refrigerador, que tiene una temperatura de $44°\text{F}$. Revisa sus verduras 2 horas después de ponerlas en el refrigerador para encontrar que ahora están a $12°\text{F}$. Trace la curva de temperatura resultante y utilícela para determinar el momento en que las verduras alcanzan $33°\text{F}$.

368. Es un arqueólogo y le dan un hueso que supuestamente es de un tiranosaurio Rex. Usted sabe que esos dinosaurios vivieron durante la Era Cretácea (146 millones de años a 65 millones de años), y descubre por la datación por radiocarbono que hay un $0{,}000001\ \%$ de radiocarbono. ¿El hueso es del Cretáceo?

369. El combustible que consume un reactor nuclear contiene plutonio-239, que tiene una vida media de 24.000 años. Si los valores de 1 barril que contiene $10\ \text{kg}$ de plutonio-239 está sellado, ¿cuántos años deben pasar hasta que solo queden $10g$ de plutonio-239?

En la siguiente serie de ejercicios utilice la tabla correspondiente, que muestra la población mundial por décadas.

Fuente: http://www.factmonster.com/ipka/A0762181.html.

Años desde 1950	Población (millones)
0	2.556
10	3.039
20	3.706
30	4.453

Años desde 1950	Población (millones)
40	5.279
50	6.083
60	6.849

370. **[T]** La curva exponencial mejor ajustada a los datos de la forma $P(t) = ae^{bt}$ viene dada por $P(t) = 2.686e^{0,01604t}$. Utilice una calculadora gráfica para graficar los datos y la curva exponencial juntos.

371. **[T]** Calcule y grafique la derivada y' de su ecuación. ¿Dónde aumenta y qué significa este aumento?

372. **[T]** Calcule y grafique la segunda derivada de su ecuación. ¿Dónde aumenta y qué significa este aumento?

373. **[T]** Halle la fecha prevista en la que la población alcanza 10 mil millones. Utilizando sus respuestas anteriores sobre la primera y la segunda derivada, explique por qué el crecimiento exponencial no sirve para predecir el futuro.

En la siguiente serie de ejercicios utilice la tabla correspondiente, que muestra la población de San Francisco en el siglo XIX.

Fuente: http://www.sfgenealogy.com/sf/history/hgpop.htm.

Años desde 1850	Población (miles)
0	21,00
10	56,80
20	149,5
30	234,0

374. **[T]** La curva exponencial mejor ajustada a los datos de la forma $P(t) = ae^{bt}$ viene dada por $P(t) = 35{,}26e^{0{,}06407t}$. Utilice una calculadora gráfica para graficar los datos y la curva exponencial juntos.

375. **[T]** Calcule y grafique la derivada y' de su ecuación. ¿Dónde está aumentando? ¿Qué significa este aumento? ¿Hay algún valor en el que el aumento sea máximo?

376. **[T]** Calcule y grafique la segunda derivada de su ecuación. ¿Dónde está aumentando? ¿Qué significa este aumento?

2.9 Cálculo de las funciones hiperbólicas

Objetivos de aprendizaje

2.9.1 Aplicar las fórmulas de las derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas.
2.9.2 Aplicar las fórmulas de las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas y sus integrales asociadas.
2.9.3 Describir las condiciones habituales de aplicación de una curva catenaria.

En Introducción a funciones y gráficos (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/1-5-funciones-exponenciales-y-logaritmicas) se presentaron las funciones hiperbólicas, junto con algunas de sus propiedades básicas. En esta sección veremos las fórmulas de diferenciación e integración de las funciones hiperbólicas y sus inversas.

Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas

Recordemos que el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico se definen como

$$\text{senoh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ y } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Las otras funciones hiperbólicas se definen entonces en términos de $\text{senoh}\, x$ y $\cosh x$. Los gráficos de las funciones hiperbólicas se muestran en la siguiente figura.

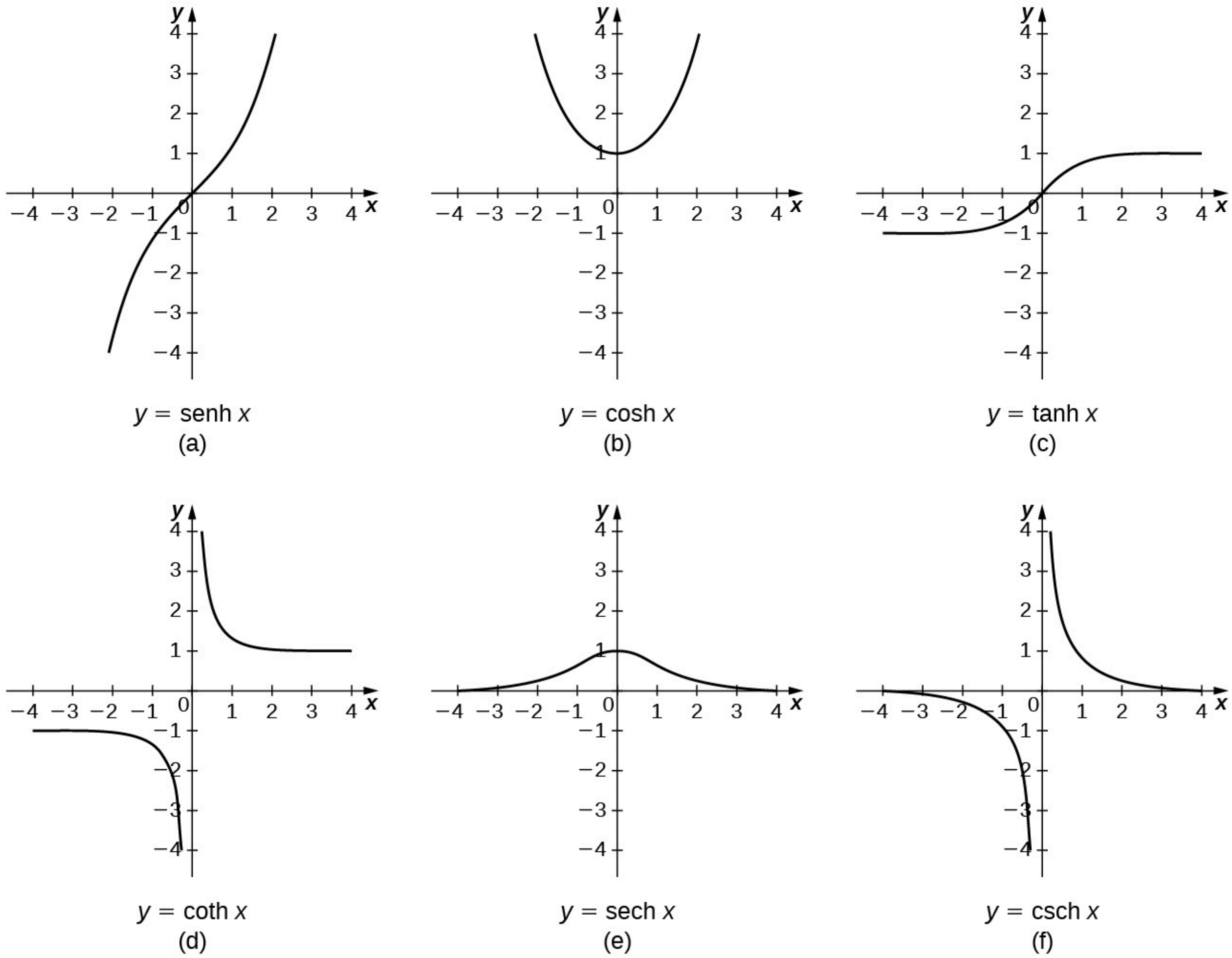


Figura 2.81 Gráficos de las funciones hiperbólicas.

Es fácil desarrollar fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas. Por ejemplo, si se observa $\text{senoh}\ x$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\text{senoh}\ x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right] = \cosh x. \end{aligned}$$

De la misma manera, $(d/dx)\cosh x = \text{senoh}\ x$. Resumimos las fórmulas de diferenciación de las funciones hiperbólicas en la siguiente tabla.

$f(x)$ **grandes.**	$\frac{d}{dx} f(x)$ **grandes.**
$\text{senoh}\ x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\text{senoh}\ x$
$\tanh x$	$\text{sech}^2\ x$
$\coth x$	$-\text{csch}^2\ x$
$\text{sech}\ x$	$-\text{sech}\ x \tanh x$

Tabla 2.2 Derivadas de las funciones hiperbólicas

$f(x)$ grandes.	$\frac{d}{dx}f(x)$ grandes.
$\text{csch}\, x$	$-\text{csch}\, x \coth x$

Tabla 2.2 Derivadas de las funciones hiperbólicas

Comparemos las derivadas de las funciones hiperbólicas con las derivadas de las funciones trigonométricas estándar. Hay muchas similitudes, pero también diferencias. Por ejemplo, las derivadas de las funciones seno coinciden: $(d/dx)\,\text{sen}\, x = \cos x$ y $(d/dx)\,\text{senoh}\, x = \cosh x$. Las derivadas de las funciones coseno, sin embargo, difieren en el signo: $(d/dx)\cos x = -\text{sen}\, x$, pero $(d/dx)\cosh x = \text{senoh}\, x$. A medida que continuamos nuestro examen de las funciones hiperbólicas, debemos tener en cuenta sus similitudes y diferencias con las funciones trigonométricas estándar.

Estas fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas conducen directamente a las siguientes fórmulas integrales.

$$\begin{aligned} \int \text{senoh}\, u\, du &= \cosh u + C & \int \text{csch}^2\, u\, du &= -\coth u + C \\ \int \cosh u\, du &= \text{senoh}\, u + C & \int \text{sech}\, u \tanh u\, du &= -\text{sech}\, u + C \\ \int \text{sech}^2 u\, du &= \tanh u + C & \int \text{csch}\, u \coth u\, du &= -\text{csch}\, u + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.47

Diferenciación de funciones hiperbólicas

Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}\left(x^2\right)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}(\cosh x)^2$

Solución

Utilizando las fórmulas de la Tabla 2.2 y la regla de la cadena, obtenemos

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}\left(x^2\right)\right) = \cosh\left(x^2\right) . 2x$
b. $\frac{d}{dx}(\cosh x)^2 = 2\cosh x\, \text{senoh}\, x$

2.47 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2 + 3x\right)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(\text{senoh}\, x)^2}\right)$

EJEMPLO 2.48

Integrales con funciones hiperbólicas

Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int x\cosh\left(x^2\right) dx$
b. $\int \tanh x\, dx$

Solución

Podemos utilizar la sustitución en *u* en ambos casos.

a. Supongamos que $u = x^2$. Entonces, $du = 2x\, dx$ y

$$\int x \cosh\left(x^2\right) dx = \int \frac{1}{2}\cosh u\, du = \frac{1}{2}\text{senoh}\, u + C = \frac{1}{2}\text{senoh}\left(x^2\right) + C.$$

b. Supongamos que $u = \cosh x$. Entonces, $du = \text{senoh}\, x\, dx$ y

$$\int \tanh x\, dx = \int \frac{\text{senoh}\, x}{\cosh x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\cosh x| + C.$$

Observe que $\cosh x > 0$ para todo x, por lo que podemos eliminar los signos de valor absoluto y obtener

$$\int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + C.$$

2.48 Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int \text{senoh}^3 x \cosh x\, dx$

b. $\int \text{sech}^2(3x)\, dx$

Cálculo de funciones hiperbólicas inversas

Observando los gráficos de las funciones hiperbólicas, vemos que con las restricciones de rango adecuadas, todos tienen inversas. La mayoría de las restricciones de rango necesarias se pueden discernir examinando de cerca los gráficos. Los dominios y rangos de las funciones hiperbólicas inversas se resumen en la siguiente tabla.

Función	Dominio	Rango
$\text{senoh}^{-1} x$	$\left(-\infty, \infty\right)$ grandes.	$\left(-\infty, \infty\right)$ grandes.
$\cosh^{-1} x$	$\left[1, \infty\right)$ grandes.	$\left[0, \infty\right)$ grandes.
$\tanh^{-1} x$	$(-1, 1)$ grandes.	$\left(-\infty, \infty\right)$ grandes.
$\coth^{-1} x$	$\left(-\infty, -1\right) \cup \left(1, \infty\right)$ grandes.	$\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$ grandes.
$\text{sech}^{-1} x$	$(0, 1]$	$\left[0, \infty\right)$ grandes.
$\text{csch}^{-1} x$	$\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$ grandes.	$\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$

Tabla 2.3 Dominios y rangos de las funciones hiperbólicas inversas

Los gráficos de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la siguiente figura.

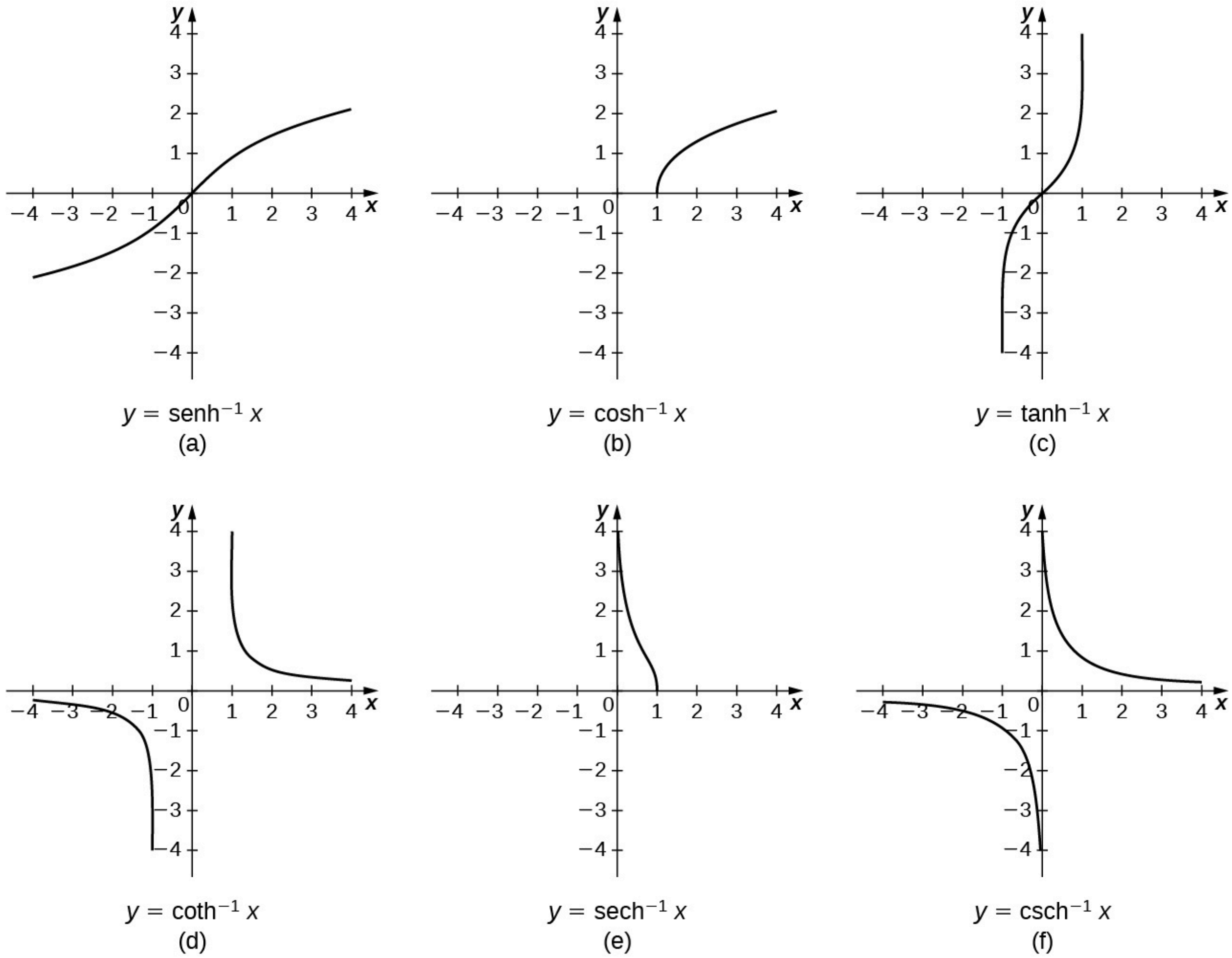


Figura 2.82 Gráficos de las funciones hiperbólicas inversas.

Para calcular las derivadas de las funciones inversas, utilizamos la diferenciación implícita. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{senoh}^{-1} x \\ \operatorname{senoh} y &= x \\ \frac{d}{dx}\operatorname{senoh} y &= \frac{d}{dx} x \\ \cosh y \frac{dy}{dx} &= 1. \end{aligned}$$

Recordemos que $\cosh^2 y - \operatorname{senoh}^2 y = 1$, por lo que $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senoh}^2 y}$. Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senoh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Podemos derivar fórmulas de diferenciación para las otras funciones hiperbólicas inversas de forma similar. Estas fórmulas de diferenciación se resumen en la siguiente tabla.

$f(x)$ **grandes.**	$\frac{d}{dx} f(x)$ **grandes.**
$\operatorname{senoh}^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Tabla 2.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$f(x)$ grandes.	$\frac{d}{dx} f(x)$ grandes.
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\text{csch}^{-1} x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert \sqrt{1+x^2}}$

Tabla 2.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Observe que las derivadas de $\tanh^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$ son los mismos. Así, cuando integramos $1/\left(1-x^2\right)$, tenemos que seleccionar la antiderivada adecuada en función del dominio de las funciones y de los valores de x. Las fórmulas de integración que involucran a las funciones hiperbólicas inversas se resumen de la siguiente manera.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \text{senoh}^{-1} u + C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} du = -\text{sech}^{-1} |u| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \cosh^{-1} u + C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} du = -\text{csch}^{-1} |u| + C$$

$$\int \frac{1}{1-u^2} du = \begin{cases} \tanh^{-1} u + C \text{ si } |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + C \text{ si } |u| > 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 2.49

Diferenciación de funciones hiperbólicas inversas

Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right)^2$

Solución

Utilizando las fórmulas de la Tabla 2.4 y la regla de la cadena, obtenemos los siguientes resultados:

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{1}{3\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$
b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right)^2 = \frac{2\left(\tanh^{-1} x\right)}{1-x^2}$

2.49 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}(3x)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right)^3$

EJEMPLO 2.50

Integrales con funciones hiperbólicas inversas

Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 1}} dx$

b. $\int \frac{1}{2x\sqrt{1 - 9x^2}} dx$

Solución

Podemos utilizar la sustitución en u en ambos casos.

a. Supongamos que $u = 2x$. Entonces, $du = 2dx$ y tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{u^2 - 1}} du = \frac{1}{2}\cosh^{-1} u + C = \frac{1}{2}\cosh^{-1} (2x) + C.$$

b. Supongamos que $u = 3x$. Entonces, $du = 3dx$ y obtenemos

$$\int \frac{1}{2x\sqrt{1 - 9x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{1 - u^2}} du = -\frac{1}{2}\text{sech}^{-1} |u| + C = -\frac{1}{2}\text{sech}^{-1} |3x| + C.$$

2.50 Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx, \quad x > 2$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

Aplicaciones

Una aplicación física de las funciones hiperbólicas es la de los cables colgantes. Si un cable de densidad uniforme está suspendido entre dos soportes sin más carga que su propio peso, el cable forma una curva llamada **catenaria**. Los cables de alto voltaje, las cadenas que cuelgan entre dos postes y los hilos de una tela de araña forman catenarias. La siguiente figura muestra cadenas que cuelgan de una fila de postes.



Figura 2.83 Las cadenas entre estos postes adoptan la forma de una catenaria (créditos: modificación del trabajo de OKFoundryCompany, Flickr).

Las funciones hiperbólicas pueden utilizarse para modelar catenarias. En concreto, las funciones de la forma $y = a\cosh(x/a)$ son catenarias. La Figura 2.84 muestra el gráfico de $y = 2\cosh(x/2)$.

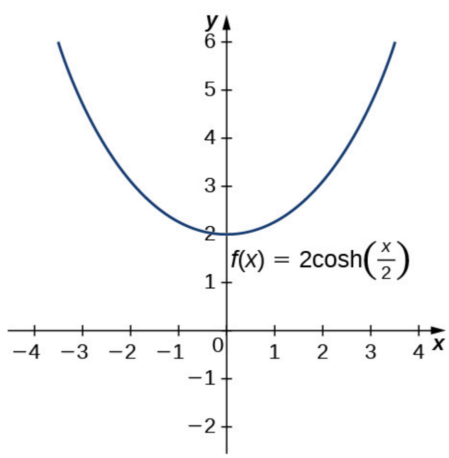


Figura 2.84 Una función coseno hiperbólico tiene la forma de una catenaria.

EJEMPLO 2.51

Uso de una catenaria para calcular la longitud de un cable

Supongamos que un cable colgante tiene la forma $10\cosh(x/10)$ por $-15 \le x \le 15$, donde x se mide en pies. Determine la longitud del cable (en pies).

Solución

Recuerde de la sección 2.4 que la fórmula de la longitud de arco es

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Tenemos $f(x) = 10 \cosh (x/10)$, por lo que $f'(x) = \text{senoh}\,(x/10)$. Entonces

$$\begin{aligned}\text{Longitud de arco} &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \\ &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1 + \text{senoh}^2 \left(\frac{x}{10}\right)}\, dx.\end{aligned}$$

Recordemos que $1 + \text{senoh}^2 x = \cosh^2 x$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}\text{Longitud de arco} &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1 + \text{senoh}^2 \left(\frac{x}{10}\right)}\, dx \\ &= \int_{-15}^{15} \cosh\left(\tfrac{x}{10}\right) dx \\ &= 10\, \text{senoh}\left(\tfrac{x}{10}\right)\Big|_{-15}^{15} = 10\left[\text{senoh}\left(\tfrac{3}{2}\right) - \text{senoh}\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right] = 20\, \text{senoh}\left(\tfrac{3}{2}\right) \\ &\approx 42{,}586 \text{ pies.}\end{aligned}$$

2.51 Supongamos que un cable colgante tiene la forma $15 \cosh (x/15)$ por $-20 \leq x \leq 20$. Determine la longitud del cable (en pies).

SECCIÓN 2.9 EJERCICIOS

377. **[T]** Halle expresiones para $\cosh x + \text{senoh}\, x$ y $\cosh x - \text{senoh}\, x$. Utilice una calculadora para representar gráficamente estas funciones y asegúrese de que su expresión sea correcta.

378. A partir de las definiciones de $\cosh (x)$ y $\text{senoh}\,(x)$, calcule sus antiderivadas.

379. Demuestre que $\cosh (x)$ y $\text{senoh}\,(x)$ satisfacen $y'' = y$.

380. Utilice la regla del cociente para verificar que $\tanh (x)' = \text{sech}^2 (x)$.

381. Derive $\cosh^2 (x) + \text{senoh}^2 (x) = \cosh (2x)$ de la definición.

382. Tome la derivada de la expresión anterior para hallar una expresión para $\text{senoh}\,(2x)$.

383. Pruebe que $\text{senoh}\,(x + y) = \text{senoh}\,(x) \cosh (y) + \cosh (x)\, \text{senoh}\,(y)$ cambiando la expresión a exponenciales.

384. Tome la derivada de la expresión anterior para hallar una expresión para $\cosh (x + y)$.

En los siguientes ejercicios, calcule las derivadas de las funciones y gráfico dados junto con la función para garantizar que su respuesta sea correcta.

385. **[T]** $\cosh (3x + 1)$ grandes.

386. **[T]** $\text{senoh}\left(x^2\right)$

387. **[T]** $\frac{1}{\cosh(x)}$ grandes.

388. **[T]** $\operatorname{senoh}(\ln(x))$

389. **[T]** $\cosh^2(x) + \operatorname{senoh}^2(x)$ grandes.

390. **[T]** $\cosh^2(x) - \operatorname{senoh}^2(x)$

391. **[T]** $\tanh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ grandes.

392. **[T]** $\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}$

393. **[T]** $\operatorname{senoh}^6(x)$ grandes.

394. **[T]** $\ln(\operatorname{sech}(x) + \tanh(x))$

En los siguientes ejercicios, calcule las antiderivadas de las funciones dadas.

395. $\cosh(2x+1)$ grandes.

396. $\tanh(3x+2)$ grandes.

397. $x\cosh\left(x^2\right)$ grandes.

398. $3x^3\tanh\left(x^4\right)$ grandes.

399. $\cosh^2(x)\operatorname{senoh}(x)$ grandes.

400. $\tanh^2(x)\operatorname{sech}^2(x)$ grandes.

401. $\frac{\operatorname{senoh}(x)}{1+\cosh(x)}$ grandes.

402. $\coth(x)$ grandes.

403. $\cosh(x) + \operatorname{senoh}(x)$ grandes.

404. $(\cosh(x) + \operatorname{senoh}(x))^n$

En los siguientes ejercicios, calcule las derivadas de las funciones.

405. $\tanh^{-1}(4x)$ grandes.

406. $\operatorname{senoh}^{-1}\left(x^2\right)$ grandes.

407. $\operatorname{senoh}^{-1}(\cosh(x))$ grandes.

408. $\cosh^{-1}\left(x^3\right)$ grandes.

409. $\tanh^{-1}(\cos(x))$ grandes.

410. $e^{\operatorname{senoh}^{-1}(x)}$ grandes.

411. $\ln\left(\tanh^{-1}(x)\right)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, calcule las antiderivadas de las funciones.

412. $\int \frac{dx}{4-x^2}$

413. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

414. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

415. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

416. $\int -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

417. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

418. $\int -\frac{2x}{x^4-1}$

En los siguientes ejercicios, utilice el hecho de que un cuerpo que cae con fricción igual a la velocidad al cuadrado obedece a la ecuación $dv/dt = g - v^2$.

419. Demuestre que $v(t) = \sqrt{g}\tanh\left(\left(\sqrt{g}\right)t\right)$ satisface esta ecuación.

420. Derive la expresión anterior para $v(t)$ integrando $\frac{dv}{g-v^2} = dt$.

421. **[T]** Estime la caída de un cuerpo en 12 segundos calculando el área bajo la curva de $v(t)$.

En los siguientes ejercicios, utilice este escenario: Un cable que cuelga por su propio peso tiene una pendiente $S = dy/dx$ que satisface $dS/dx = c\sqrt{1 + S^2}$. La constante c es la relación entre la densidad del cable y la tensión.

422. Demuestre que $S = \text{senoh}(cx)$ satisface esta ecuación.

423. Integre $dy/dx = \text{senoh}(cx)$ para calcular la altura del cable $y(x)$ si $y(0) = 1/c$.

424. Haga un dibujo del cable y determine hasta qué punto se hunde en $x = 0$.

En los siguientes ejercicios, resuelva cada problema.

425. **[T]** Una cadena cuelga de dos postes que tienen 2 m de separación para formar una catenaria descrita por la ecuación $y = 2\cosh(x/2) - 1$. Calcule la pendiente de la catenaria en el poste de la valla de la izquierda.

426. **[T]** Una cadena cuelga de dos postes que tienen cuatro metros de separación para formar una catenaria descrita por la ecuación $y = 4\cosh(x/4) - 3$. Calcule la longitud total de la catenaria (longitud de arco).

427. **[T]** Una línea eléctrica de alto voltaje es una catenaria descrita por $y = 10\cosh(x/10)$. Calcule la relación entre el área bajo la catenaria y su longitud de arco. ¿Qué observa?

428. Una línea telefónica es una catenaria descrita por $y = a\cosh(x/a)$. Calcule la relación entre el área bajo la catenaria y su longitud de arco. ¿Confirma esto su respuesta a la pregunta anterior?

429. Demuestre la fórmula de la derivada de $y = \text{senoh}^{-1}(x)$ diferenciando $x = \text{senoh}(y)$. (*Pista:* Utilice las identidades trigonométricas hiperbólicas).

430. Demuestre la fórmula de la derivada de $y = \cosh^{-1}(x)$ diferenciando $x = \cosh(y)$.

(*Pista:* Utilice las identidades trigonométricas hiperbólicas).

431. Demuestre la fórmula de la derivada de $y = \text{sech}^{-1}(x)$ diferenciando $x = \text{sech}(y)$. (*Pista:* Utilice las identidades trigonométricas hiperbólicas).

432. Compruebe que $(\cosh(x) + \text{senoh}(x))^n = \cosh(nx) + \text{senoh}(nx)$.

433. Demuestre la expresión para $\text{senoh}^{-1}(x)$. Multiplique $x = \text{senoh}(y) = (1/2)\left(e^y + e^{-y}\right)$ entre $2e^y$, a la vez que resolvemos para y. ¿Coincide su expresión con el libro de texto?

434. Demuestre la expresión para $\cosh^{-1}(x)$. Multiplique $x = \cosh(y) = (1/2)\left(e^y - e^{-y}\right)$ entre $2e^y$, a la vez que resolvemos para y. ¿Coincide su expresión con el libro de texto?

Revisión del capítulo

Términos clave

área superficial el área superficial de un sólido es el área total de la capa exterior del objeto; en objetos como cubos o ladrillos, el área superficial del objeto es la suma de las áreas de todas sus caras

catenaria una curva con la forma de la función $y = a\cosh(x/a)$ es una catenaria; un cable de densidad uniforme suspendido entre dos soportes adopta la forma de una catenaria

centro de masa punto en el que la masa total del sistema podría concentrarse sin cambiar el momento

centroide el centroide de una región es el centro geométrico de la región; las láminas se representan a menudo por regiones en el plano; si la lámina tiene una densidad constante, el centro de masa de la lámina depende solo de la forma de la región plana correspondiente; en este caso, el centro de masa de la lámina corresponde al centroide de la región representativa

crecimiento exponencial los sistemas que presentan un crecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{kt}$

decrecimiento exponencial los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{-kt}$

función de densidad función que describe cómo se distribuye la masa en un objeto; puede ser una densidad lineal, expresada en términos de masa por unidad de longitud; una densidad de área, expresada en términos de masa por unidad de área; o una densidad de volumen, expresada en términos de masa por unidad de volumen; la densidad de peso también se utiliza para describir el peso (en vez de la masa) por unidad de volumen

lámina lámina fina de material; las láminas son lo suficientemente finas para que, a efectos matemáticos, puedan tratarse como si fueran bidimensionales

Ley de Hooke ley que establece que la fuerza necesaria para comprimir (o alargar) un resorte es proporcional a la distancia que el resorte se ha comprimido (o estirado) desde el equilibrio; en otras palabras, $F = kx$, donde k es una constante

longitud del arco la longitud del arco de una curva puede considerarse como la distancia que recorrería una persona a lo largo de la trayectoria de la curva

método de las arandelas caso especial del método de las rebanadas que se utiliza con sólidos de revolución cuando los cortes son arandelas

método de las capas cilíndricas método para calcular el volumen de un sólido de revolución dividiéndolo en capas cilíndricas anidadas; este método se diferencia de los métodos de los discos o de las arandelas en que integramos con respecto a la variable opuesta

método de las rebanadas método de cálculo del volumen de un sólido que consiste en cortarlo en rebanadas, calcular el volumen de cada una y luego sumar los volúmenes para obtener un estimado del volumen total; a medida que el número de rebanadas llega al infinito, esta estimación se convierte en una integral que da el valor exacto del volumen

método de los discos caso especial del método de las rebanadas utilizado con sólidos de revolución cuando los cortes son discos

momento si se disponen *n* masas en una línea numérica, el momento del sistema respecto al origen viene dado por $M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$; si, en cambio, consideramos una región en el plano, limitada por encima por una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, entonces los momentos de la región con respecto a los ejes *x* y *y* vienen dados por $M_x = \rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx$ y $M_y = \rho\int_a^b xf(x)dx$, respectivamente

presión hidrostática presión ejercida por el agua sobre un objeto sumergido

principio de simetría este principio establece que si una región *R* es simétrica respecto a una línea *l*, el centroide de *R* se encuentra en *l*

sección transversal la intersección de un plano y un objeto sólido

semivida si una cantidad decrece exponencialmente, la vida media es el tiempo que dicha cantidad tarda en reducirse a la mitad. Viene dado por $(\ln 2)/k$

sólido de revolución sólido generado al girar una región en un plano alrededor de una línea en ese plano

teorema de Pappus para el volumen teorema que afirma que el volumen de un sólido de revolución formado al girar una región alrededor de un eje externo es igual al área de la región multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de la región

tiempo de duplicación si una cantidad crece exponencialmente, el tiempo de duplicación es el tiempo que tarda la cantidad en duplicarse, y viene dado por $(\ln 2)/k$

trabajo la cantidad de energía que se necesita para mover un objeto; en física, cuando una fuerza es constante, el trabajo se expresa como el producto de la fuerza por la distancia

tronco porción de un cono; se construye cortando el cono con un plano paralelo a la base

Ecuaciones clave

Área entre dos curvas, integrando en el eje *x*	$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$
Área entre dos curvas, integrando en el eje *y*	$A = \int_c^d [u(y) - v(y)]\, dy$

Método de los discos a lo largo del eje *x*	$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$
Método de los discos a lo largo del eje *y*	$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy$
Método de las arandelas	$V = \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx$

Método de las capas cilíndricas	$V = \int_a^b (2\pi x f(x))\, dx$

Longitud de arco de una función de *x*	$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$
Longitud de arco de una función de *y*	$\text{Longitud de arco} = \int_c^d \sqrt{1 + \left[g'(y)\right]^2}\, dy$
Superficie de una función de *x*	$\text{Superficie} = \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\right) dx$

Masa de un objeto unidimensional	$m = \int_a^b \rho(x) dx$
Masa de un objeto circular	$m = \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx$
Trabajo realizado sobre un objeto	$W = \int_a^b F(x) dx$
Fuerza hidrostática sobre una placa	$F = \int_a^b \rho w(x) s(x) dx$

Masa de una lámina	$m = \rho \int_a^b f(x)dx$
Momentos de una lámina	$M_x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx$ y $M_y = \rho \int_a^b xf(x)dx$
Centro de masa de una lámina	$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$

Función logarítmica natural	$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ Z
Función exponencial $y = e^x$	$\ln y = \ln(e^x) = x$ Z

Conceptos clave

2.1 Áreas entre curvas

- Al igual que las integrales definidas pueden utilizarse para encontrar el área bajo una curva, también pueden utilizarse para encontrar el área entre dos curvas.
- Para encontrar el área entre dos curvas definidas por funciones, integre la diferencia de las funciones.
- Si los gráficos de las funciones se intersecan, o si la región es compleja, utilice el valor absoluto de la diferencia de las funciones. En este caso, puede ser necesario evaluar dos o más integrales y sumar los resultados para encontrar el área de la región.
- A veces puede ser más fácil integrar con respecto a y para encontrar el área. Los principios son los mismos independientemente de la variable que se utilice como variable de integración.

2.2 Determinar los volúmenes mediante el corte

- Las integrales definidas pueden utilizarse para hallar los volúmenes de los sólidos. Utilizando el método de las rebanadas, podemos encontrar un volumen integrando el área de la sección transversal.
- En los sólidos de revolución, los cortes de volumen suelen ser discos y las secciones transversales son círculos. El método de los discos consiste en aplicar el método de las rebanadas en el caso particular de que las secciones transversales sean círculos, y en utilizar la fórmula del área de un círculo.
- Si un sólido de revolución tiene una cavidad en el centro, los cortes de volumen son arandelas. Con el método de las arandelas, el área del círculo interior se resta del área del círculo exterior antes de integrarlo.

2.3 Volúmenes de revolución: capas cilíndricas

- El método de las capas cilíndricas es otro método para utilizar una integral definida para calcular el volumen de un sólido de revolución. En ocasiones este método es preferible al de los discos o al de las arandelas porque integramos con respecto a la otra variable. En algunos casos, una integral es bastante más complicada que la otra.
- La geometría de las funciones y la dificultad de la integración son los principales factores para decidir qué método de integración utilizaremos.

2.4 Longitud del arco de una curva y superficie

- La longitud de arco de una curva se puede calcular mediante una integral definida.
- La longitud de arco se aproxima primero mediante segmentos de línea, lo que genera una suma de Riemann. Tomando un límite nos da la fórmula de la integral definida. El mismo proceso puede aplicarse a las funciones de y.
- Los conceptos utilizados para calcular la longitud de arco pueden generalizarse para hallar el área superficial de una superficie de revolución.
- Las integrales generadas por las fórmulas de longitud de arco y área superficial suelen ser difíciles de evaluar. Puede ser necesario utilizar una computadora o una calculadora para aproximar los valores de las integrales.

2.5 Aplicaciones físicas

- Varias aplicaciones físicas de la integral definida son comunes en ingeniería y física.
- Las integrales definidas pueden utilizarse para determinar la masa de un objeto si se conoce su función de

densidad.
- El trabajo también se puede calcular al integrar una función de fuerza, o al contrarrestar la fuerza de la gravedad, como en un problema de bombeo.
- Las integrales definidas también pueden utilizarse para calcular la fuerza ejercida sobre un objeto sumergido en un líquido.

2.6 Momentos y centros de masa

- Matemáticamente, el centro de masa de un sistema es el punto en el que podría concentrarse la masa total del sistema sin cambiar el momento. En términos generales, el centro de masa puede considerarse el punto de equilibrio del sistema.
- Para masas puntuales distribuidas a lo largo de una línea numérica, el momento del sistema respecto al origen es $M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. En lo concerniente a las masas puntuales distribuidas en un plano, los momentos del sistema con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ y $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, respectivamente.
- Para una lámina limitada por encima por una función $f(x)$, los momentos del sistema con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son $M_x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx$ y $M_y = \rho \int_a^b x f(x) dx$.
- Las coordenadas *x* y *y* del centro de masa se pueden hallar dividiendo los momentos alrededor de los ejes *y* y *x*, respectivamente, entre la masa total. El principio de simetría dice que si una región es simétrica con respecto a una línea, entonces el centroide de la región se encuentra en la línea.
- El teorema de Pappus para el volumen dice que si se hace girar una región alrededor de un eje externo, el volumen del sólido resultante es igual al área de la región multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de la región.

2.7 Integrales, funciones exponenciales y logaritmos

- El manejo anterior de los logaritmos y las funciones exponenciales no definía las funciones de forma precisa y formal. Esta sección desarrolla los conceptos de forma matemáticamente rigurosa.
- La piedra angular del desarrollo es la definición del logaritmo natural en términos de una integral.
- La función e^x se define entonces como la inversa del logaritmo natural.
- Las funciones exponenciales generales se definen en términos de e^x, y las correspondientes funciones inversas son logaritmos generales.
- Las propiedades conocidas de los logaritmos y los exponentes siguen siendo válidas en este contexto más riguroso.

2.8 Crecimiento y decaimiento exponencial

- El crecimiento y el decrecimiento exponencial son dos de las aplicaciones más comunes de las funciones exponenciales.
- Los sistemas que presentan un crecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{kt}$.
- En el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad presente. En otras palabras, $y' = ky$.
- Los sistemas que presentan un crecimiento exponencial tienen un tiempo de duplicación constante, que viene dado por $(\ln 2)/k$.
- Los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{-kt}$.
- Los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial tienen una vida media constante, que viene dada por $(\ln 2)/k$.

2.9 Cálculo de las funciones hiperbólicas

- Las funciones hiperbólicas se definen en términos de funciones exponenciales.
- La diferenciación término a término permite obtener fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas. Estas fórmulas de diferenciación dan lugar, a su vez, a fórmulas de integración.
- Con las restricciones de rango adecuadas, todas las funciones hiperbólicas tienen inversas.
- La diferenciación implícita da lugar a fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas inversas, que a su vez dan lugar a fórmulas de integración.
- Las aplicaciones físicas más comunes de las funciones hiperbólicas son los cálculos con catenarias.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

435. La cantidad de trabajo para bombear el agua de un cilindro medio lleno es la mitad de la cantidad de trabajo para bombear el agua del cilindro lleno.

436. Si la fuerza es constante, la cantidad de trabajo para mover un objeto de $x = a$ a $x = b$ ¿es $F(b - a)$.

437. El método de disco puede utilizarse en cualquier situación en la que el método de las arandelas sirva para calcular el volumen de un sólido de revolución.

438. Si la semivida del seaborgio-266 ¿es 360 ms, entonces $k = (\ln(2))/360$.

En los siguientes ejercicios, utilice el método solicitado para determinar el volumen del sólido.

439. El volumen que tiene como base la elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$ y secciones transversales de un triángulo equilátero perpendicular al eje y. Utilice el método de rebanadas.

440. $y = x^2 - x$, de $x = 1$ para $x = 4$, girado alrededor del eje y mediante el método de las arandelas

441. $x = y^2$ y $x = 3y$ girado alrededor del eje y mediante el método de las arandelas

442. $x = 2y^2 - y^3, x = 0,$ y $y = 0$ girado alrededor del eje x mediante capas cilíndricas

En los siguientes ejercicios, calcule

a. el área de la región,
b. el volumen del sólido cuando se gira alrededor del eje x, y
c. el volumen del sólido cuando se gira alrededor del eje y. Utilice el método que le parezca más adecuado.

443. $y = x^3, x = 0, y = 0,$ y $x = 2$

444. $y = x^2 - x$ y $x = 0$

445. **[T]** $y = \ln(x) + 2$ y $y = x$

446. $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$

447. $y = 5 + x, y = x^2, x = 0,$ y $x = 1$

448. Por debajo de $x^2 + y^2 = 1$ y por encima de $y = 1 - x$

449. Encuentre la masa de $\rho = e^{-x}$ en un disco centrado en el origen con radio 4.

450. Halle el centro de masa para $\rho = \tan^2 x$ sobre $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

451. Calcule la masa y el centro de masa de $\rho = 1$ en la región delimitada por $y = x^5$ y la intersección $y = \sqrt{x}$.

En los siguientes ejercicios, calcule las longitudes de arco solicitadas.

452. La longitud de x por $y = \cosh(x)$ de $x = 0$ a $x = 2$.

453. La longitud de y para $x = 3 - \sqrt{y}$ a partir de $y = 0$ al $y = 4$

En los siguientes ejercicios, calcule el área superficial y el volumen cuando las curvas dadas giran alrededor del eje especificado.

454. La forma creada al girar la región entre $y = 4 + x$, $y = 3 - x$, $x = 0$, y $x = 2$ girado alrededor del eje *y*.

455. El altavoz creado por al girar $y = 1/x$ de $x = 1$ a $x = 4$ alrededor del eje *x*.

456. Para este ejercicio, consideremos la presa Karun-3 en Irán. Su forma puede aproximarse a la de un triángulo isósceles invertido que atraviesa el río, con una altura de 205 m y un ancho (en la parte superior de la presa) de 388 m. Supongamos que la profundidad actual del agua es de 180 m. La densidad del agua es de 1.000 kg/m^3. Calcule la fuerza total sobre la pared de la presa.

457. Usted es un investigador de la escena del crimen que intenta determinar la hora de la muerte de una víctima. Es mediodía y hace $45\ °\text{F}$ afuera y la temperatura del cuerpo es $78°\text{F}$. Sabe que la constante de enfriamiento es $k = 0{,}00824°\text{F/min}$. ¿Cuándo murió la víctima, suponiendo que la temperatura de un ser humano es $98°\text{F}$?

En el siguiente ejercicio, considere la caída de la bolsa en 1929 en Estados Unidos. La tabla muestra el promedio industrial del Dow Jones por año hasta la caída.

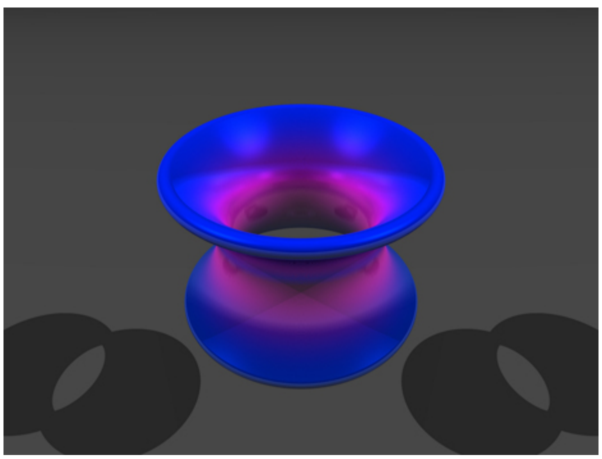
Fuente: http://stockcharts.com/freecharts/historical/djia19201940.html

Años después de 1920	Valor ($)
1	$63{,}90$
3	100
5	110
7	160
9	$381{,}17$

458. **[T]** La curva exponencial que mejor se ajusta a estos datos viene dada por $y = 40{,}71 + 1{,}224^x$. ¿Por qué cree que las ganancias del mercado fueron insostenibles? Utilice las derivadas primera y segunda para justificar su respuesta. ¿Cuál sería la predicción de este modelo para el promedio industrial de Dow Jones en 2014?

En los siguientes ejercicios, considera la catenoide, el único sólido de revolución que tiene una superficie mínima, o curvatura promedio de cero. Una catenoide en la naturaleza puede encontrarse al estirar el jabón entre dos anillos.

459. Calcule el volumen de la catenoide $y = \cosh(x)$ de $x = -1 \text{ para } x = 1$ que se crea al girar esta curva alrededor del eje x, como se muestra aquí.



460. Calcule el área superficial de la catenoide $y = \cosh(x)$ de $x = -1$ a $x = 1$ que se crea al girar esta curva alrededor del eje x.



3 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Figura 3.1 Una cuidadosa planificación de las señales de tráfico puede evitar o reducir el número de accidentes en las intersecciones más concurridas (créditos: modificación del trabajo de David McKelvey, Flickr).

Esquema del capítulo

Introducción

En una ciudad grande se producen accidentes a una tasa promedio de uno cada tres meses en una intersección especialmente concurrida. Tras las quejas de los vecinos, se modificaron los semáforos de la intersección. Ya han pasado ocho meses desde que se hicieron los cambios y no ha habido ningún accidente. ¿Fueron efectivos los cambios o el intervalo de ocho meses sin accidentes es fruto de la casualidad? Exploraremos esta pregunta más adelante en este capítulo y veremos que la integración es una parte esencial para determinar la respuesta (vea el Ejemplo 3.49).

En el capítulo anterior vimos lo importante que puede ser la integración para todo tipo de temas: desde el cálculo de volúmenes hasta las tasas de flujo, y desde el uso de una función de velocidad para determinar una posición hasta la ubicación de centros de masa. No es de extrañar, pues, que sea importante conocer las técnicas para hallar antiderivadas (o integrales indefinidas) para todo aquel que las utilice. Ya hemos hablado de algunas fórmulas básicas de integración y del método de integración por sustitución. En este capítulo estudiamos algunas técnicas adicionales, incluidas algunas formas de aproximar integrales definidas cuando las técnicas normales no funcionan.

3.1 Integración por partes

Objetivos de aprendizaje

3.1.1 Reconocer cuándo utilizar la integración por partes.
3.1.2 Utilizar la fórmula de integración por partes para resolver problemas de integración.
3.1.3 Utilizar la fórmula de integración por partes para las integrales definidas.

A estas alturas ya tenemos un procedimiento bastante completo sobre cómo evaluar muchas integrales básicas. Sin embargo, aunque podemos integrar $\int x \operatorname{sen}(x^2) dx$ utilizando la sustitución, $u = x^2$, algo tan simple como $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ nos desafía. Muchos estudiantes quieren saber si existe una regla del producto para la integración. No la hay, pero existe una técnica basada en la regla del producto para la diferenciación que nos permite cambiar una integral por otra. A esta técnica la llamamos **integración por partes**.

La fórmula de integración por partes

Si, $h(x) = f(x)g(x)$, entonces utilizando la regla del producto, obtenemos $h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$. Aunque al principio pueda parecer contraproducente, integremos ahora ambos lados de esta ecuación:
$\int h'(x)dx = \int \left(g(x)f'(x) + f(x)g'(x)\right) dx.$

Esto nos da

$$h(x) = f(x)g(x) = \int g(x)f'(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Ahora resolvemos para $\int f(x)g'(x)dx$:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Al hacer las sustituciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$, que a su vez forman $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$, tenemos la forma más compacta

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Teorema 3.1

Integración por partes
Supongamos que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones con derivadas continuas. Entonces, la fórmula de integración por partes para la integral que involucra estas dos funciones es:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{3.1}$$

La ventaja de utilizar la fórmula de integración por partes es que podemos usarla para cambiar una integral por otra, posiblemente más fácil. El siguiente ejemplo ilustra su uso.

EJEMPLO 3.1

Utilizar la integración por partes

Utilice la integración por partes con $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ para evaluar $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución

Al elegir $u = x$, tenemos $du = 1dx$. Dado que $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, obtenemos $v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$. Es conveniente llevar la cuenta de estos valores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \operatorname{sen} x\, dx \\ du &= 1dx & v &= \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x\, dx &= (x)(-\cos x) - \int (-\cos x)(1dx) && \text{Sustituya.} \\ &= -x\cos x + \int \cos x\, dx && \text{Simplifique.} \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C. && \text{Utilice } \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Análisis

Llegados a este punto, probablemente haya que aclarar algunos puntos. En primer lugar, puede que tenga curiosidad por saber qué habría pasado si hubiéramos elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x$. Si lo hubiéramos hecho, entonces tendríamos $du = \cos x$ dx y $v = \frac{1}{2}x^2$. Así, tras aplicar la integración por partes, tenemos

$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x - \int \frac{1}{2}x^2 \cos x\, dx$. Desafortunadamente, con la nueva integral, no estamos en mejor posición que antes. Es importante tener en cuenta que cuando aplicamos la integración por partes, es posible que tengamos que probar varias opciones para u y dv antes de encontrar una opción que funcione.

En segundo lugar, puede preguntarse por qué, cuando calculamos $v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$, no utilizamos $v = -\cos x + K$. Para ver que no hay diferencia, podemos volver a hacer el problema utilizando $v = -\cos x + K$:

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x\, dx &= (x)(-\cos x + K) - \int (-\cos x + K)(1dx) \\ &= -x\cos x + Kx + \int \cos x\, dx - \int K dx \\ &= -x\cos x + Kx + \operatorname{sen} x - Kx + C \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Como puede ver, no hay diferencia en la solución final.

Por último, podemos comprobar que nuestra antiderivada es correcta diferenciando $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(-x\cos x + \operatorname{sen} x + C) &= (-1)\cos x + (-x)(-\operatorname{sen} x) + \cos x \\ &= x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la antiderivada es correcta.

MEDIOS

Vea este video (http://www.openstax.org/l/20_intbyparts1) y visite este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_intbyparts2) para ver ejemplos de integración por partes.

3.1 Evalúe $\int xe^{2x}\, dx$ utilizando la fórmula de integración por partes con $u = x$ y $dv = e^{2x}\, dx$.

La pregunta natural que hay que hacerse en este punto es: ¿cómo sabemos elegir u y dv? A veces es una cuestión de ensayo y error; sin embargo, el acrónimo LIATE puede ayudar a menudo a eliminar algunas de las conjeturas de nuestras elecciones. Este acrónimo significa funciones **L**ogarítmicas, funciones trigonométricas **I**nversas, funciones **A**lgebraicas, funciones **T**rigonométricas y funciones **E**xponenciales Esta nemotecnia sirve de ayuda para determinar una elección adecuada para u.

El tipo de función en la integral que aparece primero en la lista debe ser nuestra primera opción de u. Por ejemplo, si una integral contiene una función logarítmica y una función algebraica, debemos elegir que u sea la función logarítmica, porque L viene antes de A en LIATE. La integral en el Ejemplo 3.1 tiene una función trigonométrica $(\operatorname{sen} x)$. y una función algebraica (x) . Como A va antes que T en LIATE, elegimos que u sea la función algebraica. Cuando hayamos elegido u, dv se selecciona para que sea la parte restante de la función a integrar, junto con dx.

¿Por qué funciona esta nemotecnia? Recuerde que todo lo que elijamos para que sea dv debe ser algo que podamos integrar. Como no tenemos fórmulas de integración que nos permitan integrar funciones logarítmicas simples y funciones trigonométricas inversas, tiene sentido que no se elijan como valores para dv. En consecuencia, deberían estar de primero en la lista como opciones para u. Por lo tanto, ponemos LI al principio de la nemotecnia (también podríamos haber empezado con IL, ya que estos dos tipos de funciones no aparecerán juntas en un problema de integración por partes). Las funciones exponenciales y trigonométricas están al final de nuestra lista porque son bastante fáciles de integrar y son buenas opciones para dv. Por lo tanto, tenemos TE al final de nuestra nemotecnia. (También podríamos haber utilizado ET al final, ya que cuando este tipo de funciones aparecen juntas no suele importar realmente cuál es u y cuál es dv.) Las funciones algebraicas son, por lo general, fáciles tanto de integrar como de diferenciar, y se encuentran en el centro de la nemotecnia.

EJEMPLO 3.2

Utilizar la integración por partes

Evalúe $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

Solución

Empiece por reescribir la integral:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\ln x\,dx.$$

Como esta integral contiene la función algebraica x^{-3} y la función logarítmica $\ln x$, elija $u = \ln x$, ya que la L va antes de la A en LIATE. Después de haber elegido $u = \ln x$, debemos elegir $dv = x^{-3}\,dx$.

A continuación, ya que $u = \ln x$, tenemos $du = \frac{1}{x}dx$. También, $v = \int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}x^{-2}$. Resumiendo,

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^{-3}\,dx \\ du &= \tfrac{1}{x}dx & v &= \int x^{-3}\,dx = -\tfrac{1}{2}x^{-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes (Ecuación 3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx &= \int x^{-3}\ln x\,dx = (\ln x)\left(-\tfrac{1}{2}x^{-2}\right) - \int \left(-\tfrac{1}{2}x^{-2}\right)\left(\tfrac{1}{x}dx\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}x^{-2}\ln x + \int \tfrac{1}{2}x^{-3}\,dx && \text{Simplifique.} \\ &= -\tfrac{1}{2}x^{-2}\ln x - \tfrac{1}{4}x^{-2} + C && \text{Integre.} \\ &= -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2} + C. && \text{Reescriba con enteros positivos.} \end{aligned}$$

3.2 Evalúe $\displaystyle\int x\ln x\,dx$.

En algunos casos, como en los dos ejemplos siguientes, puede ser necesario aplicar la integración por partes más de una vez.

EJEMPLO 3.3

Aplicar la integración por partes más de una vez

Evalúe $\int x^2 e^{3x}\,dx$.

Solución

Utilizando LIATE, elija $u = x^2$ y $dv = e^{3x}\,dx$. Por lo tanto, $du = 2x\,dx$ y $v = \int e^{3x}\,dx = \left(\frac{1}{3}\right) e^{3x}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= e^{3x}\,dx \\ du &= 2x\,dx & v &= \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ecuación 3.1 se obtiene

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \int \frac{2}{3}xe^{3x}\,dx.$$

Todavía no podemos integrar $\int \frac{2}{3}xe^{3x}\,dx$ directamente, pero la integral tiene ahora una potencia menor en x. Podemos evaluar esta nueva integral utilizando de nuevo la integración por partes. Para ello, elija $u = x$ y $dv = \frac{2}{3}e^{3x}\,dx$. Por lo tanto, $du = dx$ y $v = \int \left(\frac{2}{3}\right) e^{3x}\,dx = \left(\frac{2}{9}\right) e^{3x}$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \tfrac{2}{3}e^{3x}\,dx \\ du &= dx & v &= \int \frac{2}{3}e^{3x}\,dx = \frac{2}{9}e^{3x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \left(\frac{2}{9}xe^{3x} - \int \frac{2}{9}e^{3x}\,dx\right).$$

Tras evaluar la última integral y simplificar, obtenemos

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

EJEMPLO 3.4

Aplicar la integración por partes cuando LIATE no funciona del todo

Evalúe $\int t^3 e^{t^2}\,dt$.

Solución

Si utilizamos una interpretación estricta de la nemotecnia LIATE para hacer nuestra elección de u, terminamos con $u = t^3$ y $dv = e^{t^2}\,dt$. Desafortunadamente, esta opción no funciona porque no podemos evaluar $\int e^{t^2}\,dt$. Sin embargo, como podemos evaluar $\int te^{t^2}\,dx$, podemos intentar elegir $u = t^2$ y $dv = te^{t^2}\,dt$. Con estas opciones tenemos

$$\begin{aligned} u &= t^2 & dv &= te^{t^2}\,dt \\ du &= 2t\,dt & v &= \int te^{t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}e^{t^2}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\int t^3 e^{t^2}\,dt &= \tfrac{1}{2}t^2 e^{t^2} - \int \frac{1}{2}e^{t^2}\,2t\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}t^2 e^{t^2} - \tfrac{1}{2}e^{t^2} + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.5

Aplicar la integración por partes más de una vez

Evalúe $\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$.

Solución

Esta integral parece tener una sola función, es decir, $\operatorname{sen}(\ln x)$, sin embargo, siempre podemos utilizar la función constante 1 como la otra función. En este ejemplo, vamos a elegir $u = \operatorname{sen}(\ln x)$ y $dv = 1dx$. (La decisión de utilizar $u = \operatorname{sen}(\ln x)$ es fácil. No podemos elegir $dv = \operatorname{sen}(\ln x)dx$ porque si pudiéramos integrarla, ¡no estaríamos usando la integración por partes en primer lugar!). En consecuencia, $du = (1/x)\cos(\ln x)dx$ y $v = \int 1dx = x$. Tras aplicar la integración por partes a la integral y simplificar, tenemos

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Desafortunadamente, este proceso nos deja una nueva integral muy parecida a la original. Sin embargo, veamos qué ocurre cuando aplicamos de nuevo la integración por partes. Esta vez vamos a elegir $u = \cos(\ln x)$ y $dv = 1dx$, que da $du = -(1/x)\operatorname{sen}(\ln x)dx$ y $v = \int 1dx = x$. Sustituyendo, tenemos

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = x\operatorname{sen}(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) - \int -\operatorname{sen}(\ln x)dx\right).$$

Tras simplificar, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \operatorname{sen}(\ln x)dx.$$

La última integral es ahora la misma que la original. Puede parecer que simplemente hemos entrado en un círculo, pero ahora podemos evaluar realmente la integral. Para ver cómo se hace esto más claramente, sustituya $I = \int \operatorname{sen}(\ln x)dx$. Así, la ecuación se convierte en

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I.$$

En primer lugar, sume I a ambos lados de la ecuación para obtener

$$2I = x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x).$$

A continuación, divida entre 2:

$$I = \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x).$$

Sustituyendo $I = \int \operatorname{sen}(\ln x)dx$ de nuevo, tenemos

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x).$$

De ello se desprende que $(1/2)x\,\text{sen}(\ln x) - (1/2)x\cos(\ln x)$ es una antiderivada de $\text{sen}(\ln x)dx$. Para la antiderivada más general, sume $+C$:

$$\int \text{sen}(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\,\text{sen}(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + C.$$

Análisis

Si este método resulta un poco extraño al principio, podemos comprobar la respuesta por diferenciación:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\,\text{sen}(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x)\right)\\ &= \frac{1}{2}(\text{sen}(\ln x)) + \cos(\ln x).\frac{1}{x}.\frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}\cos(\ln x) - \text{sen}(\ln x).\frac{1}{x}.\frac{1}{2}x\right)\\ &= \text{sen}(\ln x).\end{aligned}$$

3.3 Evalúe $\int x^2 \,\text{sen}\, x\, dx.$

Integración por partes para integrales definidas

Ahora que hemos utilizado con éxito la integración por partes para evaluar integrales indefinidas, pasamos a estudiar las integrales definidas. La técnica de integración es realmente la misma, solo que añadimos un paso para evaluar la integral en los límites superior e inferior de la integración.

Teorema 3.2

Integración por partes para integrales definidas

Supongamos que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ sean funciones con derivadas continuas en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b u\, dv = uv|_a^b - \int_a^b v\, du. \tag{3.2}$$

EJEMPLO 3.6

Cálculo del área de una región

Halle el área de la región delimitada arriba por el gráfico de $y = \tan^{-1} x$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

Esta región se muestra en la Figura 3.2. Para hallar el área, debemos evaluar $\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$.

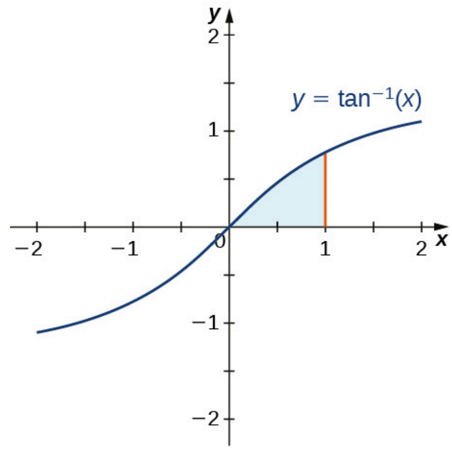


Figura 3.2 Para hallar el área de la región sombreada, tenemos que utilizar la integración por partes.

Para esta integral, vamos a elegir $u = \tan^{-1} x$ y $dv = dx$, lo que nos da $du = \frac{1}{x^2+1} dx$ y $v = x$. Tras aplicar la fórmula de integración por partes (Ecuación 3.2) obtenemos

$$\text{Área} = x \tan^{-1} x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx.$$

Utilice la sustitución en *u* para obtener

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1||_0^1.$$

Por lo tanto,

$$\text{Área} = x \ \tan^{-1} \ x\Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln|x^2+1|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln \ 2.$$

Llegados a este punto, no sería mala idea hacer una "evaluación realista" sobre cuán razonable es nuestra solución. Dado que $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0{,}4388$, y a partir de la Figura 3.2 esperamos que nuestra área sea ligeramente inferior a 0,5, esta solución parece razonable.

EJEMPLO 3.7

Cálculo de un volumen de revolución

Calcule el volumen del sólido obtenido cuando se gira la región delimitada por el gráfico de $f(x) = e^{-x}$, el eje *x*, el eje *y* y la línea $x = 1$ alrededor del eje *y*.

Solución

La mejor opción para resolver este problema es utilizar el método de capas cilíndricas. Comience por dibujar la región que va a girar, junto con un rectángulo típico (vea el siguiente gráfico).

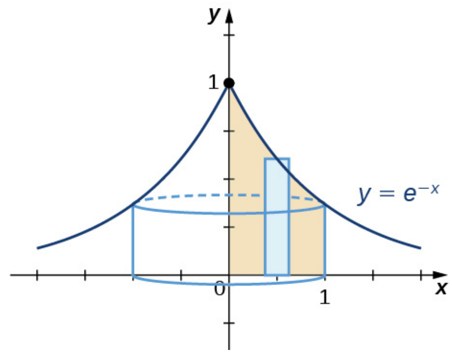


Figura 3.3 Podemos utilizar el método de capas cilíndricas para calcular un volumen de revolución.

Para calcular el volumen utilizando capas cilíndricas, debemos evaluar $2\pi \int_0^1 xe^{-x}\,dx$. Para ello, supongamos que $u = x$ y $dv = e^{-x}$. Estas elecciones nos llevan a $du = dx$ y $v = \int e^{-x} = -e^{-x}$. Sustituyendo en la Ecuación 3.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= 2\pi \int_0^1 xe^{-x}\,dx = 2\pi\left(-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx\right) && \text{Utilice la integración por partes.} \\ &= -2\pi xe^{-x}|_0^1 - 2\pi e^{-x}|_0^1 && \text{Evalúe } \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1. \\ &= 2\pi - \tfrac{4\pi}{e}. && \text{Evalúe y simplifique.} \end{aligned}$$

Análisis

Una vez más, es conveniente comprobar si nuestra solución es razonable. Observamos que el sólido tiene un volumen ligeramente inferior al de un cilindro de radio 1 y altura $1/e$ sumado al volumen de un cono de radio de base 1 y altura $1 - \frac{1}{e}$. En consecuencia, el sólido debe tener un volumen un poco menor que

$$\pi(1)^2 \frac{1}{e} + \left(\frac{\pi}{3}\right)(1)^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{2\pi}{3e} + \frac{\pi}{3} \approx 1{,}8177.$$

Dado que $2\pi - \frac{4\pi}{e} \approx 1{,}6603$, vemos que nuestro volumen calculado es razonable.

3.4 Evalúe $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS

Al utilizar la técnica de integración por partes, hay que elegir cuidadosamente cuál expresión es u. Para cada uno de los siguientes problemas, utilice las directrices de esta sección para elegir u. **No** *evalúe las integrales.*

1. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

2. $\int x^3 \ln(x)dx$

3. $\int y^3 \cos y\,dy$

4. $\int x^2 \arctan x\,dx$

5. $\int e^{3x} \operatorname{sen}(2x)dx$

Calcule la integral utilizando el método más sencillo. No todos los problemas requieren integración por partes.

6. $\int v \operatorname{sen} v dv$

7. $\int \ln x\, dx$ (*Pista:* $\int \ln x\, dx$ equivale a $\int 1. \ln(x) dx.$) grandes.

8. $\int x \cos x\, dx$

9. $\int \tan^{-1} x\, dx$

10. $\int x^2 e^x dx$

11. $\int x \operatorname{sen}(2x) dx$

12. $\int xe^{4x} dx$

13. $\int xe^{-x} dx$

14. $\int x \cos 3x\, dx$

15. $\int x^2 \cos x\, dx$

16. $\int x \ln x\, dx$

17. $\int \ln(2x+1) dx$

18. $\int x^2 e^{4x} dx$

19. $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

20. $\int e^x \cos x\, dx$

21. $\int xe^{-x^2} dx$

22. $\int x^2 e^{-x} dx$

23. $\int \operatorname{sen}(\ln(2x)) dx$

24. $\int cos(\ln x) dx$

25. $\int (\ln x)^2 dx$

26. $\int \ln(x^2) dx$

27. $\int x^2 \ln x\, dx$

28. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

29. $\int \cos^{-1}(2x) dx$

30. $\int x \arctan x\, dx$

31. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

32. $\int x^3 \cos x\, dx$

33. $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$

34. $\int x^3 e^x dx$

35. $\int x \sec^{-1} x\, dx$

36. $\int x \sec^2 x\, dx$

37. $\int x \cosh x\, dx$

Calcule las integrales definidas. Utilice una herramienta gráfica para confirmar sus respuestas.

38. $\int_{1/e}^{1} \ln x\, dx$

39. $\int_0^1 xe^{-2x} dx$ (Exprese la respuesta en forma exacta).

40. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ $\left(\text{supongamos que } u = \sqrt{x}\right)$ grandes.

41. $\int_1^e \ln(x^2) dx$

42. $\int_0^{\pi} x \cos x\, dx$

43. $\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$ (Exprese la respuesta en forma exacta).

44. $\int_0^3 \ln(x^2+1)dx$ (Exprese la respuesta en forma exacta).

45. $\int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ (Exprese la respuesta en forma exacta).

46. $\int_0^1 x5^x\, dx$ (Exprese la respuesta utilizando cinco dígitos significativos).

47. Evalúe $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)dx$

Derive las siguientes fórmulas utilizando la técnica de integración por partes. Suponga que n es un número entero positivo. Estas fórmulas se llaman fórmulas de reducción porque el exponente del término x se ha reducido en uno en cada caso. La segunda integral es más sencilla que la integral original.

48. $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx$

49. $\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx$

50. $\int x^n \operatorname{sen} x\, dx =$_______

51. Integre $\int 2x\sqrt{2x-3}dx$ utilizando dos métodos:

a. Utilizando la integración por partes, suponiendo que $dv = \sqrt{2x-3}\,dx$
b. Sustitución, suponiendo que $u = 2x-3$

Indique si utilizaría la integración por partes para evaluar la integral. Si es así, identifique u y dv. Si no es así, describa la técnica utilizada para realizar la integración sin resolver realmente el problema.

52. $\int x \ln x\, dx$

53. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

54. $\int xe^x\, dx$

55. $\int xe^{x^2-3}\, dx$

56. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

57. $\int x^2 \operatorname{sen}(3x^3+2)dx$

Dibuje la región delimitada arriba por la curva, el eje x y $x = 1$, y halle el área de la región. Proporcione la forma exacta o redondee las respuestas al número de decimales indicados.

58. $y = 2xe^{-x}$ (Aproxime la respuesta a cuatro decimales).

59. $y = e^{-x} \operatorname{sen}(\pi x)$ (Aproxime la respuesta a cinco decimales).

Calcule el volumen generado al girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la línea especificada. Exprese las respuestas de forma exacta o aproximada al número de decimales indicado.

60. $y = \operatorname{sen} x, y = 0, x = 2\pi, x = 3\pi$ alrededor del eje y (exprese la respuesta en forma exacta).

61. $y = e^{-x}$ $y = 0, x = -1x = 0;$ alrededor de $x = 1$ (Exprese la respuesta en forma exacta).

62. Una partícula que se mueve en línea recta tiene una velocidad de $v(t) = t^2 e^{-t}$ después de t segundos. ¿Qué distancia recorre en los primeros 2 segundos? (Asuma que las unidades están en pies y exprese la respuesta en forma exacta).

63. Halle el área bajo el gráfico de $y = \sec^3 x$ de $x = 0 \text{ a } x = 1$. (Redondee la respuesta a dos dígitos significativos).

64. Halle el área entre $y = (x - 2)e^x$ y el eje x de $x = 2$ hasta $x = 5$. (Exprese la respuesta en forma exacta).

65. Halle el área de la región delimitada por la curva $y = x \cos x$ y el eje x para $\frac{11\pi}{2} \leq x \leq \frac{13\pi}{2}$. (Exprese la respuesta en forma exacta).

66. Calcule el volumen del sólido generado cuando se gira la región delimitada por la curva $y = \ln x$, el eje x y la línea vertical $x = e^2$ alrededor del eje *x*. (Exprese la respuesta en forma exacta).

67. Calcule el volumen del sólido generado cuando se gira la región delimitada por la curva $y = 4 \cos x$ y el eje *x*, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, alrededor del eje *x*. (Exprese la respuesta en forma exacta).

68. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región del primer cuadrante delimitada por $y = e^x$ y el eje *x*, de $x = 0$ hasta $x = \ln(7)$, alrededor del eje *y*. (Exprese la respuesta en forma exacta).

3.2 Integrales trigonométricas

Objetivos de aprendizaje

3.2.1 Resolver problemas de integración con productos y potencias de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
3.2.2 Resolver problemas de integración con productos y potencias de $\tan x$ y $\sec x$.
3.2.3 Utilizar fórmulas de reducción para resolver integrales trigonométricas.

En esta sección veremos cómo integrar una variedad de productos de funciones trigonométricas. Estas integrales se llaman **integrales trigonométricas**. Son una parte importante de la técnica de integración llamada *sustitución trigonométrica*, que aparece en Sustitución trigonométrica. Esta técnica nos permite convertir expresiones algebraicas que tal vez no podamos integrar en expresiones que implican funciones trigonométricas, que podremos integrar utilizando las técnicas descritas en esta sección. Además, este tipo de integrales aparecen con frecuencia cuando estudiamos más adelante los sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Comencemos nuestro estudio con los productos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Integración de productos y potencias de sen*x* y cos*x*

Una idea clave de la estrategia utilizada para integrar combinaciones de productos y potencias de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ implica reescribir estas expresiones como sumas y diferencias de integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^j x \cos x \, dx$ o $\int \cos^j x \operatorname{sen} x \, dx$. Después de reescribir estas integrales, las evaluamos utilizando la sustitución en *u*. Antes de describir el proceso general en detalle, veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.8

Integración de $\int \cos^j x \operatorname{sen} x \, dx$

Evalúe $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución

Utilice la sustitución en u y supongamos que $u = \cos x$. En este caso, $du = -\operatorname{sen} x \, dx$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \operatorname{sen} x \, dx &= -\int u^3 \, du \\ &= -\tfrac{1}{4}u^4 + C \\ &= -\tfrac{1}{4}\cos^4 x + C.\end{aligned}$$

3.5 Evalúe $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$.

EJEMPLO 3.9

Un ejemplo preliminar: Integración de $\int \cos^j x \operatorname{sen}^k x \, dx$ donde k es impar

Evalúe $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x \, dx$.

Solución

Para convertir esta integral en integrales de la forma $\int \cos^j x \operatorname{sen} x \, dx$, reescriba $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x$ y haga la sustitución $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int \cos^2 x(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x \, dx \quad \text{Supongamos que } u = \cos x; \text{ entonces } du = -\operatorname{sen} x \, dx. \\ &= -\int u^2 \left(1-u^2\right) du \\ &= \int \left(u^4 - u^2\right) du \\ &= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \tfrac{1}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C.\end{aligned}$$

3.6 Evalúe $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

En el siguiente ejemplo, vemos la estrategia que debe aplicarse cuando solo hay potencias pares de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Para las integrales de este tipo, las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

y

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

son inestimables. Estas identidades se conocen a veces como *identidades de reducción de potencia* y pueden derivarse de la identidad de doble ángulo $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ y la identidad pitagórica $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

EJEMPLO 3.10

Integración de una potencia par de $\operatorname{sen} x$

Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

Solución

Para evaluar esta integral, utilicemos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \int \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C. \end{aligned}$$

3.7 Evalúe $\int \cos^2 x\, dx$.

El proceso general de integración de productos de potencias de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se resume en el siguiente conjunto de directrices.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Integración de productos y potencias de sen *x* y cos *x*

Para integrar $\int \cos^j x \operatorname{sen}^k x\, dx$ utilice las siguientes estrategias:

1. Si k es impar, reescriba $\operatorname{sen}^k x = \operatorname{sen}^{k-1} x \operatorname{sen} x$ y utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para reescribir $\operatorname{sen}^{k-1} x$ en términos de $\cos x$. Integre utilizando la sustitución $u = \cos x$. Esta sustitución hace que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$.
2. Si j es impar, reescriba $\cos^j x = \cos^{j-1} x \cos x$ y utilice la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para reescribir $\cos^{j-1} x$ en términos de $\operatorname{sen} x$. Integre utilizando la sustitución $u = \operatorname{sen} x$. Esta sustitución hace que $du = \cos x\, dx$. (*Nota*: Si ambos j y k son impares, se puede utilizar la estrategia 1 o la estrategia 2).
3. Si ambos j y k son pares, utilice $\operatorname{sen}^2 x = (1/2) - (1/2)\cos(2x)$ y $\cos^2 x = (1/2) + (1/2)\cos(2x)$. Después de aplicar estas fórmulas, simplifique y vuelva a aplicar las estrategias 1 a 3 según corresponda.

EJEMPLO 3.11

Integración de $\int \cos^j x \operatorname{sen}^k x\, dx$ donde k es impar

Evalúe $\int \cos^8 x \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

Solución

Dado que la potencia en $\operatorname{sen} x$ es impar, utilice la estrategia 1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \cos^8 x \operatorname{sen}^5 x \, dx &= \int \cos^8 x \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x \, dx && \text{Desprenda sen}\, x. \\
&= \int \cos^8 x (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx && \text{Reescriba } \operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2. \\
&= \int \cos^8 x (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx && \text{Sustituya } \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x. \\
&= \int u^8 (1 - u^2)^2 (-du) && \text{Supongamos que } u = \cos x \text{ y } du = -\operatorname{sen} x \, dx. \\
&= \int \left(-u^8 + 2u^{10} - u^{12}\right) du && \text{Expanda.} \\
&= -\tfrac{1}{9}u^9 + \tfrac{2}{11}u^{11} - \tfrac{1}{13}u^{13} + C && \text{Evalúe la integral.} \\
&= -\tfrac{1}{9}\cos^9 x + \tfrac{2}{11}\cos^{11} x - \tfrac{1}{13}\cos^{13} x + C. && \text{Sustituya } u = \cos x.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.12

Integración de $\int \cos^j x \operatorname{sen}^k x \, dx$ donde *k* y *j* son pares

Evalúe $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

Solución

Dado que la potencia en $\operatorname{sen} x$ es par $(k = 4)$ y la potencia en $\cos x$ es par $(j = 0)$, debemos utilizar la estrategia 3. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 dx && \text{Reescriba } \operatorname{sen}^4 x = \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2. \\
&= \int \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 dx && \text{Sustituya } \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x). \\
&= \int \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\cos^2(2x)\right) dx && \text{Expanda } \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)^2. \\
&= \int \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(4x)\right)\right) dx.
\end{aligned}$$

Dado que $\cos^2(2x)$ tiene una potencia par, sustituya $\cos^2(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)$:

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{8}\cos(4x)\right) dx && \text{Simplifique.} \\
&= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C && \text{Evalúe la integral.}
\end{aligned}$$

3.8 Evalúe $\int \cos^3 x \, dx$.

3.9 Evalúe $\int \cos^2(3x) dx$.

En algunas áreas de la física, como la mecánica cuántica, el procesamiento de señales y el cálculo de series de Fourier, a menudo es necesario integrar productos que incluyen $\operatorname{sen}(ax)$, $\operatorname{sen}(bx)$, $\cos(ax)$, y $\cos(bx)$. Estas integrales se evalúan aplicando las identidades trigonométricas, como se indica en la siguiente regla.

Regla: integración de productos de senos y cosenos de diferentes ángulos

Para integrar productos que implican $\operatorname{sen}(ax)$, $\operatorname{sen}(bx)$, $\cos(ax)$, y $\cos(bx)$, utilice las sustituciones

$$\text{sen}\,(ax)\,\text{sen}\,(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)\,x) - \frac{1}{2}\cos((a+b)\,x)\text{grandes.} \quad \textbf{(3.3)}$$

$$\text{sen}\,(ax)\cos\,(bx) = \frac{1}{2}\text{sen}\,((a-b)\,x) + \frac{1}{2}\text{sen}((a+b)\,x)\text{grandes.} \quad \textbf{(3.4)}$$

$$\cos\,(ax)\cos\,(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)\,x) + \frac{1}{2}\cos((a+b)\,x) \quad \textbf{(3.5)}$$

Estas fórmulas pueden derivarse de las fórmulas de suma de ángulos para el seno y el coseno.

EJEMPLO 3.13

Evaluación de $\int \text{sen}\,(ax)\cos(bx)dx$

Evalúe $\int \text{sen}\,(5x)\cos(3x)dx$.

Solución

Aplique la identidad $\text{sen}(5x)\cos(3x) = \frac{1}{2}\text{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(8x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \text{sen}\,(5x)\cos(3x)dx &= \int \tfrac{1}{2}\text{sen}(2x)\text{dx} + \int \tfrac{1}{2}\text{sen}(8x)\,\text{dx} \\ &= -\tfrac{1}{4}\cos\,(2x) - \tfrac{1}{16}\cos\,(8x) + C.\end{aligned}$$

3.10 Evalúe $\int \cos\,(6x)\cos(5x)dx$.

Integración de productos y potencias de $\tan x$ y $\sec x$

Antes de hablar de la integración de productos y potencias de $\tan x$ y $\sec x$, es útil recordar las integrales que implican $\tan x$ y $\sec x$ que ya hemos aprendido:

1. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
2. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
3. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$
4. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

Para la mayoría de las integrales de productos y potencias de $\tan x$ y $\sec x$, reescribimos la expresión que queremos integrar como la suma o diferencia de integrales de la forma $\int \tan^j x \sec^2 x\,dx$ o $\int \sec^j x \tan x\,dx$. Como vemos en el siguiente ejemplo, podemos evaluar estas nuevas integrales utilizando la sustitución en *u*.

EJEMPLO 3.14

Evaluación de $\int \sec^j x \tan x\,dx$

Evalúe $\int \sec^5 x \tan x\,dx$.

Solución

Empiece por reescribir $\sec^5 x \tan x$ como $\sec^4 x \sec x \tan x$.

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x \tan x \, dx &= \int \sec^4 x \sec x \tan x \, dx && \text{Supongamos que } u = \sec x; \text{ entonces, } du = \sec x \tan x \, dx. \\ &= \int u^4 \, du && \text{Evalúe la integral.} \\ &= \tfrac{1}{5}u^5 + C && \text{Sustituya } \sec x = u. \\ &= \tfrac{1}{5}\sec^5 x + C \end{aligned}$$

MEDIOS

En este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_intseccube) puede leer una información interesante para conocer una integral común en la que interviene la secante.

3.11 Evalúe $\int \tan^5 x \sec^2 x \, dx$.

A continuación, analizamos las distintas estrategias de integración de productos y potencias de $\sec x$ y $\tan x$.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Integración de $\int \tan^k x \sec^j x \, dx$

Para integrar $\int \tan^k x \sec^j x \, dx$, utilice las siguientes estrategias:

1. Si los valores de j es par y $j \geq 2$, reescriba $\sec^j x = \sec^{j-2} x \sec^2 x$ y usamos $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ para reescribir $\sec^{j-2} x$ en términos de $\tan x$. Supongamos que $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x$ dx.
2. Si los valores de k es impar y $j \geq 1$, reescriba $\tan^k x \sec^j x = \tan^{k-1} x \sec^{j-1} x \sec x \tan x$ y usamos $\tan^2 x = \sec^2 x – 1$ para reescribir $\tan^{k-1} x$ en términos de $\sec x$. Supongamos que $u = \sec x$ y $du = \sec x \tan x \, dx$. (*Nota*: Si los valores de j es par y k es impar, entonces se puede utilizar la estrategia 1 o la estrategia 2).
3. Si los valores de k es impar donde $k \geq 3$ y $j = 0$, reescriba $\tan^k x = \tan^{k-2} x \tan^2 x = \tan^{k-2} x(\sec^2 x – 1) = \tan^{k-2} x \sec^2 x - \tan^{k-2} x$. Puede ser necesario repetir este proceso en el término $\tan^{k-2} x$.
4. Si los valores de k es par y j es impar, entonces utilice $\tan^2 x = \sec^2 x – 1$ para expresar $\tan^k x$ en términos de $\sec x$. Utilice la integración por partes para integrar potencias impares de $\sec x$.

EJEMPLO 3.15

Integración de $\int \tan^k x \sec^j x \, dx$ cuando j es par

Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$.

Solución

Dado que la potencia en $\sec x$ es par, reescriba $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x$ y usamos $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ para reescribir la primera $\sec^2 x$ en términos de $\tan x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^6 x \left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x\, dx && \text{Supongamos que } u = \tan x \text{ y } du = \sec^2 x\, \text{dx.} \\
&= \int u^6 \left(u^2 + 1\right) du && \text{Expanda.} \\
&= \int (u^8 + u^6) du && \text{Evalúe la integral.} \\
&= \tfrac{1}{9}u^9 + \tfrac{1}{7}u^7 + C && \text{Sustituya } \tan x = u. \\
&= \tfrac{1}{9}\tan^9 x + \tfrac{1}{7}\tan^7 x + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.16

Integración de $\int \tan^k x \sec^j x\, dx$ cuando k es impar

Evalúe $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$.

Solución

Dado que la potencia en $\tan x$ es impar, comience por reescribir $\tan^5 x \sec^3 x = \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\tan^5 x \sec^3 x &= \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x. && \text{Escriba } \tan^4 x = (\tan^2 x)^2. \\
\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx &= \int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x \sec x \tan x\, dx && \text{Utilice } \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x\, dx && \text{Supongamos que } u = \sec x \text{ y } du = \sec x \tan x\, dx. \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^2 du && \text{Expanda.} \\
&= \int \left(u^6 - 2u^4 + u^2\right) du && \text{Integre.} \\
&= \tfrac{1}{7}u^7 - \tfrac{2}{5}u^5 + \tfrac{1}{3}u^3 + C && \text{Sustituya } \sec x = u. \\
&= \tfrac{1}{7}\sec^7 x - \tfrac{2}{5}\sec^5 x + \tfrac{1}{3}\sec^3 x + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.17

Integración de $\int \tan^k x\, dx$ donde k es impar y $k \geq 3$

Evalúe $\int \tan^3 x\, dx$.

Solución

Comience por reescribir $\tan^3 x = \tan x \tan^2 x = \tan x \left(\sec^2 x - 1\right) = \tan x \sec^2 x - \tan x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\, dx &= \int \left(\tan x \sec^2 x - \tan x\right) dx \\
&= \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\sec x| + C.
\end{aligned}$$

Para la primera integral, utilice la sustitución $u = \tan x$. Para la segunda integral, utilice la fórmula.

EJEMPLO 3.18

Integración de $\int \sec^3 x\, dx$

Integre $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución

Esta integral requiere la integración por partes. Para empezar, supongamos que $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x$ dx. Estas elecciones hacen que $du = \sec x \tan x$ y $v = \tan x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x\, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx && \text{Simplifique.} \\
&= \sec x \tan x - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec x\, dx && \text{Sustituya } \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \\
&= \sec x \tan x + \int \sec x\, dx - \int \sec^3 x\, dx && \text{Reescriba.} \\
&= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\, dx. && \text{Evalúe } \int \sec x\, dx.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\, dx.$$

Dado que la integral $\int \sec^3 x\, dx$ ha vuelto a aparecer en el lado derecho, podemos resolver para $\int \sec^3 x\, dx$ sumándola a ambos lados. Al hacerlo, obtenemos

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|.$$

Dividiendo entre 2, llegamos a

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

3.12 Evalúe $\int \tan^3 x \sec^7 x\, dx$.

Fórmulas de reducción

Evaluación de $\int \sec^n x\, dx$ para los valores de n donde n es impar requiere la integración por partes. Además, también debemos conocer el valor de $\int \sec^{n-2} x\, dx$ para evaluar $\int \sec^n x\, dx$. La evaluación de $\int \tan^n x\, dx$ también requiere poder integrar $\int \tan^{n-2} x\, dx$. Para facilitar el proceso, podemos derivar y aplicar las siguientes **fórmulas de reducción de potencias**. Estas reglas nos permiten sustituir la integral de una potencia de $\sec x$ o $\tan x$ por la integral de una potencia inferior de $\sec x$ o $\tan x$.

Regla: fórmulas de reducción para $\int \sec^n x\, dx$ y $\int \tan^n x\, dx$

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx \quad (3.6)$$

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx \tag{3.7}$$

La primera regla de reducción de potencias puede verificarse aplicando la integración por partes. La segunda puede verificarse siguiendo la estrategia expuesta para integrar las potencias impares de $\tan x$.

EJEMPLO 3.19

Repasando $\int \sec^3 x\, dx$

Aplique una fórmula de reducción para evaluar $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución

Aplicando la primera fórmula de reducción, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\sec x \tan x + \tfrac{1}{2}\int \sec x\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\sec x \tan x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.20

Utilizar una fórmula de reducción

Evalúe $\int \tan^4 x\, dx$.

Solución

Aplicando la fórmula de reducción de $\int \tan^4 x\, dx$ tenemos

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\, dx &= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x\, dx \\ &= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \left(\tan x - \int \tan^0 x\, dx\right) && \text{Aplique la fórmula de reducción a } \int \tan^2 x\, dx. \\ &= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + \int 1\, dx && \text{Simplifique.} \\ &= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C. && \text{Evalúe } \int 1 dx.\end{aligned}$$

3.13 Aplique la fórmula de reducción a $\int \sec^5 x\, dx$.

SECCIÓN 3.2 EJERCICIOS

Rellene el espacio en blanco para que la afirmación sea verdadera.

69. $\operatorname{sen}^2 x +$ ________ $= 1$

70. $\sec^2 x - 1 =$ ________

Utilice una identidad para reducir la potencia de la función trigonométrica a una función trigonométrica elevada a la primera potencia.

71. $\operatorname{sen}^2 x =$ ________

72. $\cos^2 x =$ ________

Evalúe cada una de las siguientes integrales por sustitución en u.

73. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

74. $\int \sqrt{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$

75. $\int \tan^5(2x)\sec^2(2x)dx$

76. $\int \operatorname{sen}^7(2x)\cos(2x)dx$

77. $\int \tan\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

78. $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$

Calcule las siguientes integrales utilizando las directrices para integrar potencias de funciones trigonométricas. Utilice un CAS para comprobar las soluciones. (Nota: Algunos de los problemas pueden realizarse utilizando técnicas de integración aprendidas anteriormente).

79. $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

80. $\int \cos^3 x \, dx$

81. $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

82. $\int \cos^5 x \, dx$

83. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$

84. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$

85. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

86. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^3 x \, dx$

87. $\int \sec x \tan x \, dx$

88. $\int \tan(5x)dx$

89. $\int \tan^2 x \sec x \, dx$

90. $\int \tan x \sec^3 x \, dx$

91. $\int \sec^4 x \, dx$

92. $\int \cot x \, dx$

93. $\int \csc x \, dx$

94. $\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} dx$

En los siguientes ejercicios, halle una fórmula general para las integrales.

95. $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos ax \, dx$

96. $\int \operatorname{sen} ax \cos ax \, dx.$

Utilice las fórmulas del ángulo doble para evaluar las siguientes integrales.

97. $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx$

98. $\int_0^\pi \operatorname{sen}^4 x \, dx$

99. $\int \cos^2 3x \, dx$

100. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

101. $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx$

102. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2(2x)dx$

En los siguientes ejercicios, evalúe las integrales definidas. Exprese las respuestas en forma exacta siempre que sea posible.

103. $\int_0^{2\pi} \cos x \operatorname{sen} 2x \, dx$

104. $\int_0^\pi \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x \, dx$

105. $\int_0^\pi \cos(99x)\operatorname{sen}(101x)dx$

106. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x)dx$

107. $\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(3x)dx$

108. $\int_{0}^{4\pi} \cos(x/2)\operatorname{sen}(x/2)dx$

109. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$ (Redondee esta respuesta a tres decimales).

110. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{\sec^2 x - 1}\,dx$

111. $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos(2x)}\,dx$

112. Calcule el área de la región delimitada por los gráficos de las ecuaciones $y = \operatorname{sen} x, y = \operatorname{sen}^3 x, x = 0, \text{y } x = \frac{\pi}{2}$.

113. Calcule el área de la región delimitada por los gráficos de las ecuaciones $y = \cos^2 x, y = \operatorname{sen}^2 x, x = -\frac{\pi}{4}, \text{y } x = \frac{\pi}{4}$.

114. Una partícula se mueve en línea recta con la función de velocidad $v(t) = \operatorname{sen}(\omega t)\cos^2(\omega t)$. Halle su función de posición $x = f(t)$ si $f(0) = 0$.

115. Calcule el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

En los siguientes ejercicios, resuelva las ecuaciones diferenciales.

116. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x$. La curva pasa por el punto $(0, 0)$.

117. $\frac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen}^4(\pi\theta)$ grandes.

118. Halle la longitud de la curva $y = \ln(\csc x), \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

119. Halle la longitud de la curva $y = \ln(\operatorname{sen} x), \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

120. Calcule el volumen generado al girar la curva $y = \cos(3x)$ alrededor del eje *x*, $0 \le x \le \frac{\pi}{36}$.

En los siguientes ejercicios, utilice esta información: El producto interior de dos funciones f y g en $[a, b]$ se define por $f(x).\,g(x) = \langle f, g\rangle = \int_a^b f\,.\,g dx$. Se dice que dos funciones distintas f y g son ortogonales si $\langle f, g\rangle = 0$.

121. Demuestre que $\{\operatorname{sen}(2x), \cos(3x)\}$ son ortogonales en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

122. Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx$.

123. Integre $y' = \sqrt{\tan x}\sec^4 x$.

Para cada par de integrales, determine cuál es más difícil de evaluar. Explique su razonamiento.

124. $\int \operatorname{sen}^{456} x \cos x\, dx$ o $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

125. $\int \tan^{350} x \sec^2 x\, dx$ o $\int \tan^{350} x \sec x\, dx$

3.3 Sustitución trigonométrica

Objetivos de aprendizaje

3.3.1 Resolver problemas de integración que impliquen la raíz cuadrada de una suma o diferencia de dos cuadrados.

En esta sección, exploramos las integrales que contienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, y $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde los valores de a son positivos. Ya hemos encontrado y evaluado integrales que contienen algunas expresiones de este tipo, pero muchas siguen siendo inaccesibles. La técnica de la **sustitución trigonométrica** es muy útil para evaluar estas integrales. Esta técnica utiliza la sustitución para reescribir estas integrales como integrales trigonométricas.

Integrales que implican $\sqrt{a^2 - x^2}$

Antes de desarrollar una estrategia general para las integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$, considere la integral $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$. Esta integral no puede evaluarse con ninguna de las técnicas sobre las que hemos hablado hasta ahora. Sin embargo, si hacemos la sustitución $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, tenemos $dx = 3 \cos \theta d\theta$. Después de sustituir en la integral, tenemos

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int \sqrt{9 - (3 \operatorname{sen} \theta)^2}\, 3 \cos \theta d\theta.$$

Tras simplificar, tenemos

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int 9 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \cos \theta d\theta.$$

Supongamos que $1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$, ahora tenemos

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int 9 \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta.$$

Suponiendo que $\cos \theta \geq 0$, tenemos

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int 9 \cos^2 \theta d\theta.$$

En este punto, podemos evaluar la integral utilizando las técnicas desarrolladas para integrar potencias y productos de funciones trigonométricas. Antes de completar este ejemplo, echemos un vistazo a la teoría general que hay detrás de esta idea.

Para evaluar las integrales que implican $\sqrt{a^2 - x^2}$, hacemos la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$ y $dx = a \cos \theta$. Para ver que esto realmente tiene sentido, considere el siguiente argumento: El dominio de $\sqrt{a^2 - x^2}$ es $[-a, a]$. Por lo tanto, $-a \leq x \leq a$. En consecuencia, $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$. Dado que el rango de $\operatorname{sen} x$ en $[-(\pi/2), \pi/2]$ es $[-1, 1]$, hay un ángulo único θ que satisface $-(\pi/2) \leq \theta \leq \pi/2$ por lo que $\operatorname{sen} \theta = x/a$, o, de forma equivalente, de modo que $x = a \operatorname{sen} \theta$. Si sustituimos $x = a \operatorname{sen} \theta$ en $\sqrt{a^2 - x^2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} && \text{Supongamos que } x = a \operatorname{sen} \theta \text{ donde } -\tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}. \text{ Simplifique.} \\
&= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} && \text{Saque el factor común } a^2. \\
&= \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} && \text{Sustituya } 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x. \\
&= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} && \text{Tome la raíz cuadrada.} \\
&= |a \cos \theta| \\
&= a \cos \theta.
\end{aligned}$$

Dado que $\cos \theta \geq 0$ en $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $a > 0$, $|a \cos \theta| = a \cos \theta$. Podemos ver, a partir de esta discusión, que al hacer la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, podemos convertir una integral que implique un radical en una integral que incluya funciones trigonométricas. Después de evaluar la integral, podemos volver a convertir la solución en una expresión que implique

x. Para ver cómo hacer esto, vamos a empezar por suponer que $0 < x < a$. En este caso, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Dado que $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a}$, podemos dibujar el triángulo de referencia en la Figura 3.4 como ayuda para expresar los valores de $\cos\theta$, $\tan\theta$, y las funciones trigonométricas restantes en términos de x. Se puede demostrar que este triángulo produce realmente los valores correctos de las funciones trigonométricas evaluadas en θ para todo θ que satisface $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Es útil observar que la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece en realidad como la longitud de un lado del triángulo. Por último, si θ aparece solo, utilizamos $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$.

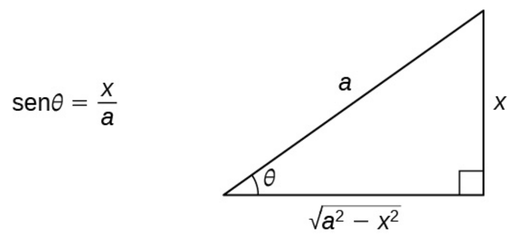


Figura 3.4 Un triángulo de referencia puede ayudar a expresar las funciones trigonométricas evaluadas en θ en términos de x.

Lo esencial de este debate se resume en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Integración de expresiones que implican $\sqrt{a^2 - x^2}$

1. Una buena idea es asegurarse de que la integral no se puede evaluar fácilmente de otra manera. Por ejemplo, si bien este método puede aplicarse a integrales de la forma $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$, y $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, cada una de ellas se puede integrar directamente mediante fórmula o mediante una simple sustitución en *u*.
2. Realice la sustitución $x = a\operatorname{sen}\theta$ y $dx = a\cos\theta d\theta$. *Nota*: Esta sustitución da como resultado $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$.
3. Simplifique la expresión.
4. Evalúe la integral utilizando las técnicas de la sección de integrales trigonométricas.
5. Utilice el triángulo de referencia de la Figura 3.4 para reescribir el resultado en términos de x. Es posible que también tenga que utilizar algunas identidades trigonométricas y la relación $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$.

El siguiente ejemplo demuestra la aplicación de esta estrategia de resolución de problemas.

EJEMPLO 3.21

Integración de una expresión que implica $\sqrt{a^2 - x^2}$

Evalúe $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Solución

Comience por hacer las sustituciones $x = 3\operatorname{sen}\theta$ y $dx = 3\cos\theta d\theta$. Dado que $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$, podemos construir el triángulo de referencia que se muestra en la siguiente figura.

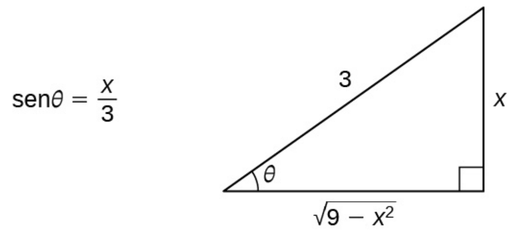


Figura 3.5 Se puede construir un triángulo de referencia para el Ejemplo 3.21.

Por lo tanto,

$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$	$= \int \sqrt{9-(3\operatorname{sen}\theta)^2}\,3\cos\theta d\theta$	Sustituya $x = 3\operatorname{sen}\theta$ y $dx = 3\cos\theta d\theta$.
	$= \int \sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2\theta)}3\cos\theta d\theta$	Simplifique.
	$= \int \sqrt{9\cos^2\theta}3\cos\theta d\theta$	Sustituya $\cos^2\theta = 1-\operatorname{sen}^2\theta$.
	$= \int 3\,\lvert\cos\theta\rvert\,3\cos\theta d\theta$	Tome la raíz cuadrada.
	$= \int 9\cos^2\theta d\theta$	Simplifique. Dado que $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta \ge 0$ y $\lvert\cos\theta\rvert = \cos\theta$.
	$= \int 9\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta$	Utilice la estrategia para integrar una potencia par de $\cos\theta$.
	$= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\operatorname{sen}(2\theta) + C$	Evalúe la integral.
	$= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C$	Sustituya $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.
	$= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C$	Sustituya $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \theta$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$. Utilice el triángulo de referencia para ver que $\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ y haga esta sustitución.
	$= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C.$	Simplifique.

EJEMPLO 3.22

Integración de una expresión que implica $\sqrt{a^2-x^2}$

Evalúe $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$.

Solución

Primero haga las sustituciones $x = 2\operatorname{sen}\theta$ y $dx = 2\cos\theta d\theta$. Dado que $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$, podemos construir el triángulo de referencia que se muestra en la siguiente figura.

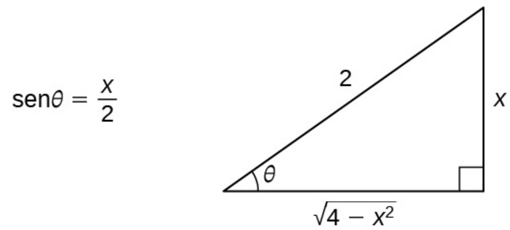


Figura 3.6 Se puede construir un triángulo de referencia para el Ejemplo 3.22.

Por lo tanto,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{4-(2\operatorname{sen}\theta)^2}}{2\operatorname{sen}\theta}2\cos\theta d\theta$$ Sustituya $x = 2\operatorname{sen}\theta$ y $= 2\cos\theta d\theta$.

$$= \int \frac{2\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta$$ Sustituya $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$ y simplifique.

$$= \int \frac{2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{\operatorname{sen}\theta}d\theta$$ Sustituya $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

$$= \int (2\csc\theta - 2\operatorname{sen}\theta)d\theta$$ Separe el numerador, simplifique y utilice $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

$$= 2\ln|\csc\theta - \cot\theta| + 2\cos\theta + C$$ Evalúe la integral.

$$= 2\ln\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C.$$ Utilice el triángulo de referencia para reescribir la expresión en términos de x y simplifique.

En el siguiente ejemplo, vemos que a veces podemos elegir entre varios métodos.

EJEMPLO 3.23

Integración de una expresión que implica $\sqrt{a^2 - x^2}$ Dos maneras

Evalúe $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ de dos maneras: primero utilizando la sustitución $u = 1 - x^2$ y luego utilizando una sustitución trigonométrica.

Solución

Método 1

Supongamos que $u = 1 - x^2$ y por lo tanto $x^2 = 1 - u$. Por lo tanto, $du = -2x\,dx$. En este caso, la integral se convierte en

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{1-x^2}(-2x\,dx)$$ Haga la sustitución.

$$= -\frac{1}{2}\int (1-u)\sqrt{u}\,du$$ Amplíe la expresión.

$$= -\frac{1}{2}\int \left(u^{1/2} - u^{3/2}\right) du$$ Evalúe la integral.

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right) + C$$ Reescriba en términos de x.

$$= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} + \frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{5/2} + C.$$

Método 2

Supongamos que $x = \operatorname{sen}\theta$. En este caso, $dx = \cos\theta d\theta$. Mediante esta sustitución, tenemos

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \int \left(1-\cos^2\theta\right)\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\theta && \text{Supongamos que } u=\cos\theta.\ \text{Por lo tanto, } du=-\operatorname{sen}\theta d\theta. \\
&= \int \left(u^4-u^2\right)du \\
&= \tfrac{1}{5}u^5-\tfrac{1}{3}u^3+C && \text{Sustituya } \cos\theta=u. \\
&= \tfrac{1}{5}\cos^5\theta-\tfrac{1}{3}\cos^3\theta+C && \text{Utilice un triángulo de referencia para ver que } \cos\theta=\sqrt{1-x^2}. \\
&= \tfrac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{5/2}-\tfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+C.
\end{aligned}$$

☑ 3.14 Reescriba la integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{25-x^2}}dx$ utilizando la sustitución trigonométrica adecuada (no evalúe la integral).

Integración de expresiones que implican $\sqrt{a^2+x^2}$

Para las integrales que contienen $\sqrt{a^2+x^2}$, consideremos primero el dominio de esta expresión. Dado que $\sqrt{a^2+x^2}$ se define para todos los valores reales de x, limitamos nuestra elección a aquellas funciones trigonométricas que tienen un rango de todos los números reales. Por lo tanto, nuestra elección se limita a seleccionar $x=a\tan\theta$ o $x=a\cot\theta$. Cualquiera de estas sustituciones podría funcionar, pero la sustitución estándar es $x=a\tan\theta$ o, de forma equivalente, $\tan\theta=x/a$. Con esta sustitución, suponemos que $-(\pi/2)<\theta<\pi/2$, por lo que también tenemos $\theta=\tan^{-1}(x/a)$. El procedimiento para utilizar esta sustitución se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Integración de expresiones que implican $\sqrt{a^2+x^2}$

1. Compruebe si la integral se puede evaluar fácilmente utilizando otro método. En algunos casos, es más conveniente utilizar un método alternativo.
2. Sustituya $x=a\tan\theta$ y $dx=a\sec^2\theta d\theta$. Esta sustitución da como resultado $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=|a\sec\theta|=a\sec\theta$. (Dado que $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ y $\sec\theta>0$ en este intervalo, $|a\sec\theta|=a\sec\theta$.)
3. Simplifique la expresión.
4. Evalúe la integral utilizando las técnicas de la sección de integrales trigonométricas.
5. Utilice el triángulo de referencia de la Figura 3.7 para reescribir el resultado en términos de x. Es posible que también tenga que utilizar algunas identidades trigonométricas y la relación $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$. (*Nota*: El triángulo de referencia se basa en la suposición de que $x>0$; sin embargo, las razones trigonométricas producidas a partir del triángulo de referencia son las mismas que las razones para las que $x\leq 0$,)

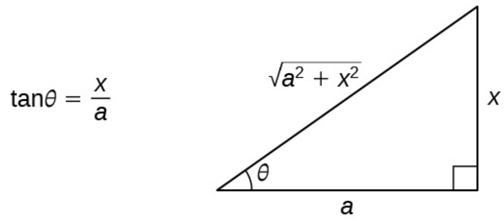


Figura 3.7 Se puede construir un triángulo de referencia para expresar las funciones trigonométricas evaluadas en θ en términos de x.

EJEMPLO 3.24

Integración de una expresión que implica $\sqrt{a^2+x^2}$

Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ y diferencie para comprobar la solución.

Solución

Comience con la sustitución $x = \tan\theta$ y $dx = \sec^2\theta d\theta$. Dado que $\tan\theta = x$, dibuje el triángulo de referencia en la siguiente figura.

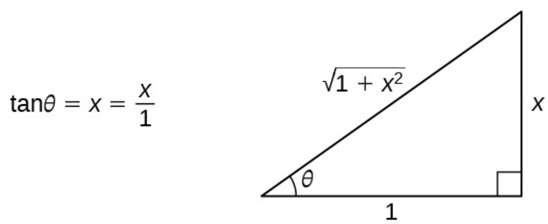


Figura 3.8 El triángulo de referencia para el Ejemplo 3.24.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta} d\theta && \text{Sustituya } x = \tan\theta \text{ y } dx = \sec^2\theta d\theta. \text{ Esta sustitución hace que } \sqrt{1+x^2} = \sec\theta. \text{ Simplifique.} \\
&= \int \sec\theta d\theta && \text{Evalúe la integral.} \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C && \text{Utilice el triángulo de referencia para expresar el resultado en términos de } x. \\
&= \ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right| + C.
\end{aligned}$$

Para comprobar la solución, diferencie:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \cdot \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Dado que $\sqrt{1+x^2} + x > 0$ para todos los valores de x, podríamos reescribir $\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + C = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) + C$, si se desea.

EJEMPLO 3.25

Evaluar $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ Utilizando una sustitución diferente

Utilice la sustitución $x = \operatorname{senoh}\theta$ para evaluar $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Solución

Porque $\operatorname{senoh}\theta$ tiene un rango de todos los números reales y $1 + \operatorname{senoh}^2\theta = \cosh^2\theta$, también podemos utilizar la sustitución $x = \operatorname{senoh}\theta$ para evaluar esta integral. En este caso, $dx = \cosh\theta d\theta$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\cosh\theta}{\sqrt{1+\operatorname{senoh}^2\theta}} d\theta && \text{Sustituya } x = \operatorname{senoh}\theta \text{ y } dx = \cosh\theta d\theta. \\
& && \text{Sustituya } 1 + \operatorname{senoh}^2\theta = \cosh^2\theta. \\
&= \int \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\cosh^2\theta}} d\theta && \sqrt{\cosh^2\theta} = |\cosh\theta| \\
&= \int \frac{\cosh\theta}{|\cosh\theta|} d\theta && |\cosh\theta| = \cosh\theta \text{ dado que } \cosh\theta > 0 \text{ para todo } \theta. \\
&= \int \frac{\cosh\theta}{\cosh\theta} d\theta && \text{Simplifique.} \\
&= \int 1 d\theta && \text{Evalúe la integral.} \\
&= \theta + C && \text{Dado que } x = \operatorname{senoh}\theta, \text{ sabemos que } \theta = \operatorname{senoh}^{-1}x. \\
&= \operatorname{senoh}^{-1}x + C.
\end{aligned}$$

Análisis

Esta respuesta es muy diferente a la obtenida mediante la sustitución $x = \tan\theta$. Para ver que las soluciones son las mismas, establezca $y = \operatorname{senoh}^{-1}x$. Por lo tanto, $\operatorname{senoh} y = x$. De esta ecuación obtenemos:

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x.$$

Después de multiplicar ambos lados por $2e^y$ y reescribiendo, esta ecuación se convierte en:

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Utilice la ecuación cuadrática para resolver e^y:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}.$$

Simplificando, tenemos:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Dado que $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, el caso debe ser que $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Por lo tanto,

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Por último, obtenemos

$$\operatorname{senoh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Después de hacer la observación final de que, como $x + \sqrt{x^2+1} > 0$,

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|,$$

vemos que los dos métodos diferentes producen soluciones equivalentes.

EJEMPLO 3.26

Hallar una longitud de arco

Calcule la longitud de la curva $y = x^2$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

Solución

Debido a que $\frac{dy}{dx} = 2x$, la longitud de arco está dada por

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Para evaluar esta integral, utilice la sustitución $x = \frac{1}{2}\tan\theta$ y $dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta$. También tenemos que cambiar los límites de la integración. Si $x = 0$, entonces $\theta = 0$ y si $x = \frac{1}{2}$, entonces $\theta = \frac{\pi}{4}$. Por lo tanto,

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2\theta}\frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta$$

Después de la sustitución, $\sqrt{1 + 4x^2} = \tan\theta.$ Sustituya $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y simplifique.

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta d\theta$$

Derivamos esta integral en la sección anterior.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}s\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right)\Bigg|_0^{\pi/4}$$

Evalúe y simplifique.

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)).$$

3.15 Reescriba $\int x^3 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$ utilizando una sustitución que implique $\tan\theta$.

Integración de expresiones que implican $\sqrt{x^2 - a^2}$

El dominio de la expresión $\sqrt{x^2 - a^2}$ es $\left(-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right)$. Por lo tanto, o bien $x \le -a$ o $x \ge a$. Por lo tanto, $\frac{x}{a} \le -1$ o $\frac{x}{a} \ge 1$. Dado que estos intervalos corresponden al rango de $\sec\theta$ en el conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, tiene sentido utilizar la sustitución $\sec\theta = \frac{x}{a}$ o, de forma equivalente, $x = a\sec\theta$, donde $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$. La sustitución correspondiente para dx es $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$. El procedimiento para utilizar esta sustitución se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Integrales que implican $\sqrt{x^2 - a^2}$

1. Compruebe si la integral no se puede evaluar utilizando otro método. Si es así, podemos considerar la aplicación de una técnica alternativa.
2. Sustituya $x = a\sec\theta$ y $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$. Esta sustitución da produce

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a\sec\theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta|.$$

   Para $x \ge a$, $|a\tan\theta| = a\tan\theta$ y para $x \le -a$, $|a\tan\theta| = -a\tan\theta$.
3. Simplifique la expresión.
4. Evalúe la integral utilizando las técnicas de la sección de integrales trigonométricas.
5. Utilice los triángulos de referencia de la Figura 3.9 para reescribir el resultado en términos de x. Es posible que también tenga que utilizar algunas identidades trigonométricas y la relación $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$. (*Nota*: Necesitamos ambos triángulos de referencia, ya que los valores de algunas de las razones trigonométricas son diferentes

dependiendo de si $x \geq a$ o $x \leq -a$.)

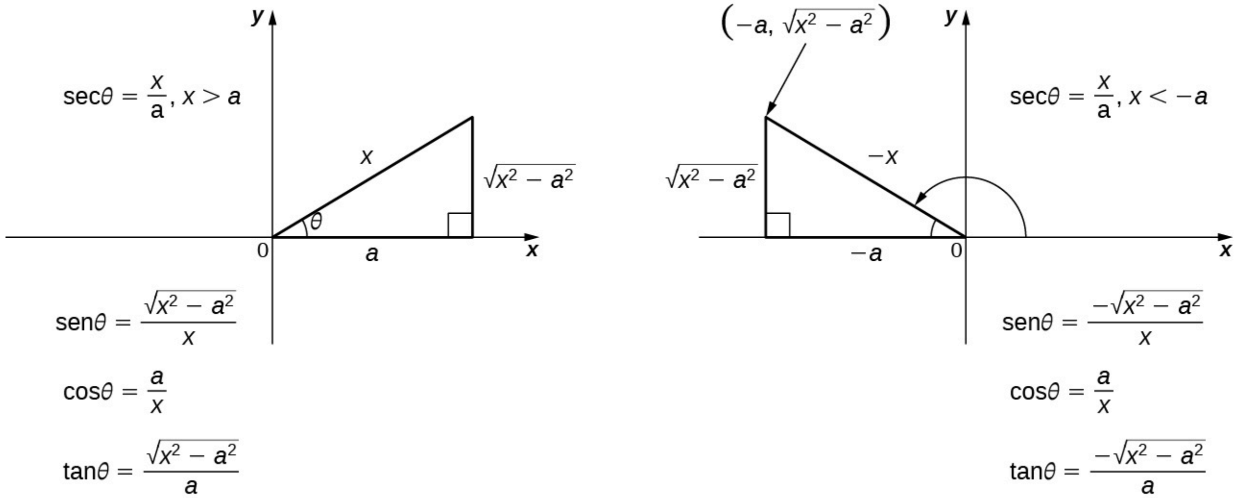


Figura 3.9 Utilice el triángulo de referencia adecuado para expresar las funciones trigonométricas evaluadas en θ en términos de x.

EJEMPLO 3.27

Hallar el área de una región

Halle el área de la región entre el gráfico de $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ y el eje x en el intervalo $[3, 5]$.

Solución

En primer lugar, dibuje un gráfico aproximado de la región descrita en el problema, como se muestra en la siguiente figura.

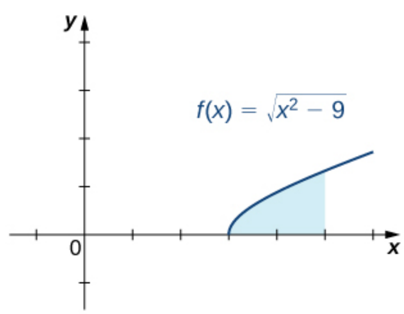


Figura 3.10 El cálculo del área de la región sombreada requiere evaluar una integral con una sustitución trigonométrica.

Podemos ver que el área es $A = \int_3^5 \sqrt{x^2 - 9}\,dx$. Para evaluar esta integral definida, sustituya $x = 3\sec\theta$ y $dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta$. También debemos cambiar los límites de la integración. Si $x = 3$, entonces $3 = 3\sec\theta$ y por lo tanto $\theta = 0$. Si $x = 5$, entonces $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$. Después de hacer estas sustituciones y simplificar, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_3^5 \sqrt{x^2-9}\,dx \\
&= \int_0^{\sec^{-1}(5/3)} 9\tan^2\theta\sec\theta d\theta && \text{Utilice } \tan^2\theta = 1-\sec^2\theta. \\
&= \int_0^{\sec^{-1}(5/3)} 9(\sec^2\theta-1)\sec\theta d\theta && \text{Expanda.} \\
&= \int_0^{\sec^{-1}(5/3)} 9(\sec^3\theta-\sec\theta)d\theta && \text{Evalúe la integral.} \\
&= \left(\tfrac{9}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + \tfrac{9}{2}\text{s}\theta\tan\theta\right) - 9\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big|_0^{\sec^{-1}(5/3)} && \text{Simplifique.} \\
&= \tfrac{9}{2}\text{s}\theta\tan\theta - \tfrac{9}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big|_0^{\sec^{-1}(5/3)} && \text{Evalúe. Utilice } \sec\left(\sec^{-1}\tfrac{5}{3}\right)=\tfrac{5}{3} \text{ y } \tan\left(\sec^{-1}\tfrac{5}{3}\right)=\tfrac{4}{3}. \\
&= \tfrac{9}{2}.\tfrac{5}{3}.\tfrac{4}{3} - \tfrac{9}{2}\ln\left|\tfrac{5}{3}+\tfrac{4}{3}\right| - \left(\tfrac{9}{2}.1.0 - \tfrac{9}{2}\ln|1+0|\right) \\
&= 10 - \tfrac{9}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

3.16 Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. Supongamos que $x > 2$.

SECCIÓN 3.3 EJERCICIOS

Simplifique las siguientes expresiones escribiendo cada una de ellas con una sola función trigonométrica.

126. $4-4\operatorname{sen}^2\theta$

127. $9\sec^2\theta-9$

128. $a^2+a^2\tan^2\theta$

129. $a^2+a^2\operatorname{senoh}^2\theta$

130. $16\cosh^2\theta-16$

Utilice la técnica de completar el cuadrado para expresar cada trinomio como el cuadrado de un binomio o el cuadrado de un binomio más una constante.

131. $4x^2-4x+1$

132. $2x^2-8x+3$

133. $-x^2-2x+4$

Integre utilizando el método de sustitución trigonométrica. Exprese la respuesta final en términos de la variable.

134. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

135. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

136. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

137. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

138. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

139. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

140. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

141. $\int \sqrt{x^2+9}\,dx$

142. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$

143. $\int \frac{\theta^3 \, d\theta}{\sqrt{9-\theta^2}}$

144. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 - x^2}}$

145. $\int \sqrt{x^6 - x^8}\, dx$

146. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$

147. $\int \frac{dx}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}$

148. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}\, dx}{x}$

149. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-1}}$

150. $\int \frac{x^2\, dx}{x^2+4}$

151. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

152. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$

153. $\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{3/2} dx$

En los siguientes ejercicios, utilice las sustituciones $x = \operatorname{senoh}\theta, \cosh\theta$, o $\tanh\theta$. Exprese las respuestas finales en términos de la variable x.

154. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

155. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

156. $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

157. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx$

158. $\int \frac{dx}{1-x^2}$

159. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$

Utilice la técnica de completar el cuadrado para evaluar las siguientes integrales.

160. $\int \frac{1}{x^2-6x} dx$

161. $\int \frac{1}{x^2+2x+1} dx$

162. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+8}} dx$

163. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+10x}} dx$

164. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}} dx$

165. Evalúe la integral sin usar cálculo: $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx$.

166. Halle el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

167. Evalúe la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ utilizando dos sustituciones diferentes. En primer lugar, supongamos que $x = \cos\theta$ y evalúe utilizando la sustitución trigonométrica. En segundo lugar, supongamos que $x = \operatorname{sen}\theta$ y utilice la sustitución trigonométrica. ¿Las respuestas son las mismas?

168. Evalúe la integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ utilizando la sustitución $x = \sec\theta$. A continuación, evalúe la misma integral utilizando la sustitución $x = \csc\theta$. Demuestre que los resultados son equivalentes.

169. Evalúe la integral $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ utilizando la forma $\int \frac{1}{u} du$. A continuación, evalúe la misma integral utilizando $x = \tan\theta$. ¿Los resultados son los mismos?

170. Indique el método de integración que utilizaría para evaluar la integral $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$. ¿Por qué ha elegido este método?

171. Indique el método de integración que utilizaría para evaluar la integral $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$. ¿Por qué ha elegido este método?

172. Evalúe $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+1}$

173. Halle la longitud de arco de la curva en el intervalo especificado: $y = \ln x, [1, 5]$. Redondee la respuesta a tres decimales.

174. Halle el área superficial del sólido que se genera al girar la región delimitada por los gráficos de $y = x^2, y = 0, x = 0, \text{y } x = \sqrt{2}$ alrededor del eje *x*. (Redondee la respuesta a tres decimales).

175. La región delimitada por el gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y el eje *x* entre $x = 0$ y $x = 1$ se gira alrededor del eje *x*. Calcule el volumen del sólido que se genera.

Resuelva el problema de valor inicial de y en función de x.

176. $\left(x^2+36\right)\frac{dy}{dx} = 1, y(6) = 0$

177. $\left(64-x^2\right)\frac{dy}{dx} = 1, y(0) = 3$

178. Halle el área delimitada por $y = \frac{2}{\sqrt{64-4x^2}}, x = 0, y = 0, \text{y } x = 2.$

179. Un tanque de almacenamiento de petróleo puede describirse como el volumen generado cuando se gira el área delimitada por $y = \frac{16}{\sqrt{64+x^2}}, x = 0, y = 0, x = 2$ alrededor del eje *x*. Calcule el volumen del tanque (en metros cúbicos).

180. Durante cada ciclo, la velocidad *v* (en pies por segundo) de un dispositivo robotizado de soldadura está dada por $v = 2t - \frac{14}{4+t^2}$, donde *t* es el tiempo en segundos. Determine la expresión del desplazamiento *s* (en pies) en función de *t* si $s = 0$ cuando $t = 0$.

181. Halle la longitud de la curva $y = \sqrt{16-x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

3.4 Fracciones parciales

Objetivos de aprendizaje

3.4.1 Integrar una función racional utilizando el método de las fracciones parciales.
3.4.2 Reconocer factores lineales simples en una función racional.
3.4.3 Reconocer los factores lineales repetidos en una función racional.
3.4.4 Reconocer los factores cuadráticos de una función racional.

Hemos visto algunas técnicas que nos permiten integrar funciones racionales específicas. Por ejemplo, sabemos que

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \text{ y } \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

Sin embargo, aún no disponemos de una técnica que nos permita abordar cocientes arbitrarios de este tipo. Por lo tanto, no es inmediatamente obvio cómo evaluar $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}dx$. Sin embargo, sabemos por el material desarrollado anteriormente que

$$\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right) dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C.$$

De hecho, al obtener un denominador común, vemos que

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3x}{x^2 - x - 2}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right) dx.$$

En esta sección, examinamos el método de **descomposición en fracciones parciales**, que nos permite descomponer funciones racionales en sumas de funciones racionales más simples y fáciles de integrar. Utilizando este método, podemos reescribir una expresión como: $\frac{3x}{x^2-x-2}$ en la forma $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$.

La clave del método de descomposición en fracciones parciales es poder anticipar la forma que adoptará la descomposición de una función racional. Como veremos, esta forma es predecible y muy dependiente de la factorización del denominador de la función racional. También es muy importante tener en cuenta que la descomposición en fracciones parciales se puede aplicar a una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ solo si $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$. En el caso de que $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$, debemos realizar primero la división larga para reescribir el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en la forma $A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, donde $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$. A continuación, hacemos una descomposición en fracciones parciales de $\frac{R(x)}{Q(x)}$. El siguiente ejemplo, aunque no requiere la descomposición en fracciones parciales, ilustra nuestra aproximación a las integrales de funciones racionales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$.

EJEMPLO 3.28

Integración de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$

Evalúe $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x+1}dx$.

Solución

Dado que $\deg\left(x^2 + 3x + 5\right) \geq \deg(x+1)$, realizamos la división larga para obtener

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} = x + 2 + \frac{3}{x+1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x+1}dx &= \int \left(x + 2 + \frac{3}{x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

MEDIOS

Visite este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_polylongdiv) para repasar la división larga de polinomios.

3.17 Evalúe $\int \frac{x-3}{x+2}dx$.

Para integrar $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$, hay que empezar por factorizar $Q(x)$.

Factores lineales no repetidos

Si $Q(x)$ se puede factorizar como $(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \ldots (a_n x + b_n)$, donde cada factor lineal es distinto, entonces es posible hallar las constantes $A_1, A_2, \ldots A_n$ que satisfacen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_n x + b_n}.$$

La prueba de que tales constantes existen está fuera del alcance de este curso.

En el siguiente ejemplo, vemos cómo utilizar fracciones parciales para integrar una función racional de este tipo.

EJEMPLO 3.29

Fracciones parciales con factores lineales no repetidos

Evalúe $\int \frac{3x+2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$.

Solución

Dado que $\deg(3x+2) < \deg\left(x^3 - x^2 - 2x\right)$, comenzamos por factorizar el denominador de $\frac{3x+2}{x^3-x^2-2x}$. Podemos ver que $x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$. Por lo tanto, hay constantes A, B, y C que satisfacen

$$\frac{3x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Ahora debemos hallar estas constantes. Para ello, empezamos por obtener un denominador común a la derecha. Por lo tanto,

$$\frac{3x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Ahora, fijamos los numeradores iguales entre sí, obteniendo

$$3x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2). \qquad (3.8)$$

Hay dos estrategias diferentes para hallar los coeficientes A, B, y C. Nos referimos a ellos como el *método de igualar coeficientes* y el *método de sustitución estratégica*.

Regla: método de igualar coeficientes

Reescriba la Ecuación 3.8 en la forma

$$3x + 2 = (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x + (-2A).$$

Al igualar los coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + B - 2C &= 3 \\ -2A &= 2. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema, primero observamos que $-2A = 2 \Rightarrow A = -1$. Sustituyendo este valor en las dos primeras ecuaciones obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} B + C &= 1 \\ B - 2C &= 2. \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -1 y sumando la ecuación resultante a la primera se obtiene

$$-3C = 1,$$

lo que a su vez implica que $C = -\frac{1}{3}$. Sustituyendo este valor en la ecuación $B + C = 1$ se obtiene $B = \frac{4}{3}$. Así, al

resolver estas ecuaciones se obtiene $A=-1,\ B=\frac{4}{3}$, y $C=-\frac{1}{3}$.

Es importante señalar que el sistema producido por este método es consistente si y solo si hemos establecido la descomposición correctamente. Si el sistema es inconsistente, hay un error en nuestra descomposición.

Regla: método de sustitución estratégica

El método de sustitución estratégica se basa en el supuesto de que hemos establecido la descomposición correctamente. Si la descomposición se establece correctamente, debe haber valores de $A,\ B$, y C que satisfacen la Ecuación 3.8 para *todos* los valores de x. Es decir, esta ecuación debe ser cierta para cualquier valor de x que nos interesa sustituir en ella. Por lo tanto, al elegir los valores de x con cuidado y sustituyéndolos en la ecuación, podemos hallar $A,\ B$, y C fácilmente. Por ejemplo, si sustituimos $x=0$, la ecuación se reduce a $2=A(-2)(1)$. Si resolvemos para A se obtiene $A=-1$. A continuación, sustituyendo $x=2$, la ecuación se reduce a $8=B(2)(3)$, o su equivalente $B=4/3$. Por último, sustituimos $x=-1$ en la ecuación y obtenemos $-1=C(-1)(-3)$. Resolviendo, tenemos $C=-\frac{1}{3}$.

Es importante tener en cuenta que si intentamos utilizar este método con una descomposición que no se ha establecido correctamente, todavía podemos hallar valores para las constantes, pero estas constantes no tienen sentido. Si optamos por utilizar el método de la sustitución estratégica, conviene comprobar el resultado recombinando los términos algebraicamente.

Ahora que tenemos los valores de $A,\ B$, y C, reescribimos la integral original:

$$\int \frac{3x+2}{x^3-x^2-2x}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)}\right)dx.$$

Evaluando la integral obtenemos

$$\int \frac{3x+2}{x^3-x^2-2x}dx=-\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

En el siguiente ejemplo, integramos una función racional en la que el grado del numerador no es menor que el grado del denominador.

EJEMPLO 3.30

Dividir antes de aplicar las fracciones parciales

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}dx$.

Solución

Dado que $\text{grado}(x^2+3x+1)\ge\text{grado}(x^2-4)$, debemos realizar la división larga de polinomios. Esto da como resultado

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2-4}=1+\frac{3x+5}{x^2-4}.$$

A continuación, realizamos una descomposición en fracciones parciales de $\frac{3x+5}{x^2-4}=\frac{3x+5}{(x+2)(x-2)}$. Tenemos

$$\frac{3x+5}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}.$$

Por lo tanto,

$$3x+5=A(x+2)+B(x-2).$$

Al resolver para A y B utilizando cualquiera de los dos métodos, obtenemos $A=11/4$ y $B=1/4$.

Reescribiendo la integral original, tenemos

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}dx = \int \left(1+\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx.$$

La evaluación de la integral produce

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}dx = x+\frac{11}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+C.$$

Como vemos en el siguiente ejemplo, puede ser posible aplicar la técnica de descomposición en fracciones parciales a una función no racional. El truco consiste en convertir la función no racional en una función racional mediante una sustitución.

EJEMPLO 3.31

Aplicar fracciones parciales tras una sustitución

Evalúe $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x}dx.$

Solución

Empecemos por suponer que $u=\operatorname{sen} x$. En consecuencia, $du=\cos x\,dx$. Después de hacer estas sustituciones, tenemos

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x}dx=\int \frac{du}{u^2-u}=\int \frac{du}{u(u-1)}.$$

Aplicando la descomposición en fracciones parciales a $1/u(u-1)$ da como resultado $\frac{1}{u(u-1)}=-\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x}dx &= -\ln|u|+\ln|u-1|+C\\ &= -\ln|\operatorname{sen} x|+\ln|\operatorname{sen} x-1|+C.\end{aligned}$$

3.18 Evalúe $\int \frac{x+1}{(x+3)(x-2)}dx.$

Factores lineales repetidos

Para algunas aplicaciones, necesitamos integrar expresiones racionales que tienen denominadores con factores lineales repetidos, es decir, funciones racionales con al menos un factor de la forma $(ax+b)^n$, donde n es un número entero positivo mayor o igual a 2. Si el denominador contiene el factor lineal repetido $(ax+b)^n$, entonces la descomposición debe contener

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

Como vemos en nuestro siguiente ejemplo, la técnica básica utilizada para resolver los coeficientes es la misma, pero requiere más álgebra para determinar los numeradores de las fracciones parciales.

EJEMPLO 3.32

Fracciones parciales con factores lineales repetidos

Evalúe $\int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}dx.$

Solución

Tenemos $\text{grado}\,(x-2)<\text{grado}\left((2x-1)^2\,(x-1)\right)$, por lo que podemos proceder a la descomposición. Dado que

$(2x-1)^2$ es un factor lineal repetido, incluya $\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}$ en la descomposición. Por lo tanto,

$$\frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Tras obtener un denominador común e igualar los numeradores, tenemos

$$x-2=A(2x-1)(x-1)+B(x-1)+C(2x-1)^2. \quad (3.9)$$

A continuación, utilizamos el método de igualar coeficientes para hallar los valores de A, B, y C.

$$x-2=(2A+4C)x^2+(-3A+B-4C)x+(A-B+C).$$

Igualando los coeficientes se obtiene $2A+4C=0$, $-3A+B-4C=1$, y $A-B+C=-2$. Resolviendo este sistema se obtiene $A=2$, $B=3$, y $C=-1$.

Como alternativa, podemos utilizar el método de la sustitución estratégica. En este caso, sustituyendo $x=1$ y $x=1/2$ en la Ecuación 3.9 produce fácilmente los valores $B=3$ y $C=-1$. A estas alturas, puede parecer que nos hemos quedado sin buenas opciones para x, sin embargo, como ya tenemos valores para B y C, podemos sustituir estos valores y elegir cualquier valor para x no utilizado anteriormente. El valor $x=0$ es una buena opción. En este caso, obtenemos la ecuación $-2=A(-1)(-1)+3(-1)+(-1)(-1)^2$ o, de forma equivalente, $A=2$.

Ahora que tenemos los valores de A, B, y C, reescribimos la integral original y la evaluamos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}dx &= \int\left(\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{(2x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &= \ln|2x-1|-\frac{3}{2(2x-1)}-\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

3.19 Establezca la descomposición en fracciones parciales para $\int \frac{x+2}{(x+3)^3(x-4)^2}dx$. (No halle los coeficientes ni complete la integración).

El método general

Ahora que empezamos a hacernos una idea de cómo funciona la técnica de descomposición en fracciones parciales, vamos a esbozar el método básico en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Descomposición en fracciones parciales
Para descomponer la función racional $P(x)/Q(x)$, utilice los siguientes pasos:

1. Asegúrese de que $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$. Si no es así, realice la división larga de polinomios.
2. Factorice $Q(x)$ en el producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles. Un cuadrático irreducible es un cuadrático que no tiene ceros reales.
3. Suponiendo que $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$, los factores de $Q(x)$ determinan la forma de la descomposición de $P(x)/Q(x)$.
   a. Si $Q(x)$ se puede factorizar como $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_nx+b_n)$, donde cada factor lineal es distinto, entonces es posible hallar las constantes $A_1, A_2, \ldots A_n$ que satisfacen
   $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}.$$
   b. Si $Q(x)$ contiene el factor lineal repetido $(ax+b)^n$, entonces la descomposición debe contener
   $$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$
   c. Para cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que $Q(x)$ contiene, la descomposición debe incluir
   $$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

d. Para cada factor cuadrático irreducible repetido $\left(ax^2+bx+c\right)^n$, la descomposición debe incluir

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

e. Una vez que determine la descomposición adecuada, halle las constantes.

f. Por último, reescriba la integral en su forma descompuesta y evalúela utilizando las técnicas desarrolladas anteriormente o las fórmulas de integración.

Factores cuadráticos simples

Ahora vamos a ver la integración de una expresión racional en la que el denominador contiene un factor cuadrático irreducible. Recordemos que el factor cuadrático ax^2+bx+c es irreducible si $ax^2+bx+c=0$ no tiene ceros reales, es decir, si $b^2-4ac<0$.

EJEMPLO 3.33

Expresiones racionales con un factor cuadrático irreducible

Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3+x}dx$.

Solución

Dado que $\deg(2x-3)<\deg(x^3+x)$, factorice el denominador y proceda a la descomposición en fracciones parciales. Dado que $x^3+x=x(x^2+1)$ contiene el factor cuadrático irreducible x^2+1, incluya $\frac{Ax+B}{x^2+1}$ como parte de la descomposición, junto con $\frac{C}{x}$ para el término lineal x. Así, la descomposición tiene la forma

$$\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}.$$

Tras obtener un denominador común e igualar los numeradores, obtenemos la ecuación

$$2x-3=(Ax+B)\,x+C\left(x^2+1\right).$$

Al resolver para A, B, y C, obtenemos $A=3$, $B=2$, y $C=-3$.

Por lo tanto,

$$\frac{2x-3}{x^3+x}=\frac{3x+2}{x^2+1}-\frac{3}{x}.$$

Sustituyendo de nuevo en la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{x^3+x}dx &= \int\left(\frac{3x+2}{x^2+1}-\frac{3}{x}\right)dx \\ &= 3\int\frac{x}{x^2+1}dx+2\int\frac{1}{x^2+1}dx-3\int\frac{1}{x}dx && \text{Separe la integral.} \\ &= \tfrac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right|+2\tan^{-1}x-3\ln|x|+C. && \text{Evalúe cada integral.}\end{aligned}$$

Nota: Podemos reescribir $\ln\left|x^2+1\right|=\ln(x^2+1)$, si lo deseamos, ya que $x^2+1>0$.

EJEMPLO 3.34

Fracciones parciales con un factor cuadrático irreducible

Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-8}$.

Solución

Podemos empezar por factorizar $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Vemos que el factor cuadrático x^2+2x+4 es irreducible ya que $2^2-4\,(1)\,(4)=-12<0$. Utilizando la descomposición descrita en la estrategia de resolución de

problemas, obtenemos

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Tras obtener un denominador común e igualar los numeradores, esto se convierte en

$$1 = A\left(x^2+2x+4\right) + (Bx+C)(x-2).$$

Aplicando cualquiera de los dos métodos, obtenemos $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{12}$, y $C = -\frac{1}{3}$.

Reescribiendo $\int \frac{dx}{x^3-8}$, tenemos

$$\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{12}\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx.$$

Podemos ver que

$\int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-2| + C$, pero $\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx$ requiere un poco más de esfuerzo. Empecemos por completar el cuadrado en x^2+2x+4 para obtener

$$x^2+2x+4 = (x+1)^2+3.$$

Suponiendo que $u = x+1$ y en consecuencia $du = dx$, vemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx &= \int \frac{x+4}{(x+1)^2+3}dx && \text{Complete el cuadrado en el denominador.}\\
&= \int \frac{u+3}{u^2+3}du && \text{Sustituya } u = x+1, x = u-1, \text{ y } du = dx.\\
&= \int \frac{u}{u^2+3}du + \int \frac{3}{u^2+3}du && \text{Separe el numerador.}\\
&= \tfrac{1}{2}\ln\left|u^2+3\right| + \tfrac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\tfrac{u}{\sqrt{3}} + C && \text{Evalúe cada integral.}\\
&= \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right| + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\tfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. && \text{Reescriba en términos de } x \text{ y simplifique.}
\end{aligned}$$

Sustituyendo de nuevo en la integral original y simplificando da como resultado

$$\int \frac{dx}{x^3-8} = \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln\left|x^2+2x+4\right| - \frac{\sqrt{3}}{12}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

También en este caso podemos dejar de lado el valor absoluto si lo deseamos, ya que $x^2+2x+4 > 0$ para todo x.

EJEMPLO 3.35

Cálculo de un volumen

Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región encerrada por el gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ y el eje *x* en el intervalo $[0, 1]$ alrededor del eje *y*.

Solución

Empecemos por dibujar la región que se va a girar (vea la Figura 3.11). A partir del dibujo, vemos que el método de capas cilíndricas es una buena opción para resolver este problema.

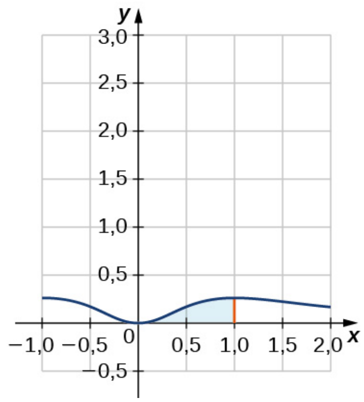


Figura 3.11 Podemos utilizar el método de capas cilíndricas para calcular el volumen de revolución obtenido al girar la región mostrada alrededor del eje *y*.

El volumen está dado por

$$V = 2\pi \int_0^1 x.\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Dado que $\deg\left(\left(x^2+1\right)^2\right) = 4 > 3 = \deg(x^3)$, podemos proceder a la descomposición en fracciones parciales. Tenga en cuenta que $(x^2+1)^2$ es un factor cuadrático irreducible repetido. Utilizando la descomposición descrita en la estrategia de resolución de problemas, obtenemos

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Hallando un denominador común e igualando los numeradores se obtiene

$$x^3 = (Ax+B)\left(x^2+1\right) + Cx + D.$$

Resolviendo, obtenemos $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, y $D = 0$. Sustituyendo de nuevo en la integral, tenemos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx \\ &= 2\pi \left(\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{x^2+1}\right)\Big|_0^1 \\ &= \pi\left(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

3.20 Establezca la descomposición en fracciones parciales para $\int \frac{x^2+3x+1}{(x+2)(x-3)^2(x^2+4)^2}dx.$

SECCIÓN 3.4 EJERCICIOS

Exprese la función racional como una suma o diferencia de dos expresiones racionales más sencillas.

182. $\frac{1}{(x-3)(x-2)}$ grandes.

183. $\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)}$ grandes.

184. $\frac{1}{x^3-x}$

185. $\frac{3x+1}{x^2}$

186. $\frac{3x^2}{x^2+1}$ (*Pista:* Utilice primero la división larga)

187. $\frac{2x^4}{x^2-2x}$

188. $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ grandes.

189. $\frac{1}{x^2(x-1)}$ grandes.

190. $\frac{x}{x^2-4}$

191. $\frac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$ grandes.

192. $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)\left(x^2+1\right)}$ grandes.

193. $\frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}$ grandes.

194. $\frac{2x}{(x+2)^2}$

195. $\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)\left(x^2+4\right)^2}$

Utilice el método de las fracciones parciales para evaluar cada una de las siguientes integrales.

196. $\int \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$ grandes.

197. $\int \frac{3x}{x^2+2x-8}dx$

198. $\int \frac{dx}{x^3-x}$

199. $\int \frac{x}{x^2-4}dx$

200. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$ grandes.

201. $\int \frac{2x^2+4x+22}{x^2+2x+10}dx$

202. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

203. $\int \frac{2-x}{x^2+x}dx$

204. $\int \frac{2}{x^2-x-6}dx$

205. $\int \frac{dx}{x^3-2x^2-4x+8}$

206. $\int \frac{dx}{x^4-10x^2+9}$

Evalúe las siguientes integrales que tienen factores cuadráticos irreducibles.

207. $\int \frac{2}{(x-4)\left(x^2+2x+6\right)}dx$

208. $\int \frac{x^2}{x^3-x^2+4x-4}dx$

209. $\int \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx$

210. $\int \frac{x}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$

Utilice el método de las fracciones parciales para evaluar las siguientes integrales.

211. $\int \frac{3x+4}{\left(x^2+4\right)(3-x)}dx$

212. $\int \frac{2}{(x+2)^2(2-x)}dx$

213. $\int \frac{3x+4}{x^3-2x-4}dx$ (*Pista:* Utilice el teorema de la raíz racional).

Utilice la sustitución para convertir las integrales en integrales de funciones racionales. A continuación, utilice las fracciones parciales para evaluar las integrales.

214. $\int_0^1 \frac{e^x}{36 - e^{2x}} dx$ (Indique la respuesta exacta y el equivalente decimal. Redondee a cinco decimales).

215. $\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x} - e^x} dx$

216. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 - \cos^2 x}$

217. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \cos x - 6} dx$

218. $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

219. $\int \frac{dt}{\left(e^t - e^{-t}\right)^2}$

220. $\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx$

221. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}$

222. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

223. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)} dx$

224. $\int \frac{e^x}{\left(e^{2x} - 4\right)^2} dx$

225. $\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx$

226. $\int \frac{1}{2 + e^{-x}} dx$

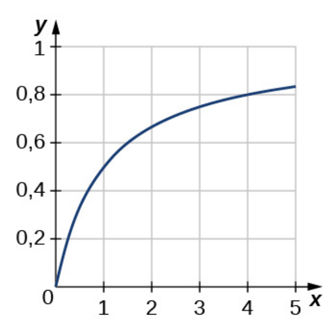
227. $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

Utilice la sustitución dada para convertir la integral en una integral de una función racional, y luego evalúela.

228. $\int \frac{1}{t - \sqrt[3]{t}} dt\, t = x^3$

229. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx; x = u^6$

230. Grafique la curva $y = \frac{x}{1+x}$ en el intervalo $[0, 5]$. A continuación, halle el área de la región limitada por la curva, el eje x y la línea $x = 4$.



231. Calcule el volumen del sólido generado cuando la región delimitada por $y = 1/\sqrt{x(3 - x)}$, $y = 0$, $x = 1$, y $x = 2$ se gira alrededor del eje *x*.

232. La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una línea es una función del tiempo dada por $v(t) = \frac{88t^2}{t^2+1}$. Calcule la distancia que ha recorrido la partícula después de $t = 5$ seg.

Resuelva el problema de valor inicial para x en función de t.

233. $\left(t^2 - 7t + 12\right)\frac{dx}{dt} = 1, (t > 4, x(5) = 0)$ grandes.

234. $(t + 5)\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, t > -5, x(1) = \tan 1$

235. $\left(2t^3 - 2t^2 + t - 1\right)\frac{dx}{dt} = 3, x(2) = 0$

236. Halle la coordenada *x* del centroide del área delimitada por $y\left(x^2 - 9\right) = 1,$ $y = 0, x = 4,$ y $x = 5.$ (Redondee la respuesta a dos decimales).

237. Calcule el volumen generado al girar el área delimitada por $y = \frac{1}{x^3+7x^2+6x}, x = 1, x = 7,$ y $y = 0$ alrededor del eje *y*.

238. Halle el área delimitada por $y = \frac{x-12}{x^2-8x-20},$ $y = 0, x = 2,$ y $x = 4.$ (Redondee la respuesta a la centésima más cercana).

239. Evalúe la integral $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$

Para los siguientes problemas, utilice las sustituciones $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, *y* $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

240. $\int \frac{dx}{3 - 5\operatorname{sen} x}$

241. Halle el área bajo la curva $y = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$ entre $x = 0$ y $x = \pi$. (Asuma que las dimensiones están en pulgadas).

242. Dada $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$, derive las fórmulas $dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$ $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$

243. Evalúe $\int \frac{\sqrt[3]{x - 8}}{x}dx.$

3.5 Otras estrategias de integración

Objetivos de aprendizaje

3.5.1 Utilizar una tabla de integrales para resolver problemas de integración.
3.5.2 Utilizar un sistema de álgebra computacional (CAS) para resolver problemas de integración.

Además de las técnicas de integración que ya hemos visto, hay otras herramientas ampliamente disponibles para ayudar en el proceso de integración. Entre estas herramientas se encuentran las **tablas de integración**, que están disponibles en muchos libros, incluidos los apéndices de este. También están disponibles los **sistemas de álgebra computacional (CAS)**, que se encuentran en las calculadoras y en muchos laboratorios informáticos de los campus y son gratuitos en línea.

Tablas de integrales

Las tablas de integración, si se utilizan de forma correcta, pueden ser una forma práctica de evaluar o comprobar una integral rápidamente. Tenga en cuenta que al utilizar una tabla para comprobar una respuesta, es posible que dos soluciones completamente correctas parezcan muy diferentes. Por ejemplo, en la Sustitución trigonométrica, encontramos que, utilizando la sustitución $x = \tan\theta$, podemos llegar a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C.$$

Sin embargo, utilizando $x = \operatorname{senoh}\theta$, obtuvimos una solución diferente, concretamente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{senoh}^{-1} x + C.$$

Posteriormente demostramos algebraicamente que las dos soluciones son equivalentes. Es decir, demostramos que $\text{senoh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. En este caso, las dos antiderivadas que encontramos son realmente iguales. Esto no tiene por qué ser así. Sin embargo, mientras la diferencia de las dos antiderivadas sea una constante, son equivalentes.

EJEMPLO 3.36

Uso de una fórmula de una tabla para evaluar una integral

Utilice la fórmula de la tabla

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

para evaluar $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} dx.$

Solución

Si observamos las tablas de integración, veremos que varias fórmulas contienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$. Esta expresión es en realidad similar a $\sqrt{16-e^{2x}}$, donde $a = 4$ y $u = e^x$. Tenga en cuenta que también debemos tener $du = e^x$ dx. Multiplicando el numerador y el denominador de la integral dada por e^x debería ayudar a poner esta integral en una forma útil. Por lo tanto, ahora tenemos

$$\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} dx = \int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^{2x}} e^x\, dx.$$

Sustituyendo $u = e^x$ y $du = e^x$ dx produce $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du$. A partir de la tabla de integración (N.º 88 del Apéndice A),

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} dx &= \int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^{2x}} e^x\, dx && \text{Sustituya } u = e^x \text{ y } du = e^x\, dx. \\
&= \int \frac{\sqrt{4^2-u^2}}{u^2} du && \text{Aplique la fórmula utilizando } a = 4. \\
&= -\frac{\sqrt{4^2-u^2}}{u} - \text{sen}^{-1}\frac{u}{4} + C && \text{Sustituya } u = e^x. \\
&= -\frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{u} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{e^x}{4}\right) + C.
\end{aligned}$$

Sistemas de álgebra computacional

Si está disponible, un CAS es una alternativa más rápida que una tabla para resolver un problema de integración. Muchos de estos sistemas están ampliamente disponibles y son, en general, bastante fáciles de usar.

EJEMPLO 3.37

Uso de un sistema de álgebra computacional para evaluar una integral

Utilice un sistema de álgebra computacional para evaluar $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. Compare este resultado con $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$, un resultado que podríamos haber obtenido si hubiéramos utilizado la sustitución trigonométrica.

Solución

Si utilizamos Wolfram Alpha, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|\sqrt{x^2-4}+x\right| + C.$$

Observe que

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{2}\right| + C = \ln\left|\sqrt{x^2-4}+x\right| - \ln 2 + C.$$

Como estas dos antiderivadas solo difieren en una constante, las soluciones son equivalentes. También podríamos haber demostrado que cada una de estas antiderivadas es correcta diferenciándolas.

MEDIOS

Puede acceder a una calculadora de integrales (http://www.openstax.org/l/20_intcalc) para ver más ejemplos.

EJEMPLO 3.38

Uso de un CAS para evaluar una integral

Evalúe $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$ utilizando un CAS. Compare el resultado con $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$, el resultado que podríamos haber obtenido mediante la técnica de integración de potencias impares de $\operatorname{sen} x$ que ya se ha comentado en este capítulo.

Solución

Si utilizamos Wolfram Alpha, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{12}(\cos(3x) - 9\cos x) + C.$$

Esto parece bastante diferente de $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$. Para ver que estas antiderivadas son equivalentes, podemos hacer uso de algunas identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12}(\cos(3x) - 9\cos x) &= \frac{1}{12}(\cos(x+2x) - 9\cos x) \\
&= \frac{1}{12}(\cos(x)\cos(2x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x) - 9\cos x) \\
&= \frac{1}{12}(\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - \operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen} x\cos x) - 9\cos x) \\
&= \frac{1}{12}(2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\left(1-\cos^2 x\right) - 9\cos x) \\
&= \frac{1}{12}(4\cos^3 x - 12\cos x) \\
&= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las dos antiderivadas son idénticas.

También podemos utilizar un CAS para comparar los gráficos de las dos funciones, como se muestra en la siguiente figura.

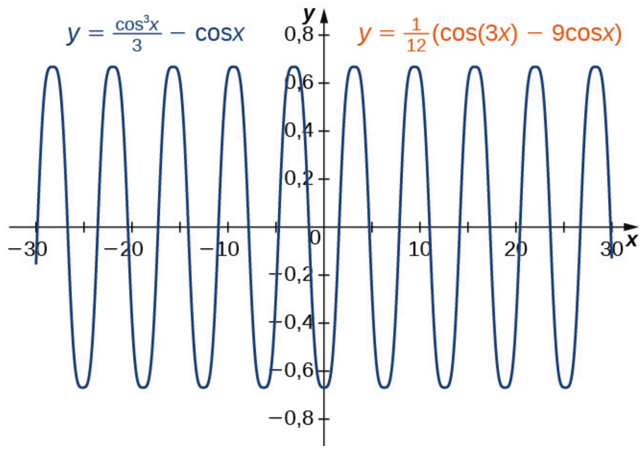


Figura 3.12 Los gráficos de $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ como $y = \frac{1}{12}(\cos(3x) - 9\cos x)$ son idénticos.

3.21 Utilice un CAS para evaluar $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

SECCIÓN 3.5 EJERCICIOS

Utilice una tabla de integrales para evaluar las siguientes integrales.

244. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$

245. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx$

246. $\int x^3 \sqrt{1+2x^2}\, dx$

247. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x}} dx$

248. $\int \frac{x}{x+1} dx$

249. $\int x.2^{x^2} dx$

250. $\int \frac{1}{4x^2+25} dx$

251. $\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}}$

252. $\int \operatorname{sen}^3(2x)\cos(2x)dx$

253. $\int \csc(2w)\cot(2w)dw$

254. $\int 2^y dy$

255. $\int_0^1 \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^2+8}}$

256. $\int_{-1/4}^{1/4} \sec^2(\pi x)\tan(\pi x)\, dx$

257. $\int_0^{\pi/2} \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

258. $\int \cos^3 x\, dx$

259. $\int \tan^5(3x)\, dx$

260. $\int \operatorname{sen}^2 y \cos^3 y dy$

Utilice un CAS para evaluar las siguientes integrales. También se pueden utilizar tablas para verificar las respuestas.

261. **[T]** $\int \frac{dw}{1+\sec\left(\frac{w}{2}\right)}$

grandes.

262. **[T]** $\int \frac{dw}{1-\cos(7w)}$

263. **[T]** $\int_0^t \frac{dt}{4\cos t + 3\operatorname{sen} t}$

264. **[T]** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x}dx$

265. **[T]** $\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}$

266. **[T]** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

267. **[T]** $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$

268. **[T]** $\int x\sqrt{x^4-9}\, dx$

269. **[T]** $\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx$

270. **[T]** $\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}dx$

271. **[T]** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

272. **[T]** $\int e^x \cos^{-1}(e^x)dx$

Utilice una calculadora o un CAS para evaluar las siguientes integrales.

273. **[T]** $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)dx$

274. **[T]** $\int_0^1 x.e^{-x^2}\, dx$

275. **[T]** $\int_0^8 \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}dx$

276. **[T]** $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2}dx$

277. **[T]** $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$

278. **[T]** $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$

Utilice las tablas para evaluar las integrales. Es posible que tenga que completar el cuadrado o cambiar las variables para poner la integral en la forma dada en la tabla.

279. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$

280. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$

281. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-4}}dx$

282. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x}dx$

283. $\int \frac{\arctan\left(x^3\right)}{x^4}dx$

284. $\int \frac{\ln|x| \operatorname{arcsen}(\ln|x|)}{x}dx$

Utilice las tablas para realizar la integración.

285. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$

286. $\int \frac{3x}{2x+7}dx$

287. $\int \frac{dx}{1-\cos(4x)}$ grandes.

288. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$

289. Halle el área delimitada por $y\left(4+25x^2\right)=5, x=0, y=0,$ y $x=4.$ Utilice una tabla de integrales o un CAS.

290. La región delimitada entre la curva $y=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}, 0{,}3 \le x \le 1{,}1,$ y el eje *x* se gira alrededor del eje *x* para generar un sólido. Utilice una tabla de integrales para calcular el volumen del sólido generado. (Redondee la respuesta a dos decimales).

291. Utilice la sustitución y una tabla de integrales para hallar el área de la superficie generada al girar la curva $y=e^x, 0\le x\le 3,$ alrededor del eje *x*. (Redondee la respuesta a dos decimales).

292. **[T]** Utilice una tabla de integrales y una calculadora para hallar el área de la superficie generada al girar la curva $y=\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 1,$ alrededor del eje *x*. (Redondee la respuesta a dos decimales).

293. **[T]** Utilice un CAS o tablas para hallar el área de la superficie generada al girar la curva $y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, alrededor del eje *x*. (Redondee la respuesta a dos decimales).

294. Halle la longitud de la curva $y = \frac{x^2}{4}$ en $[0, 8]$.

295. Halle la longitud de la curva $y = e^x$ en $[0, \ln(2)]$.

296. Halle el área de la superficie formada al girar el gráfico de $y = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$ alrededor del eje *x*.

297. Calcule el valor promedio de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-3, 3]$.

298. Aproxime la longitud de arco de la curva $y = \tan(\pi x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. (Redondee la respuesta a tres decimales).

3.6 Integración numérica

Objetivos de aprendizaje

3.6.1 Aproximar el valor de una integral definida utilizando las reglas del punto medio y la trapezoidal.
3.6.2 Determinar el error absoluto y relativo al utilizar una técnica de integración numérica.
3.6.3 Estimar el error absoluto y relativo mediante una fórmula de limitación de errores.
3.6.4 Reconocer cuándo las reglas del punto medio y trapezoidal sobrestiman o subestiman el valor real de una integral.
3.6.5 Utilizar la regla de Simpson para aproximar el valor de una integral definida con una exactitud determinada.

Las antiderivadas de muchas funciones no se pueden expresar o no se pueden expresar fácilmente en forma cerrada (es decir, en términos de funciones conocidas). En consecuencia, en vez de evaluar directamente las integrales definidas de estas funciones, recurrimos a diversas técnicas de **integración numérica** para aproximar sus valores. En esta sección exploramos varias de estas técnicas. Además, examinamos el proceso de estimación del error al utilizar estas técnicas.

La regla del punto medio

Anteriormente en este texto hemos definido la integral definida de una función sobre un intervalo como el límite de las sumas de Riemann. En general, cualquier suma de Riemann de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ puede verse como una estimación de $\int_a^b f(x)dx$. Recordemos que la suma de Riemann de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se obtiene seleccionando una partición

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \text{ donde } a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

y un conjunto

$$S = \left\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right\}, \text{ donde } x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i \text{ para todo } i.$$

La suma de Riemann correspondiente a la partición P y el conjunto S está dado por $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, la longitud del *i*–ésimo subintervalo.

La **regla del punto medio** para estimar una integral definida utiliza una suma de Riemann con subintervalos de igual ancho y los puntos medios, m_i, de cada subintervalo en vez de x_i^*. Formalmente, enunciamos un teorema relativo a la convergencia de la regla del punto medio de la siguiente forma.

Teorema 3.3

La regla del punto medio
Supongamos que $f(x)$ es continua en $[a, b]$. Supongamos que *n* es un número entero positivo y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Si $[a, b]$ se divide en *n* subintervalos, cada uno de ellos de longitud Δx, y m_i es el punto medio del *i*–ésimo subintervalo,

establezca

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x. \tag{3.10}$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \int_a^b f(x)\,dx.$

Como podemos ver en la Figura 3.13, si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$ corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos que aproximan el área entre el gráfico de $f(x)$ y el eje *x* en $[a, b]$. El gráfico muestra los rectángulos correspondientes a M_4 para una función no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$.

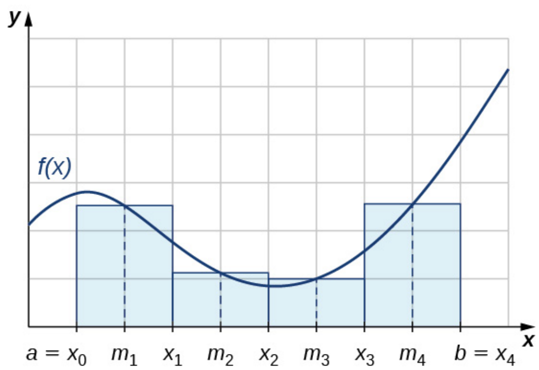


Figura 3.13 La regla del punto medio aproxima el área entre el gráfico de $f(x)$ y el eje *x* sumando las áreas de los rectángulos con puntos medios que son puntos en $f(x)$.

EJEMPLO 3.39

Usar la regla del punto medio con M_4

Utilice la regla del punto medio para estimar $\int_0^1 x^2\,dx$ utilizando cuatro subintervalos. Compare el resultado con el valor real de esta integral.

Solución

Cada subintervalo tiene una longitud $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, los subintervalos están compuestos por

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \text{ y } \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Los puntos medios de estos subintervalos son $\left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right\}$. Por lo tanto,

$$M_4 = \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{64} = \frac{21}{64}.$$

Dado que

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \text{ y } \left|\frac{1}{3} - \frac{21}{64}\right| = \frac{1}{192} \approx 0{,}0052,$$

vemos que la regla del punto medio produce una estimación algo cercana al valor real de la integral definida.

EJEMPLO 3.40

Usar la regla del punto medio con M_6

Utilice M_6 para estimar la longitud de la curva $y = \frac{1}{2}x^2$ en $[1, 4]$.

Solución

La longitud de $y = \frac{1}{2}x^2$ en $[1, 4]$ es

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Dado que $\frac{dy}{dx} = x$, esta integral se convierte en $\int_1^4 \sqrt{1 + x^2}\, dx.$

Si $[1, 4]$ se divide en seis subintervalos, entonces cada subintervalo tiene una longitud $\Delta x = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$ y los puntos medios de los subintervalos son $\left\{\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}, \frac{13}{4}, \frac{15}{4}\right\}$. Si establecemos que $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$,

$$\begin{aligned} M_6 &= \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{5}{4}\right) + \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{7}{4}\right) + \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{9}{4}\right) + \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{11}{4}\right) + \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{13}{4}\right) + \tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{15}{4}\right) \\ &\approx \tfrac{1}{2}(1{,}6008 + 2{,}0156 + 2{,}4622 + 2{,}9262 + 3{,}4004 + 3{,}8810) = 8{,}1431. \end{aligned}$$

3.22 Utilice la regla del punto medio con $n = 2$ para estimar $\int_1^2 \frac{1}{x} dx.$

La regla trapezoidal

También podemos aproximar el valor de una integral definida utilizando trapecios en vez de rectángulos. En la Figura 3.14, el área bajo la curva se aproxima mediante trapecios en vez de rectángulos.

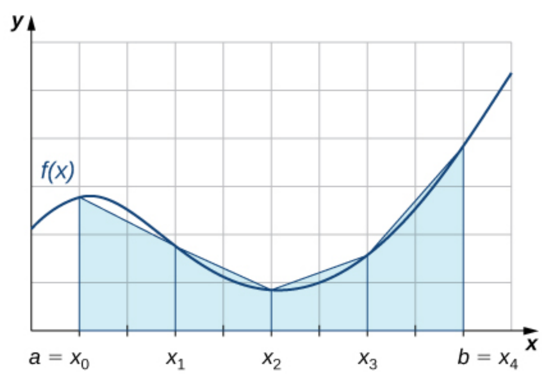


Figura 3.14 Los trapecios pueden utilizarse para aproximar el área bajo una curva, aproximando así la integral definida.

La **regla trapezoidal** para estimar integrales definidas utiliza trapecios en vez de rectángulos para aproximar el área bajo una curva. Para comprender la forma final de la regla, consideremos los trapecios que se muestran en la Figura 3.14. Suponemos que la longitud de cada subintervalo está dada por Δx. En primer lugar, recordemos que el área de un trapecio con una altura h y bases de longitud b_1 como de b_2 está dada por $\text{Área} = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$. Vemos que el primer trapecio tiene una altura Δx y bases paralelas de longitud $f(x_0)$ y $f(x_1)$. Por lo tanto, el área del primer trapecio en la Figura 3.14 es

$$\frac{1}{2}\Delta x(f(x_0) + f(x_1)).$$

Las áreas de los tres trapecios restantes son

$$\frac{1}{2}\Delta x(f(x_1) + f(x_2)), \frac{1}{2}\Delta x(f(x_2) + f(x_3)), \text{y } \frac{1}{2}\Delta x(f(x_3) + f(x_4)).$$

En consecuencia,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\Delta x(f(x_0)+f(x_1))+\frac{1}{2}\Delta x(f(x_1)+f(x_2))+\frac{1}{2}\Delta x(f(x_2)+f(x_3))+\frac{1}{2}\Delta x(f(x_3)+f(x_4)).$$

Después de sacar un factor común de $\frac{1}{2}\Delta x$ y combinando términos semejantes, tenemos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\Delta x\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(x_4)\right).$$

Generalizando, enunciamos formalmente la siguiente regla.

Teorema 3.4

La regla trapezoidal

Supongamos que $f(x)$ es continua en $[a, b]$. Supongamos que n es un número entero positivo y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
Supongamos que $[a, b]$ se divide en n subintervalos, cada uno de ellos de longitud Δx, con puntos finales en $P = \{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n\}$. Establezca que

$$T_n = \frac{1}{2}\Delta x\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right). \quad \textbf{(3.11)}$$

Entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,dx.$

Antes de continuar, hagamos algunas observaciones sobre la regla trapezoidal. En primer lugar, es útil señalar que

$$T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n) \text{ donde } L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \text{ y } R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Es decir, L_n y R_n aproximan la integral utilizando los puntos extremos izquierdo y derecho de cada subintervalo, respectivamente. Además, un análisis cuidadoso de la Figura 3.15 nos lleva a hacer las siguientes observaciones sobre el uso de las reglas trapezoidales y las reglas del punto medio para estimar la integral definida de una función no negativa. La regla trapezoidal tiende a sobreestimar el valor de una integral definida sistemáticamente en los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y a subestimar el valor de una integral definida sistemáticamente en los intervalos donde la función es cóncava hacia abajo. Por otro lado, la regla del punto medio tiende a promediar un poco estos errores al sobrestimar y subestimar parcialmente el valor de la integral definida en estos mismos tipos de intervalos. Esto nos lleva a plantear la hipótesis de que, en general, la regla del punto medio tiende a ser más precisa que la regla trapezoidal.

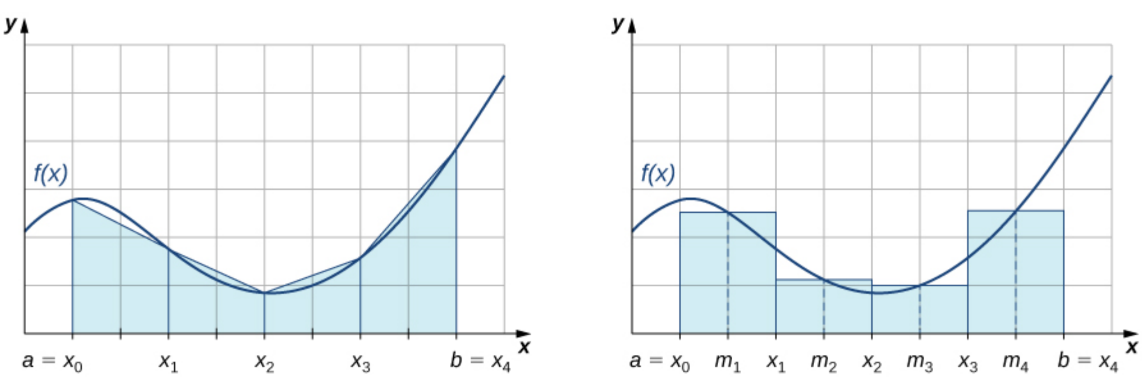


Figura 3.15 La regla trapezoidal tiende a ser menos precisa que la regla del punto medio.

EJEMPLO 3.41

Uso de la regla trapezoidal

Utilice la regla trapezoidal para estimar $\int_0^1 x^2\,dx$ utilizando cuatro subintervalos.

Solución

Los puntos finales de los subintervalos están formados por elementos del conjunto $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ y $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 dx &\approx \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(0 + 2.\frac{1}{16} + 2.\frac{1}{4} + 2.\frac{9}{16} + 1\right) \\ &= \frac{11}{32}.\end{aligned}$$

3.23 Utilice la regla trapezoidal con $n = 2$ para estimar $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

Error absoluto y relativo

Un aspecto importante de la utilización de estas reglas de aproximación numérica consiste en calcular el error cuando se utilizan para estimar el valor de una integral definida. Primero tenemos que definir el **error absoluto** y el **error relativo**.

Definición

Si B es nuestra estimación de alguna cantidad que tiene un valor real de A, entonces el error absoluto está dado por $|A - B|$. El error relativo es el error en porcentaje del valor absoluto y está dado por $\left|\frac{A-B}{A}\right| = \left|\frac{A-B}{A}\right| . 100\ \%$.

EJEMPLO 3.42

Cálculo del error en la regla del punto medio

Calcule el error absoluto y relativo en la estimación de $\int_0^1 x^2 dx$ utilizando la regla del punto medio, que se encuentra en el Ejemplo 3.39.

Solución

El valor calculado es $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ y nuestra estimación del ejemplo es $M_4 = \frac{21}{64}$. Por lo tanto, el error absoluto está dado por $\left|\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{21}{64}\right)\right| = \frac{1}{192} \approx 0{,}0052$. El error relativo es

$$\frac{1/192}{1/3} = \frac{1}{64} \approx 0{,}015625 \approx 1{,}6\ \%.$$

EJEMPLO 3.43

Cálculo del error en la regla trapezoidal

Calcule el error absoluto y relativo en la estimación de $\int_0^1 x^2 dx$ utilizando la regla trapezoidal, que se encuentra en el Ejemplo 3.41.

Solución

El valor calculado es $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ y nuestra estimación del ejemplo es $T_4 = \frac{11}{32}$. Por lo tanto, el error absoluto está dado por $\left|\frac{1}{3} - \frac{11}{32}\right| = \frac{1}{96} \approx 0{,}0104$. El error relativo está dado por

$$\frac{1/96}{1/3} = 0{,}03125 \approx 3{,}1\ \%.$$

3.24 En un punto de control anterior, estimamos $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ para que fuera $\frac{24}{35}$ utilizando T_2. El valor real de esta integral es $\ln 2$. Utilizando $\frac{24}{35} \approx 0{,}6857$ y $\ln 2 \approx 0{,}6931$, calcule el error absoluto y el error relativo.

En los dos ejemplos anteriores, pudimos comparar nuestra estimación de una integral con el valor real de la misma; sin embargo, no solemos tener este lujo. En general, si estamos aproximando una integral, lo hacemos porque no podemos calcular fácilmente el valor exacto de la propia integral. Por lo tanto, a menudo es útil poder determinar un límite superior para el error en una aproximación de una integral. El siguiente teorema proporciona límites de error para las reglas del punto medio y trapezoidal. El teorema se enuncia sin pruebas.

Teorema 3.5

Límites de error para las reglas del punto medio y trapezoidal

Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, que tiene una segunda derivada $f''(x)$ en este intervalo. Si M es el valor máximo de $|f''(x)|$ en $[a, b]$, entonces los límites superiores para el error en el uso de M_n y T_n para estimar $\int_a^b f(x)\,dx$ son

$$\text{Error en } M_n \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2} \tag{3.12}$$

y

$$\text{Error en } T_n \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \tag{3.13}$$

Podemos utilizar estos límites para determinar el valor de n necesario para garantizar que el error de una estimación sea inferior a un valor específico.

EJEMPLO 3.44

Determinación del número de intervalos a utilizar

¿Qué valor de n debe utilizarse para garantizar que una estimación de $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ tiene una precisión de 0,01 si utilizamos la regla del punto medio?

Solución

Empezamos por determinar el valor de M, el valor máximo de $|f''(x)|$ en $[0, 1]$ para $f(x) = e^{x^2}$. Dado que $f'(x) = 2xe^{x^2}$, tenemos

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}.$$

Por lo tanto,

$$|f''(x)| = 2e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) \leq 2 \cdot e \cdot 3 = 6e.$$

A partir del límite de error en la Ecuación 3.12, tenemos

$$\text{Error en } M_n \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2} \leq \frac{6e(1-0)^3}{24n^2} = \frac{6e}{24n^2}.$$

Ahora resolvemos la siguiente inecuación para n:

$$\frac{6e}{24n^2} \leq 0{,}01.$$

Por lo tanto, $n \geq \sqrt{\frac{600e}{24}} \approx 8{,}24$. Dado que n debe ser un número entero que satisfaga esta inecuación, una elección de

$n = 9$ garantizaría que $\left| \int_0^1 e^{x^2}\, dx - M_n \right| < 0{,}01.$

Análisis

Podríamos haber estado tentados de redondear $8{,}24$ hacia abajo y elegir $n = 8$, pero esto sería incorrecto porque debemos tener un número entero mayor o igual a $8{,}24$. Debemos tener en cuenta que las estimaciones de error solo proporcionan un límite superior para el error. De hecho, la estimación real puede ser una aproximación mucho mejor de lo que indica el límite de error.

3.25 Utilice la Ecuación 3.13 para hallar un límite superior para el error al utilizar M_4 para estimar $\int_0^1 x^2\, dx.$

Regla de Simpson

Con la regla del punto medio, estimamos las áreas de las regiones bajo las curvas utilizando rectángulos. En cierto sentido, aproximamos la curva con funciones constantes a trozos. Con la regla trapezoidal, aproximamos la curva utilizando funciones lineales a trozos. ¿Y si, en cambio, aproximáramos una curva utilizando funciones cuadráticas a trozos? Con la **regla de Simpson** hacemos precisamente esto. Partimos el intervalo en un número par de subintervalos, cada uno de ellos de igual ancho. En el primer par de subintervalos aproximamos $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx$ con $\int_{x_0}^{x_2} p(x)\, dx,$ donde $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ es la función cuadrática que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, y $(x_2, f(x_2))$ (Figura 3.16). En el siguiente par de subintervalos aproximamos $\int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx$ con la integral de otra función cuadrática que pasa por $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$, y $(x_4, f(x_4))$. Este proceso se continúa con cada par sucesivo de subintervalos.

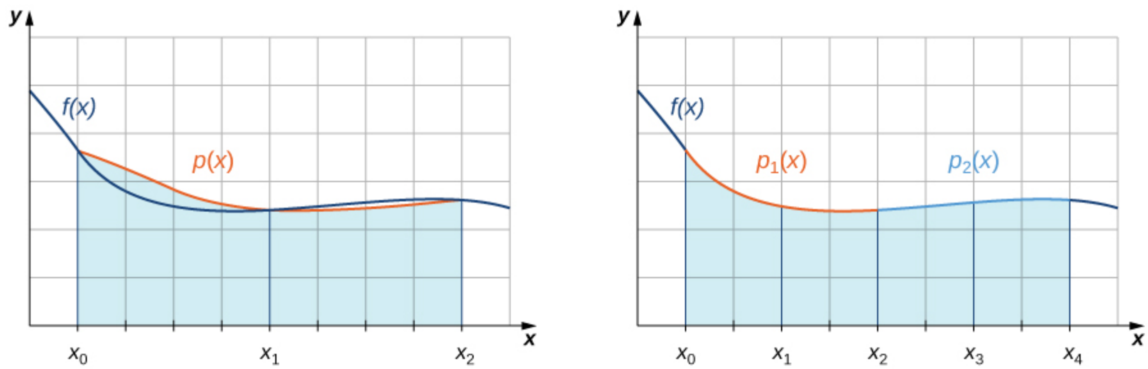


Figura 3.16 Con la regla de Simpson aproximamos una integral definida integrando una función cuadrática a trozos.

Para entender la fórmula que obtenemos para la regla de Simpson, empezamos por derivar una fórmula para esta aproximación sobre los dos primeros subintervalos. A medida que avanzamos en la derivación, debemos tener en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p(x_0) = A{x_0}^2 + Bx_0 + C \\ f(x_1) &= p(x_1) = A{x_1}^2 + Bx_1 + C \\ f(x_2) &= p(x_2) = A{x_2}^2 + Bx_2 + C \end{aligned}$$

$x_2 - x_0 = 2\Delta x$, donde Δx es la longitud de un subintervalo.

$$x_2 + x_0 = 2x_1, \text{ dado que } x_1 = \frac{(x_2 + x_0)}{2}.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx \\
&= \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx \\
&= \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx\Big|_{x_0}^{x_2} && \text{Calcule la antiderivada.} \\
&= \frac{A}{3}\left(x_2{}^3 - x_0{}^3\right) + \frac{B}{2}\left(x_2{}^2 - x_0{}^2\right) + C(x_2 - x_0) && \text{Evalúe la antiderivada.} \\
&= \frac{A}{3}(x_2 - x_0)\left(x_2{}^2 + x_2x_0 + x_0{}^2\right) \\
&\quad + \frac{B}{2}(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) + C(x_2 - x_0) \\
&= \frac{x_2 - x_0}{6}\left(2A\left(x_2{}^2 + x_2x_0 + x_0{}^2\right) + 3B(x_2 + x_0) + 6C\right) && \text{Saque el factor común } \frac{x_2 - x_0}{6}. \\
&= \frac{\Delta x}{3}\left(\left(Ax_2{}^2 + Bx_2 + C\right) + (Ax_0{}^2 + Bx_0 + C\right) \\
&\quad + A\left(x_2{}^2 + 2x_2x_0 + x_0{}^2\right) + 2B(x_2 + x_0) + 4C) \\
&= \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_2) + f(x_0) + A(x_2 + x_0)^2 + 2B(x_2 + x_0) + 4C\right) && \text{Reordene los términos.} \\
& && \text{Factorice y sustituya } f(x_2) = Ax_2{}^2 + Bx_2 + C \text{ y } f(x_0) = Ax_0{}^2 + Bx_0 + C. \\
&= \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_2) + f(x_0) + A(2x_1)^2 + 2B(2x_1) + 4C\right) && \text{Sustituya } x_2 + x_0 = 2x_1. \\
&= \frac{\Delta x}{3}(f(x_2) + 4f(x_1) + f(x_0)). && \text{Expanda y sustituya } f(x_1) = Ax_1{}^2 + Bx_1 + C.
\end{aligned}
$$

Si aproximamos $\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx$ utilizando el mismo método, vemos que tenemos

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_4) + 4f(x_3) + f(x_2)).$$

Combinando estas dos aproximaciones, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)).$$

El patrón continúa a medida que añadimos pares de subintervalos a nuestra aproximación. La regla general puede ser la siguiente.

Teorema 3.6

Regla de Simpson

Supongamos que $f(x)$ es continua en $[a, b]$. Supongamos que n es un número entero par positivo y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Supongamos que $[a, b]$ se divide en n subintervalos, cada uno de ellos de longitud Δx, con puntos finales en $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Establezca que

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)). \quad \textbf{(3.14)}$$

Entonces,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Al igual que la regla trapezoidal es el promedio de las reglas de la izquierda y de la derecha para estimar integrales definidas, la regla de Simpson puede obtenerse a partir de las reglas del punto medio y de la trapezoidal utilizando un promedio ponderado. Se puede demostrar que $S_{2n} = \left(\frac{2}{3}\right) M_n + \left(\frac{1}{3}\right) T_n$.

También es posible poner un límite al error cuando se utiliza la regla de Simpson para aproximar una integral definida. El límite del error viene dado por la siguiente regla:

Regla: límite de error para la regla de Simpson

Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ que tiene una cuarta derivada, $f^{(4)}(x)$, en este intervalo. Si M es el valor máximo de $\left|f^{(4)}(x)\right|$ en $[a, b]$, entonces el límite superior del error al utilizar S_n para estimar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por

$$\text{Error en } S_n \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}. \tag{3.15}$$

EJEMPLO 3.45

Aplicación de la regla de Simpson 1

Utilice S_2 para aproximar a $\int_0^1 x^3\,dx$. Estime un límite para el error en S_2.

Solución

Dado que $[0, 1]$ se divide en dos intervalos, cada subintervalo tiene una longitud $\Delta x = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$. Los puntos finales de estos subintervalos son $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Si establecemos que $f(x) = x^3$, entonces

$S_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\left(0 + 4 \cdot \frac{1}{8} + 1\right) = \frac{1}{4}$. Dado que $f^{(4)}(x) = 0$ y en consecuencia $M = 0$, vemos que

$$\text{Error en } S_2 \leq \frac{0(1)^5}{180 \cdot 2^4} = 0.$$

Este límite indica que el valor obtenido mediante la regla de Simpson es exacto. Una comprobación rápida lo verificará, de hecho, $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$.

EJEMPLO 3.46

Aplicación de la regla de Simpson 2

Utilice S_6 para estimar la longitud de la curva $y = \frac{1}{2}x^2$ en $[1, 4]$.

Solución

La longitud de $y = \frac{1}{2}x^2$ en $[1, 4]$ es $\int_1^4 \sqrt{1 + x^2}\,dx$. Si dividimos $[1, 4]$ en seis subintervalos, entonces cada subintervalo tiene una longitud $\Delta x = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$, y los puntos finales de los subintervalos son $\left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$. Si establecemos que $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$,

$$S_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + 2f(3) + 4f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4)\right).$$

Tras la sustitución, tenemos

$$\begin{aligned} S_6 &= \tfrac{1}{6}(1{,}4142 + 4.\ 1{,}80278 + 2.\ 2{,}23607 + 4.\ 2{,}69258 + 2.\ 3{,}16228 + 4.\ 3{,}64005 + 4{,}12311) \\ &\approx 8{,}14594. \end{aligned}$$

3.26 Utilice S_2 para estimar $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SECCIÓN 3.6 EJERCICIOS

Aproxime las siguientes integrales utilizando la regla del punto medio, la regla trapezoidal o la regla de Simpson, según se indique (redondee las respuestas a tres decimales).

299. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; regla trapezoidal; $n = 5$

300. $\int_0^3 \sqrt{4 + x^3}\, dx$; regla trapezoidal; $n = 6$

301. $\int_0^3 \sqrt{4 + x^3}\, dx$; regla trapezoidal; n n $= 3$

302. $\int_0^{12} x^2\, dx$; regla del punto medio; $n = 6$

303. $\int_0^1 \text{sen}^2 (\pi x)\, dx$; regla del punto medio; n n $= 3$

304. Utilice la regla del punto medio con ocho subdivisiones para estimar $\int_2^4 x^2\, dx$.

305. Utilice la regla trapezoidal con cuatro subdivisiones para estimar $\int_2^4 x^2\, dx$.

306. Halle el valor exacto de $\int_2^4 x^2\, dx$. Calcule el error de aproximación entre el valor exacto y el valor calculado mediante la regla trapezoidal con cuatro subdivisiones. Dibuje un gráfico para ilustrarlo.

Aproxime la integral a tres decimales utilizando la regla indicada.

307. $\int_0^1 \text{sen}^2 (\pi x)\, dx$; regla trapezoidal; $n = 6$

308. $\int_0^3 \frac{1}{1 + x^3} dx$; regla trapezoidal; $n = 6$

309. $\int_0^3 \frac{1}{1 + x^3} dx$; regla trapezoidal; n n $= 3$

310. $\int_0^{0,8} e^{-x^2}\, dx$; regla trapezoidal; $n = 4$

311. $\int_0^{0,8} e^{-x^2}\, dx$; regla de Simpson; $n = 4$

312. $\int_0^{0,4} \text{sen}(x^2) dx$; regla trapezoidal; $n = 4$

313. $\int_0^{0,4} \text{sen}(x^2) dx$; regla de Simpson; $n = 4$

314. $\int_{0,1}^{0,5} \frac{\cos x}{x} dx$; regla trapezoidal; $n = 4$

315. $\int_{0,1}^{0,5} \frac{\cos x}{x} dx$; regla de Simpson; $n = 4$

316. Evalúe $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ exactamente y demuestre que el resultado es $\pi/4$. A continuación, halle el valor aproximado de la integral utilizando la regla trapezoidal con $n = 4$ subdivisiones. Utilice el resultado para aproximar el valor de π.

317. Aproxime $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} dx$ utilizando la regla del punto medio con cuatro subdivisiones y redondee a cuatro decimales.

318. Aproxime $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} dx$ utilizando la regla trapezoidal con ocho subdivisiones y redondee a cuatro decimales.

319. Utilice la regla trapezoidal con cuatro subdivisiones para estimar $\int_0^{0,8} x^3\,dx$ con cuatro decimales.

320. Utilice la regla trapezoidal con cuatro subdivisiones para estimar $\int_0^{0,8} x^3\,dx.$ Compare este valor con el valor exacto y calcule la estimación del error.

321. Utilizando la regla de Simpson con cuatro subdivisiones, calcule $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx.$

322. Demuestre que el valor exacto de $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}.$ Calcule el error absoluto si aproxima la integral utilizando la regla del punto medio con 16 subdivisiones.

323. Dada $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e},$ utilice la regla trapezoidal con 16 subdivisiones para aproximar la integral y hallar el error absoluto.

324. Halle un límite superior para el error de estimación $\int_0^3 (5x+4)dx$ utilizando la regla trapezoidal con seis pasos.

325. Halle un límite superior para el error de estimación $\int_4^5 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ utilizando la regla trapezoidal con siete subdivisiones.

326. Halle un límite superior para el error de estimación $\int_0^3 (6x^2-1)dx$ utilizando la regla de Simpson con $n = 10$ pasos.

327. Halle un límite superior para el error de estimación $\int_2^5 \frac{1}{x-1}dx$ utilizando la regla de Simpson con $n = 10$ pasos.

328. Halle un límite superior para el error de estimación $\int_0^{\pi} 2x\cos(x)dx$ utilizando la regla de Simpson con cuatro pasos.

329. Estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar la integral $\int_1^4 \left(5x^2+8\right)dx$ con una magnitud de error inferior a 0,0001 utilizando la regla trapezoidal.

330. Determine un valor *n* tal que la regla trapezoidal aproxime la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con un error no superior a 0,01.

331. Estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar la integral $\int_2^3 \left(2x^3+4x\right)dx$ con un error de magnitud inferior a 0,0001 utilizando la regla trapezoidal.

332. Estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar la integral $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ con una magnitud de error inferior a 0,0001 utilizando la regla trapezoidal.

333. Utilice la regla de Simpson con cuatro subdivisiones para aproximar el área bajo la función de densidad de probabilidad $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ de $x = 0$ hasta $x = 0{,}4.$

334. Utilice la regla de Simpson con $n = 14$ para aproximar (con tres decimales) el área de la región delimitada por los gráficos de $y = 0$, $x = 0$, y $x = \pi/2$.

335. La longitud de un arco de la curva $y = 3\,\text{sen}(2x)$ está dada por

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 36\cos^2(2x)}\,dx.$$

Estime *L* utilizando la regla trapezoidal con $n = 6$.

336. La longitud de la elipse $x = a\cos(t)$, $y = b\,\text{sen}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ está dada por

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2(t)}\,dt,$$

donde *e* es la excentricidad de la elipse. Utilice la regla de Simpson con $n = 6$ subdivisiones para estimar la longitud de la elipse cuando $a = 2$ y $e = 1/3$.

337. Estime el área superficial generada cuando se gira la curva $y = \cos(2x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ alrededor del eje *x*. Utilice la regla trapezoidal con seis subdivisiones.

338. Estime el área superficial generada cuando se gira la curva $y = 2x^2$, $0 \leq x \leq 3$ alrededor del eje *x*. Utilice la regla de Simpson con $n = 6$.

339. La tasa de crecimiento de un determinado árbol (en pies) está dada por $y = \frac{2}{t+1} + e^{-t^2/2}$, donde t es el tiempo en años. Estime el crecimiento del árbol hasta el final del segundo año utilizando la regla de Simpson con dos subintervalos (redondee la respuesta a la centésima más cercana).

340. **[T]** Use una calculadora para aproximar $\int_0^1 \text{sen}\,(\pi x)\,dx$ utilizando la regla del punto medio con 25 subdivisiones. Calcule el error relativo de aproximación.

341. **[T]** Dada $\int_1^5 \left(3x^2 - 2x\right)\,dx = 100,$ aproxime el valor de esta integral utilizando la regla trapezoidal con 16 subdivisiones y determine el error absoluto.

342. Dado que conocemos el teorema fundamental del cálculo, ¿por qué querríamos desarrollar métodos numéricos para integrales definidas?

343. La tabla representa las coordenadas $\left(x, \quad y\right)$ que dan el límite de un terreno. Las unidades de medida son metros. Utilice la regla trapezoidal para estimar el número de metros cuadrados de terreno que hay en este terreno.

x	y	x	y
0	125	600	95
100	125	700	88
200	120	800	75
300	112	900	35
400	90	1.000	0
500	90		

344. Elija la respuesta correcta. Cuando se utiliza la regla de Simpson para aproximar la integral definida, es necesario que el número de particiones sea____

a. un número par
b. un número impar
c. un número par o impar
d. un múltiplo de 4

345. La suma de "Simpson" se basa en el área bajo un ____.

346. La fórmula de error de la regla de Simpson depende de___.

a. $f(x)$ grandes.
b. $f'(x)$ grandes.
c. $f^{(4)}(x)$
d. el número de pasos

3.7 Integrales impropias

Objetivos de aprendizaje

3.7.1 Evaluar una integral en un intervalo infinito.
3.7.2 Evaluar una integral en un intervalo cerrado con una discontinuidad infinita dentro del intervalo.
3.7.3 Utilizar el teorema de comparación para determinar si una integral definida es convergente.

El área entre el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y el eje *x* en el intervalo $[1, +\infty)$ ¿es finita o infinita? Si esta misma región se hace girar alrededor del eje *x*, ¿el volumen es finito o infinito? Sorprendentemente, el área de la región descrita es infinita, pero el volumen del sólido obtenido al girar esta región alrededor del eje *x* es finito.

En esta sección, definimos las integrales en un intervalo infinito, así como las integrales de funciones que contienen una discontinuidad en el intervalo. Las integrales de este tipo se llaman integrales impropias. Examinamos varias técnicas para evaluar integrales impropias, todas las cuales implican tomar límites.

Integración en un intervalo infinito

¿Cómo podemos definir una integral del tipo $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$? Podemos integrar $\int_a^t f(x)\,dx$ para cualquier valor de t, por lo que es razonable observar el comportamiento de esta integral a medida que sustituimos valores mayores de t. La

Figura 3.17 muestra que $\int_a^t f(x)\,dx$ puede interpretarse como área para varios valores de t. En otras palabras, podemos definir una integral impropia como un límite, tomado a medida que uno de los límites de integración aumenta o disminuye sin límite.

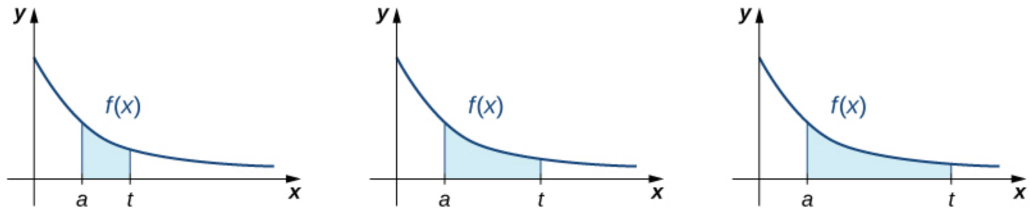


Figura 3.17 Para integrar una función en un intervalo infinito, consideramos el límite de la integral a medida que el límite superior aumenta sin límite.

Definición

1. Supongamos que $f(x)$ es continua en un intervalo de la forma $[a, +\infty)$. Entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx, \tag{3.16}$$

siempre que exista este límite.

2. Supongamos que $f(x)$ es continua en un intervalo de la forma $(-\infty, b]$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx, \tag{3.17}$$

siempre que exista este límite.
En cada caso, si el límite existe, se dice que la **integral impropia** converge. Si el límite no existe, se dice que la integral impropia diverge.

3. Supongamos que $f(x)$ es continua en $(-\infty, +\infty)$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{3.18}$$

siempre que $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ y $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ambas convergen. Si cualquiera de estas dos o ambas integrales divergen, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. (Se puede demostrar que, de hecho, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ para cualquier valor de a.)

En nuestro primer ejemplo, volvemos a la pregunta que planteamos al principio de esta sección: El área entre el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, +\infty)$ ¿es finita o infinita?

EJEMPLO 3.47

Hallar un área

Determine si el área entre el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, +\infty)$ es finita o infinita.

Solución

En primer lugar, hacemos un dibujo rápido de la región en cuestión, como se muestra en el siguiente gráfico.

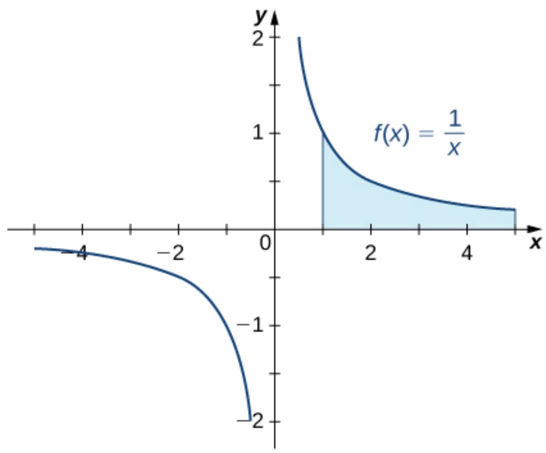


Figura 3.18 Podemos hallar el área entre la curva $f(x) = 1/x$ y el eje x en un intervalo infinito.

Podemos ver que el área de esta región está dada por $A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. Entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx && \text{Reescriba la integral impropia como un límite.} \\
&= \lim_{t \to +\infty} \ln|x| \Big|_1^t && \text{Calcule la antiderivada.} \\
&= \lim_{t \to +\infty} (\ln|t| - \ln 1) && \text{Evalúe la antiderivada.} \\
&= +\infty. && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}
$$

Como la integral impropia diverge a $+\infty$, el área de la región es infinita.

EJEMPLO 3.48

Calcular un volumen

Calcule el volumen del sólido obtenido cuando se gira la región delimitada por el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, +\infty)$ alrededor del eje x.

Solución

El sólido se muestra en la Figura 3.19. Utilizando el método del disco, vemos que el volumen V es

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

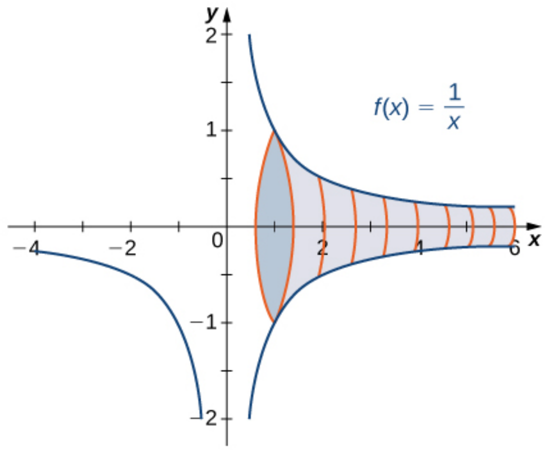


Figura 3.19 El sólido de revolución puede generarse girando un área infinita alrededor del eje *x*.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \pi \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx && \text{Reescriba como un límite.} \\ &= \pi \lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t && \text{Calcule la antiderivada.} \\ &= \pi \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) && \text{Evalúe la antiderivada.} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

La integral impropia converge a π. Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución es π.

En conclusión, aunque el área de la región entre el eje *x* y el gráfico de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, +\infty)$ es infinita, el volumen del sólido generado al girar esta región alrededor del eje *x* es finito. El sólido generado se conoce como el *cuerno de Gabriel*.

MEDIOS

Visite este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_GabrielsHorn) para leer más sobre el cuerno de Gabriel.

EJEMPLO 3.49

Inicio del capítulo: Accidentes de tráfico en una ciudad



Figura 3.20 (créditos: modificación del trabajo de David McKelvey, Flickr).

En el inicio del capítulo, planteamos el siguiente problema: supongamos que en una intersección muy concurrida se producen accidentes de tráfico a una tasa promedio de uno cada tres meses. Tras las quejas de los vecinos, se

modificaron los semáforos de la intersección. Ya han pasado ocho meses desde que se hicieron los cambios y no ha habido ningún accidente. ¿Fueron efectivos los cambios o el intervalo de 8 meses sin accidentes es fruto de la casualidad?

La teoría de la probabilidad nos dice que si el tiempo promedio entre eventos es k, la probabilidad de que X, el tiempo entre eventos, esté entre a y b está dada por

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ ke^{-kx} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto, si los accidentes se producen a una tasa de uno cada 3 meses, la probabilidad de que X, el tiempo entre accidentes, esté entre a y b está dada por

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 3e^{-3x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Para responder la pregunta, debemos calcular $P(X \geq 8) = \int_8^{+\infty} 3e^{-3x}\,dx$ y decidir si es probable que hayan pasado 8 meses sin que se produzca un accidente si no hubiera mejorado la situación del tráfico.

Solución

Tenemos que calcular la probabilidad como una integral impropia:

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= \int_8^{+\infty} 3e^{-3x}\,dx \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int_8^t 3e^{-3x}\,dx \\ &= \lim_{t \to +\infty} -e^{-3x}\Big|_8^t \\ &= \lim_{t \to +\infty} \left(-e^{-3t} + e^{-24}\right) \\ &\approx 3{,}8 \times 10^{-11}. \end{aligned}$$

El valor $3{,}8 \times 10^{-11}$ representa la probabilidad de que no haya accidentes en 8 meses en las condiciones iniciales. Como este valor es muy, muy pequeño, es razonable concluir que los cambios fueron efectivos.

EJEMPLO 3.50

Evaluación de una integral impropia en un intervalo infinito

Evalúe $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4}\,dx$. Indique si la integral impropia converge o diverge.

Solución

Comience por reescribir $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4}\,dx$ como límite utilizando la Ecuación 3.17 de la definición. Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+4}dx \qquad \text{Reescriba como un límite.}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\tfrac{x}{2}\Big|_{t}^{0} \qquad \text{Calcule la antiderivada.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\lim_{t\to-\infty} (\tan^{-1}0 - \tan^{-1}\tfrac{t}{2}) \qquad \text{Evalúe la antiderivada.}$$

$$= \tfrac{\pi}{4}. \qquad \text{Evalúe el límite y simplifique.}$$

La integral impropia converge a $\frac{\pi}{4}$.

EJEMPLO 3.51

Evaluación de una integral impropia en $(-\infty, +\infty)$

Evalúe $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^x\,dx$. Indique si la integral impropia converge o diverge.

Solución

Empiece por dividir la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^x\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx + \int_{0}^{+\infty} xe^x\,dx.$$

Si cualquiera de $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$ o $\int_{0}^{+\infty} xe^x\,dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^x\,dx$ diverge. Calcule cada integral por separado.

Para la primera integral,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^x\,dx \qquad \text{Reescriba como un límite.}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (xe^x - e^x)\Big|_{t}^{0} \qquad \text{Utilice la integración por partes para hallar la antiderivada. (Aquí } u = x \text{ y } dv = e^x_{\text{dx}}.)$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(-1 - te^t + e^t\right) \qquad \text{Evalúe la antiderivada.}$$

$$= -1.$$

Evalúe el límite. *Nota:* $\lim_{t\to-\infty} te^t$ es indeterminado de la forma $0.\,\infty$. Por lo tanto, $\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-1}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} -e^t = 0$ por La regla de L'Hôpital.

La primera integral impropia converge. Para la segunda integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^x\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^x\,dx && \text{Reescriba como un límite.}\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(xe^x - e^x\right)\Big|_0^t && \text{Calcule la antiderivada.}\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(te^t - e^t + 1\right) && \text{Evalúe la antiderivada.}\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left((t-1)\,e^t + 1\right) && \text{Reescriba. } (te^t - e^t \text{ es indeterminado).}\\
&= +\infty. && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_0^{+\infty} xe^x\,dx$ diverge. Dado que esta integral diverge, $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^x\,dx$ también diverge.

3.27 Evalúe $\int_{-3}^{+\infty} e^{-x}\,dx$. Indique si la integral impropia converge o diverge.

Integración de un integrando discontinuo

Ahora vamos a examinar las integrales de funciones que contienen una discontinuidad infinita en el intervalo sobre el que se produce la integración. Consideremos una integral de la forma $\int_a^b f(x)dx$, donde $f(x)$ es continua en $[a, b)$ y discontinua en b. Dado que la función $f(x)$ es continua en $[a, t]$ para todos los valores de t que satisface $a < t < b$, la integral $\int_a^t f(x)dx$ se define para todos esos valores de t. Por lo tanto, tiene sentido considerar los valores de $\int_a^t f(x)dx$ a medida que t se acerca a b para $a < t < b$. Es decir, definimos $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$, siempre que exista este límite. La Figura 3.21 ilustra $\int_a^t f(x)dx$ como áreas de regiones para valores de t que se acercan a b.

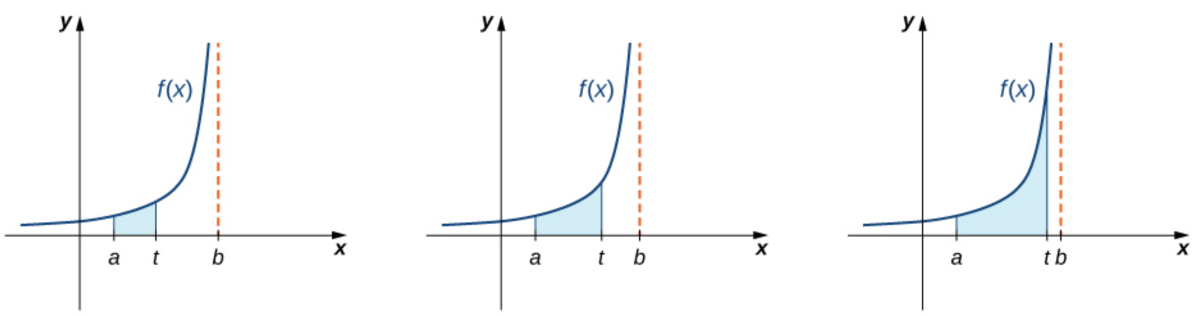


Figura 3.21 A medida que *t* se acerca a *b* por la izquierda, el valor del área de *a* a *t* se acerca al área de *a* a *b*.

Utilizamos un enfoque similar para definir $\int_a^b f(x)dx$, donde $f(x)$ es continua en $(a, b]$ y discontinua en a. Procedemos ahora a una definición formal.

Definición

1. Supongamos que $f(x)$ es continua en $[a, b)$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx. \quad \text{(3.19)}$$

2. Supongamos que $f(x)$ es continua en $(a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx. \quad \text{(3.20)}$$

   En cada caso, si el límite existe, se dice que la integral impropia converge. Si el límite no existe, se dice que la integral impropia diverge.

3. Si los valores de $f(x)$ es continua en $[a, b]$ excepto en un punto c en (a, b), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \text{(3.21)}$$

   siempre que ambas $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ converjan. Si cualquiera de estas integrales diverge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Los siguientes ejemplos demuestran la aplicación de esta definición.

EJEMPLO 3.52

Integración de un integrando discontinuo

Evalúe $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$, si es posible. Indique si la integral converge o diverge.

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ es continua en $[0, 4)$ y discontinua en 4. Utilizando la Ecuación 3.19 de la definición, reescriba $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$ como límite:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx &= \lim_{t \to 4^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx && \text{Reescriba como un límite.} \\
&= \lim_{t \to 4^-} \left(-2\sqrt{4-x}\right)\Big|_0^t && \text{Calcule la antiderivada.} \\
&= \lim_{t \to 4^-} \left(-2\sqrt{4-t} + 4\right) && \text{Evalúe la antiderivada.} \\
&= 4. && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}$$

La integral impropia converge.

EJEMPLO 3.53

Integración de un integrando discontinuo

Evalúe $\int_0^2 x \ln x\, dx$. Indique si la integral converge o diverge.

Solución

Dado que $f(x) = x \ln x$ es continua en $(0, 2]$ y es discontinua en cero, podemos reescribir la integral en forma de límite utilizando la Ecuación 3.20:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\ln x\,dx &= \lim_{t\to0^+}\int_t^2 x\ln x\,dx && \text{Reescriba como un límite.}\\ &= \lim_{t\to0^+}\left(\tfrac{1}{2}x^2\ln x-\tfrac{1}{4}x^2\right)\Big|_t^2 && \text{Evalúe }\int x\ln x\,dx\text{ utilizando la integración por partes con }u=\ln x\text{ y }dv=x\,\text{dx.}\\ &= \lim_{t\to0^+}\left(2\ln 2-1-\tfrac{1}{2}t^2\ln t+\tfrac{1}{4}t^2\right). && \text{Evalúe la antiderivada.}\\ &= 2\ln 2-1. && \text{Evalúe el límite. }\lim_{t\to0^+}t^2\ln t\text{ es indeterminada.}\end{aligned}$$

Para evaluarla, reescríbala como un cociente y aplique la regla de L'Hôpital.

La integral impropia converge.

EJEMPLO 3.54

Integración de un integrando discontinuo

Evalúe $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx$. Indique si la integral impropia converge o diverge.

Solución

Dado que $f(x)=1/x^3$ es discontinua en cero, utilizando la Ecuación 3.21, podemos escribir

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}dx.$$

Si cualquiera de las dos integrales diverge, entonces la integral original diverge. Comience con $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx &= \lim_{t\to0^-}\int_{-1}^{t}\frac{1}{x^3}dx && \text{Reescriba como un límite.}\\ &= \lim_{t\to0^-}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{t} && \text{Calcule la antiderivada.}\\ &= \lim_{t\to0^-}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right) && \text{Evalúe la antiderivada.}\\ &= +-\infty. && \text{Evalúe el límite.}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx$ diverge. Dado que $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx$ diverge, $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx$ diverge.

3.28 Evalúe $\int_{0}^{2}\frac{1}{x}dx$. Indique si la integral converge o diverge.

Un teorema de comparación

No siempre es fácil, o incluso posible, evaluar directamente una integral impropia; sin embargo, comparándola con otra integral elegida cuidadosamente, puede ser posible determinar su convergencia o divergencia. Para ver esto, considere dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ que satisface $0\le f(x)\le g(x)$ para $x\ge a$ (Figura 3.22). En este caso, podemos ver integrales de estas funciones en intervalos de la forma $[a,t]$ como áreas, por lo que tenemos la relación

$$0\le\int_a^t f(x)\,dx\le\int_a^t g(x)dx\text{ para }t\ge a.$$

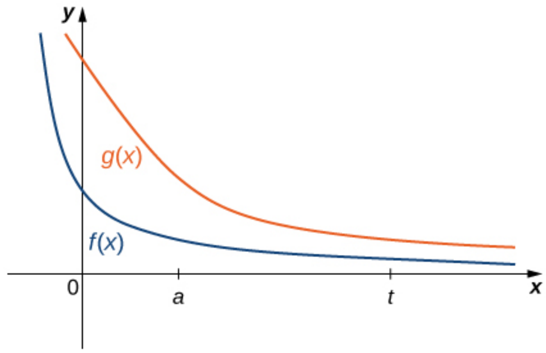


Figura 3.22 Si los valores de $0 \le f(x) \le g(x)$ para $x \ge a$, entonces para $t \ge a$, $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t g(x)dx$.

Por lo tanto, si

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx = +\infty,$$

entonces

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t g(x)\,dx = +\infty$ también. Es decir, si el área de la región entre el gráfico de $f(x)$ y el eje *x* en $[a, +\infty)$ es infinita, entonces el área de la región entre el gráfico de $g(x)$ y el eje *x* en $[a, +\infty)$ también es infinita.

Por otro lado, si

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t g(x)\,dx = L$ para algún número real L, entonces

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ debe converger a algún valor menor o igual a L, dado que $\int_a^t f(x)\,dx$ aumenta a medida que *t* aumenta y $\int_a^t f(x)\,dx \le L$ para todo $t \ge a$.

Si el área de la región entre el gráfico de $g(x)$ y el eje *x* en $[a, +\infty)$ es finita, entonces el área de la región entre el gráfico de $f(x)$ y el eje *x* en $[a, +\infty)$ también es finita.

Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.7

Un teorema de comparación

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ es continua en $[a, +\infty)$. Supongamos que $0 \le f(x) \le g(x)$ para $x \ge a$.

i. Si los valores de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx = +\infty$, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t g(x)\,dx = +\infty$.

ii. Si los valores de $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t g(x)\,dx = L$, donde L es un número real, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx = M$$ para algún número real $M \le L$.

EJEMPLO 3.55

Aplicación del teorema de comparación

Utilice una comparación para demostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx$ converge.

Solución

Podemos ver que

$$0 \leq \frac{1}{xe^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x},$$

por lo que si $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, entonces también lo hace $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx$. Para evaluar $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$, reescríbala primero como un límite:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{t \to +\infty} \int_1^t e^{-x} dx \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(-e^{-x}\right) \Big|_1^t \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(-e^{-t} + e^{-1}\right) \\
&= e^{-1}.
\end{aligned}$$

Dado que $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, también lo hace $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx$.

EJEMPLO 3.56

Aplicación del teorema de comparación

Utilice el teorema de la comparación para demostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge para todo $p < 1$.

Solución

Para $p < 1$, $1/x \leq 1/(x^p)$ en $[1, +\infty)$. En el Ejemplo 3.47, demostramos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$. Por lo tanto, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge para todo $p < 1$.

3.29 Utilice una comparación para demostrar que $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ diverge.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Transformadas de Laplace

En los últimos capítulos hemos visto varias formas de utilizar la integración para resolver problemas del mundo real. Para el siguiente proyecto, vamos a explorar una aplicación más avanzada de la integración: las transformadas integrales. En concreto, describimos la transformada de Laplace y algunas de sus propiedades. La transformada de Laplace se utiliza en ingeniería y física para simplificar los cálculos necesarios para resolver algunos problemas. Toma funciones expresadas en términos de tiempo y las *transforma* en funciones expresadas en términos de frecuencia.

Resulta que, en muchos casos, los cálculos necesarios para resolver problemas en el ámbito de la frecuencia son mucho más sencillos que los requeridos en el ámbito del tiempo.

La transformada de Laplace se define en términos de una integral como

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Tenga en cuenta que la entrada de una transformada de Laplace es una función del tiempo, $f(t)$, y la salida es una función de la frecuencia, $F(s)$. Aunque muchos ejemplos del mundo real requieren el uso de números complejos (que implican el número imaginario $i = \sqrt{-1}$), en este proyecto nos limitamos a funciones de números reales.

Empecemos con un ejemplo sencillo. Aquí calculamos la transformada de Laplace de $f(t) = t$. Tenemos

$$L\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt.$$

Esta es una integral impropia, por lo que la expresamos en términos de un límite, lo que da

$$L\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{z\to\infty} \int_0^z te^{-st}dt.$$

Ahora utilizamos la integración por partes para evaluar la integral. Observe que estamos integrando con respecto a *t*, por lo que tratamos la variable *s* como una constante. Tenemos

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= e^{-st}dt \\ du &= dt & v &= -\tfrac{1}{s}e^{-st}. \end{aligned}$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} \int_0^z te^{-st}dt &= \lim_{z\to\infty} \left[\left[-\tfrac{t}{s}e^{-st}\right]\Big|_0^z + \tfrac{1}{s}\int_0^z e^{-st}dt\right] \\ &= \lim_{z\to\infty} \left[\left[-\tfrac{z}{s}e^{-sz} + \tfrac{0}{s}e^{-0s}\right] + \tfrac{1}{s}\int_0^z e^{-st}dt\right] \\ &= \lim_{z\to\infty} \left[\left[-\tfrac{z}{s}e^{-sz} + 0\right] - \tfrac{1}{s}\left[\tfrac{e^{-st}}{s}\right]\Big|_0^z\right] \\ &= \lim_{z\to\infty} \left[\left[-\tfrac{z}{s}e^{-sz}\right] - \tfrac{1}{s^2}\left[e^{-sz} - 1\right]\right] \\ &= \lim_{z\to\infty} \left[-\tfrac{z}{se^{sz}}\right] - \lim_{z\to\infty}\left[\tfrac{1}{s^2e^{sz}}\right] + \lim_{z\to\infty}\tfrac{1}{s^2} \\ &= 0 - 0 + \tfrac{1}{s^2} \\ &= \tfrac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

1. Calcule la transformada de Laplace de $f(t) = 1$.
2. Calcule la transformada de Laplace de $f(t) = e^{-3t}$.
3. Calcule la transformada de Laplace de $f(t) = t^2$. (Observe que tendrá que integrar por partes dos veces).
   Las transformadas de Laplace se utilizan a menudo para resolver ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales no se tratan en detalle hasta más adelante en este libro; pero, por ahora, veamos la relación entre la transformada de Laplace de una función y la transformada de Laplace de su derivada.
   Comencemos con la definición de la transformada de Laplace. Tenemos

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-st}f(t)dt.$$

4. Utilice la integración por partes para evaluar $\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-st} f(t)dt$. (Supongamos que $u = f(t)$ y $dv = e^{-st}dt$.)

Después de integrar por partes y evaluar el límite, debería ver que

$$L\{f(t)\} = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\left[L\left\{f'(t)\right\}\right].$$

Entonces,

$$L\left\{f'(t)\right\} = sL\{f(t)\} - f(0).$$

Por lo tanto, la diferenciación en el ámbito del tiempo se simplifica a la multiplicación por s en el ámbito de la frecuencia.

Lo último que vemos en este proyecto es cómo las transformadas de Laplace de $f(t)$ y su antiderivada están relacionadas. Supongamos que $g(t) = \int_0^t f(u)du$. Entonces,

$$L\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-st} g(t)dt.$$

5. Utilice la integración por partes para evaluar $\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-st} g(t)dt$. (Supongamos que $u = g(t)$ y $dv = e^{-st}dt$. Por cierto, observe que hemos definido $g(t)$, $du = f(t)dt$.)

Como es de esperar, debería ver que

$$L\{g(t)\} = \frac{1}{s}.\ L\{f(t)\}.$$

La integración en el ámbito del tiempo se simplifica a la división por s en el ámbito de la frecuencia.

SECCIÓN 3.7 EJERCICIOS

Evalúe las siguientes integrales. Si la integral no es convergente, responda "divergente"

347. $\int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$

348. $\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2}dx$

349. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

350. $\int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$

351. $\int_1^\infty xe^{-x}dx$

352. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1}dx$

353. Sin integrar, determine si la integral $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx$ converge o diverge comparando la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

354. Sin integrar, determine si la integral $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ converge o diverge.

Determine si las integrales impropias convergen o divergen. Si es posible, determine el valor de las integrales que convergen.

355. $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$

356. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

357. $\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

358. $\int_0^{1} \ln x \, dx$

359. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

360. $\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

361. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(1 + x)^2}$

362. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

363. $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx$

364. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

365. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

366. $\int_0^{2} \frac{dx}{x^3}$

367. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$

368. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

369. $\int_0^{3} \frac{1}{x-1} dx$

370. $\int_1^{\infty} \frac{5}{x^3} dx$

371. $\int_3^{5} \frac{5}{(x - 4)^2} dx$

Determine la convergencia de cada una de las siguientes integrales por comparación con la integral dada. Si la integral converge, halle el número al que converge.

372. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x}$; compare con $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

373. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}$; compare con $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Evalúe las integrales. Si la integral diverge, responda "diverge".

374. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^e}$

375. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^{\pi}}$

376. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$

377. $\int_0^{1} \frac{dx}{1 - x}$

378. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 1}$

379. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

380. $\int_0^{1} \frac{\ln x}{x} dx$

381. $\int_0^{e} \ln(x) dx$

382. $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

383. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2 + 1\right)^2} dx$

384. $\int_0^{\infty} e^x dx$

Evalúe las integrales impropias. Cada una de estas integrales tiene una discontinuidad infinita, ya sea en un punto final o en un punto interior del intervalo.

385. $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

386. $\displaystyle\int_{-27}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

387. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

388. $\displaystyle\int_6^{24} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-36}}$

389. $\displaystyle\int_0^4 x\ln(4x)dx$

390. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

391. Evalúe $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (¡Cuidado!) (Exprese su respuesta con tres decimales).

392. Evalúe $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. (Exprese la respuesta en forma exacta).

393. Evalúe $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$.

394. Halla el área de la región en el primer cuadrante entre la curva $y=e^{-6x}$ y el eje *x*.

395. Halle el área de la región delimitada por la curva $y=\frac{7}{x^2}$, el eje *x*, y a la izquierda por $x=1$.

396. Halle el área bajo la curva $y=\frac{1}{(x+1)^{3/2}}$, delimitada a la izquierda por $x=3$.

397. Halle el área bajo $y=\frac{5}{1+x^2}$ en el primer cuadrante.

398. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje *x* la región bajo la curva $y=\frac{3}{x}$ de $x=1$ a $x=\infty$.

399. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje *y* la región bajo la curva $y=6e^{-2x}$ en el primer cuadrante.

400. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje *x* el área bajo la curva $y=3e^{-x}$ en el primer cuadrante.

La transformada de Laplace de una función continua en el intervalo $[0,\infty)$ se define por $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ (vea el proyecto estudiantil). Esta definición se utiliza para resolver algunos problemas importantes de valor inicial en ecuaciones diferenciales, como se verá más adelante. El dominio de F es el conjunto de todos los números reales s tales que la integral impropia converge. Calcule la transformada de Laplace F de cada una de las siguientes funciones e indique el dominio de F.

401. $f(x)=1$

402. $f(x)=x$

403. $f(x)=\cos(2x)$ grandes.

404. $f(x)=e^{ax}$

405. Utilice la fórmula de la longitud de arco para demostrar que la circunferencia del círculo $x^2+y^2=1$ es 2π.

Una función no negativa es una función de densidad de probabilidad si satisface la siguiente definición $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$

La probabilidad de que una variable aleatoria x se encuentre entre a y b está dada por $P(a \le x \le b) = \int_a^b f(t)dt.$

406. Demuestre que $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 7e^{-7x} \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$ es una función de densidad de probabilidad.

407. Calcule la probabilidad de que *x* esté entre 0 y 0,3. (Utilice la función definida en el problema anterior). Utilice una exactitud de cuatro decimales.

Revisión del capítulo

Términos clave

descomposición en fracciones parciales técnica utilizada para descomponer una función racional en la suma de funciones racionales simples

error absoluto si B estimación de alguna cantidad que tiene un valor real de A, entonces el error absoluto está dado por $|A - B|$

error relativo error como porcentaje del valor absoluto, dado por $\left|\frac{A-B}{A}\right| = \left|\frac{A-B}{A}\right| . 100\ \%$

fórmula de reducción de potencias regla que permite intercambiar una integral de una potencia de una función trigonométrica por una integral que implique una potencia inferior

integración numérica variedad de métodos numéricos utilizados para estimar el valor de una integral definida, incluidas la regla del punto medio, la regla trapezoidal y la regla de Simpson

integración por partes técnica de integración que permite intercambiar una integral por otra mediante la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

integral impropia integral en un intervalo infinito o integral de una función que contiene una discontinuidad infinita en el intervalo; una integral impropia se define en términos de un límite. La integral impropia converge si este límite es un número real finito; en caso contrario, la integral impropia diverge

integral trigonométrica integral con potencias y productos de funciones trigonométricas

regla de Simpson regla que aproxima $\int_a^b f(x)\,dx$ utilizando las integrales de una función cuadrática a trozos. La aproximación S_n a $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left(\begin{array}{c} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) \\ + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \end{array}\right)$$

regla trapezoidal regla que aproxima $\int_a^b f(x)\,dx$ utilizando trapecios

regla del punto medio regla que utiliza una suma de Riemann de la forma $M_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$, donde m_i es el punto medio del *i*–ésimo subintervalo para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$

sistema de álgebra computacional (CAS) tecnología utilizada para realizar muchas tareas matemáticas, incluida la integración

sustitución trigonométrica una técnica de integración que convierte una integral algebraica que contiene expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, o $\sqrt{x^2 - a^2}$ en una integral trigonométrica

tabla de integración una tabla que enumera las fórmulas de integración

Ecuaciones clave

Fórmula de integración por partes	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
Integración por partes para integrales definidas	$\int_a^b u\,dv = uv\big\vert_a^b - \int_a^b v\,du$

Para integrar productos que implican $\text{sen}(ax)$, $\text{sen}(bx)$, $\cos(ax)$, y $\cos(bx)$, utilice las sustituciones.

Productos del seno	$\text{sen}(ax)\,\text{sen}(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)x) - \frac{1}{2}\cos((a+b)x)$
Productos del seno y coseno	$\text{sen}(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\text{sen}((a-b)x) + \frac{1}{2}\text{sen}((a+b)x)$
Productos del coseno	$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)x) + \frac{1}{2}\cos((a+b)x)$

Fórmula de reducción de potencias	$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-1} x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$
Fórmula de reducción de potencias	$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx$

Regla del punto medio	$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$
Regla trapezoidal	$T_n = \frac{1}{2}\Delta x\,(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$
Regla de Simpson	$S_n = \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$
Límite de error para la regla del punto medio	Error en $M_n \le \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$
Límite de error para la regla trapezoidal	Error en $T_n \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$
Límite de error para la regla de Simpson	Error en $S_n \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$

Integrales impropias	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

Conceptos clave

3.1 Integración por partes

- La fórmula de integración por partes permite cambiar una integral por otra, posiblemente más sencilla.
- La integración por partes se aplica tanto a las integrales definidas como a las indefinidas.

3.2 Integrales trigonométricas

- Las integrales de las funciones trigonométricas pueden evaluarse mediante el uso de varias estrategias. Estas estrategias incluyen
  1. Aplicar las identidades trigonométricas para reescribir la integral de manera que pueda ser evaluada mediante

sustitución en u
2. Utilizar la integración por partes
3. Aplicar las identidades trigonométricas para reescribir productos de senos y cosenos con diferentes argumentos como la suma de funciones individuales de senos y cosenos
4. Aplicar fórmulas de reducción

3.3 Sustitución trigonométrica

- Para integrales que implican $\sqrt{a^2 - x^2}$, utilice la sustitución $x = a\operatorname{sen}\theta$ y $dx = a\cos\theta d\theta$.
- Para integrales que implican $\sqrt{a^2 + x^2}$, utilice la sustitución $x = a\tan\theta$ y $dx = a\sec^2\theta d\theta$.
- Para integrales que implican $\sqrt{x^2 - a^2}$, sustituya $x = a\sec\theta$ y $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$.

3.4 Fracciones parciales

- La descomposición en fracciones parciales es una técnica que se utiliza para descomponer una función racional en una suma de funciones racionales simples que pueden integrarse utilizando técnicas previamente aprendidas.
- Al aplicar la descomposición en fracciones parciales, debemos asegurarnos de que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Si no es así, tenemos que realizar la división larga antes de intentar la descomposición en fracciones parciales.
- La forma que adopta la descomposición depende del tipo de factores en el denominador. Los tipos de factores incluyen factores lineales no repetidos, factores lineales repetidos, factores cuadráticos irreducibles no repetidos y factores cuadráticos irreducibles repetidos.

3.5 Otras estrategias de integración

- Se puede utilizar una tabla de integración para evaluar integrales indefinidas.
- Se puede utilizar un CAS (o sistema de álgebra computacional) para evaluar integrales indefinidas.
- Puede ser necesario un esfuerzo para conciliar las soluciones equivalentes obtenidas con métodos diferentes.

3.6 Integración numérica

- Podemos utilizar la integración numérica para estimar los valores de las integrales definidas cuando una forma cerrada de la integral es difícil de calcular o cuando solo se necesita un valor aproximado de la integral definida.
- Las técnicas más utilizadas para la integración numérica son la regla del punto medio, la regla trapezoidal y la regla de Simpson.
- La regla del punto medio aproxima la integral definida utilizando regiones rectangulares mientras que la regla trapezoidal aproxima la integral definida utilizando aproximaciones con trapecios.
- La regla de Simpson aproxima la integral definida aproximando primero la función original mediante funciones cuadráticas a trozos.

3.7 Integrales impropias

- Las integrales de funciones en intervalos infinitos se definen en términos de límites.
- Las integrales de funciones en un intervalo para el que la función tiene una discontinuidad en un punto final pueden definirse en términos de límites.
- La convergencia o divergencia de una integral impropia puede determinarse comparándola con el valor de una integral impropia cuya convergencia o divergencia se conoce.

Ejercicios de repaso

En los siguientes ejercicios, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

408. $\int e^x \operatorname{sen}(x)dx$ no puede integrarse por partes.

409. $\int \frac{1}{x^4 + 1}dx$ no se puede integrar utilizando fracciones parciales.

410. En la integración numérica, el aumento del número de puntos disminuye el error.

411. Con la integración por partes siempre se puede obtener la integral.

En los siguientes ejercicios, evalúe la integral utilizando el método especificado.

412. $\int x^2 \operatorname{sen}(4x)dx$ utilizando la integración por partes

413. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+16}}dx$ utilizando la sustitución trigonométrica

414. $\int \sqrt{x}\ln(x)dx$ utilizando la integración por partes

415. $\int \frac{3x}{x^3+2x^2-5x-6}dx$ utilizando fracciones parciales

416. $\int \frac{x^5}{\left(4x^2+4\right)^{5/2}}dx$ utilizando la sustitución trigonométrica

417. $\int \frac{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2(x)}}{\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)dx$ utilizando una tabla de integrales o un CAS

En los siguientes ejercicios, integre utilizando cualquier método que elija.

418. $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$

419. $\int x^3\sqrt{x^2+2}\,dx$

420. $\int \frac{3x^2+1}{x^4-2x^3-x^2+2x}dx$

421. $\int \frac{1}{x^4+4}dx$

422. $\int \frac{\sqrt{3+16x^4}}{x^4}dx$

En los siguientes ejercicios, aproxime las integrales utilizando la regla del punto medio, la regla trapezoidal y la regla de Simpson con cuatro subintervalos y redondeando a tres decimales.

423. **[T]** $\int_1^2 \sqrt{x^5+2}dx$

424. **[T]** $\int_0^{\sqrt{\pi}} e^{-\operatorname{sen}(x^2)}dx$

425. **[T]** $\int_1^4 \frac{\ln(1/x)}{x}dx$

En los siguientes ejercicios, evalúe las integrales, si es posible.

426. $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}dx$, ¿para qué valores de n esta integral converge o diverge?

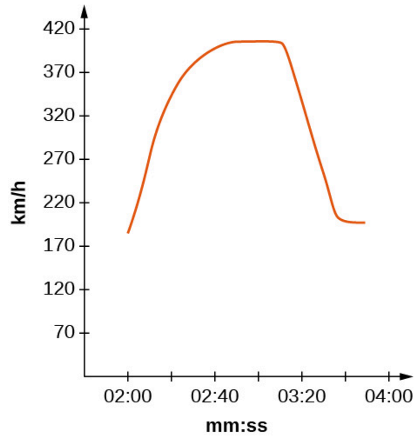
427. $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$

En los siguientes ejercicios, considere la función gamma dada por $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1}\, dy.$

428. Demuestre que $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$.

429. Amplíe para demostrar que $\Gamma(a) = (a-1)!$, asumiendo que a es un número entero positivo.

El automóvil más rápido del mundo, el Bugati Veyron, puede alcanzar una velocidad máxima de 408 km/h. El gráfico representa su velocidad.



430. **[T]** Utilice el gráfico para estimar la velocidad cada 20 segundos y ajústela a un gráfico de la forma $v(t) = a\exp^{bx}\operatorname{sen}(cx) + d$. (*Pista:* Considere las unidades de tiempo).

431. **[T]** Utilizando su función del problema anterior, calcule exactamente la distancia que recorrió el Bugati Veyron en los 1 min 40 s incluidos en el gráfico.

4 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES



Figura 4.1 El ciervo de cola blanca *(Odocoileus virginianus*) del este de Estados Unidos. Las ecuaciones diferenciales pueden utilizarse para estudiar las poblaciones de animales (créditos: modificación del trabajo de Rachel Kramer, Flickr).

Esquema del capítulo

Introducción

Muchos fenómenos del mundo real pueden modelarse matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales. El crecimiento de la población, el decaimiento radiactivo, los modelos de depredador-presa y los sistemas masa resorte son cuatro ejemplos de estos fenómenos. En este capítulo estudiamos algunas de estas aplicaciones.

Supongamos que queremos estudiar una población de ciervos a lo largo del tiempo y determinar el número total de animales en una zona determinada. Primero podemos observar la población durante un tiempo determinado, estimar el número total de ciervos y, a continuación, utilizar varias suposiciones para derivar un modelo matemático para diferentes escenarios. Algunos factores que se suelen tener en cuenta son el impacto ambiental, los valores umbrales de la población y los depredadores. En este capítulo veremos cómo se pueden utilizar las ecuaciones diferenciales para predecir poblaciones a lo largo del tiempo (vea el Ejemplo 4.14).

Otro objetivo de este capítulo es desarrollar técnicas de solución para diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. A medida que las ecuaciones se complican, las técnicas de solución también se complican, y de hecho se podría dedicar un curso entero al estudio de estas ecuaciones. En este capítulo estudiamos varios tipos de ecuaciones diferenciales y sus correspondientes métodos de solución.

4.1 Fundamentos de las ecuaciones diferenciales

Objetivos de aprendizaje

4.1.1 Identificar el orden de una ecuación diferencial.
4.1.2 Explicar qué se entiende por solución de una ecuación diferencial.
4.1.3 Distinguir entre la solución general y la solución particular de una ecuación diferencial.
4.1.4 Identificar un problema de valor inicial.
4.1.5 Identificar si una función dada es una solución de una ecuación diferencial o un problema de valor inicial.

El cálculo es la matemática del cambio, y las tasas de cambio se expresan mediante derivadas. Así, una de las formas más comunes de utilizar el cálculo es plantear una ecuación que contenga una función desconocida $y = f(x)$ y su derivada, conocida como *ecuación diferencial*. La resolución de estas ecuaciones suele proporcionar información sobre cómo cambian las cantidades y, con frecuencia, permite comprender cómo y por qué se producen los cambios.

Las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales pueden adoptar muchas formas diferentes, como la solución directa, el uso de gráficos o los cálculos por computadora. En este capítulo presentamos las ideas principales y las describimos con un poco más de detalle más adelante en el curso. En esta sección estudiamos qué son las ecuaciones diferenciales, cómo verificar sus soluciones, algunos métodos que se utilizan para resolverlas y algunos ejemplos de ecuaciones comunes y útiles.

Ecuaciones diferenciales generales

Considere la ecuación $y' = 3x^2$, que es un ejemplo de ecuación diferencial porque incluye una derivada. Existe una relación entre las variables x como y: y es una función desconocida de x. Además, el lado izquierdo de la ecuación es la derivada de y. Por lo tanto, podemos interpretar esta ecuación de la siguiente manera: Comience con alguna función $y = f(x)$ y tome su derivada. La respuesta debe ser igual a $3x^2$. ¿Qué función tiene una derivada que es igual a $3x^2$? Una de estas funciones es $y = x^3$, por lo que esta función se considera una **solución a una ecuación diferencial**.

Definición

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que implica una función desconocida $y = f(x)$ y una o varias de sus derivadas. Una solución de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial cuando f y sus derivadas se sustituyen en la ecuación.

MEDIOS

Visite este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_Differential) para saber más sobre este tema.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales y sus soluciones aparecen en la Tabla 4.1.

Ecuación	Solución
$y' = 2x$	$y = x^2$
$y' + 3y = 6x + 11$	$y = e^{-3x} + 2x + 3$
$y'' - 3y' + 2y = 24e^{-2x}$	$y = 3e^x - 4e^{2x} + 2e^{-2x}$

Tabla 4.1 Ejemplos de ecuaciones diferenciales y sus soluciones

Observe que una solución de una ecuación diferencial no es necesariamente única, principalmente porque la derivada de una constante es cero. Por ejemplo, $y = x^2 + 4$ es también una solución de la primera ecuación diferencial en la Tabla 4.1. Volveremos a esta idea un poco más adelante en esta sección. Por ahora, vamos a centrarnos en lo que significa que una función sea una solución de una ecuación diferencial.

EJEMPLO 4.1

Verificación de soluciones de ecuaciones diferenciales

Verifique que la función $y = e^{-3x} + 2x + 3$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 3y = 6x + 11$.

Solución

Para verificar la solución, primero calculamos y' utilizando la regla de la cadena para las derivadas. Esto da $y' = -3e^{-3x} + 2$. A continuación sustituimos y y y' en el lado izquierdo de la ecuación diferencial:

$$(-3e^{-3x} + 2) + 3(e^{-3x} + 2x + 3).$$

La expresión resultante puede simplificarse distribuyendo primero para eliminar los paréntesis, dando

$$-3e^{-3x} + 2 + 3e^{-3x} + 6x + 9.$$

Combinando términos semejantes se obtiene la expresión $6x + 11$, que es igual al lado derecho de la ecuación diferencial. Este resultado verifica que $y = e^{-3x} + 2x + 3$ es una solución de la ecuación diferencial.

4.1 Verifique que $y = 2e^{3x} - 2x - 2$ es una solución de la ecuación diferencial $y' - 3y = 6x + 4$.

Es conveniente definir características de las ecuaciones diferenciales que faciliten hablar de ellas y clasificarlas. La característica más básica de una ecuación diferencial es su orden.

Definición

El **orden de una ecuación diferencial** es el mayor orden de cualquier derivada de la función desconocida que aparece en la ecuación.

EJEMPLO 4.2

Identificación del orden de una ecuación diferencial

¿Cuál es el orden de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales?

a. $y' - 4y = x^2 - 3x + 4$
b. $x^2y''' - 3xy'' + xy' - 3y = \operatorname{sen} x$
c. $\frac{4}{x}y^{(4)} - \frac{6}{x^2}y'' + \frac{12}{x^4}y = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

Solución

a. La derivada más alta de la ecuación es y', por lo que el orden es 1.
b. La derivada más alta de la ecuación es y''', por lo que el orden es 3.
c. La derivada más alta de la ecuación es $y^{(4)}$, por lo que el orden es 4.

4.2 ¿Cuál es el orden de la siguiente ecuación diferencial?

$$\left(x^4 - 3x\right) y^{(5)} - \left(3x^2 + 1\right) y' + 3y = \operatorname{sen} x \cos x$$

Soluciones generales y particulares

Ya hemos señalado que la ecuación diferencial $y' = 2x$ tiene al menos dos soluciones: $y = x^2$ y $y = x^2 + 4$. La única diferencia entre estas dos soluciones es el último término, que es una constante. ¿Y si el último término es una constante diferente? ¿Esta expresión seguirá siendo una solución de la ecuación diferencial? De hecho, cualquier función de la forma $y = x^2 + C$, donde C representa cualquier constante, es también una solución. La razón es que la derivada de $x^2 + C$ es $2x$, independientemente del valor de C. Se puede demostrar que cualquier solución de esta ecuación diferencial debe ser de la forma $y = x^2 + C$. Este es un ejemplo de **solución general** de una ecuación diferencial. Un gráfico de algunas de estas soluciones se ofrece en la Figura 4.2. (*Nota*: En este gráfico hemos utilizado valores enteros pares para C, que oscila entre -4 y 4. De hecho, no hay ninguna restricción en el valor de C; puede ser un número

entero o no).

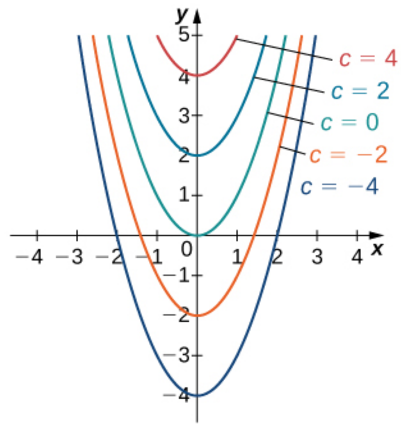


Figura 4.2 Familia de soluciones de la ecuación diferencial $y' = 2x$.

En este ejemplo, somos libres de elegir cualquier solución que deseemos; por ejemplo, $y = x^2 - 3$ es un miembro de la familia de soluciones de esta ecuación diferencial. Esto se llama una **solución particular** de la ecuación diferencial. A menudo se puede identificar una solución concreta de forma exclusiva si se nos da información adicional sobre el problema.

EJEMPLO 4.3

Hallar una solución particular

Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y' = 2x$ que pasa por el punto $(2, 7)$.

Solución

Cualquier función de la forma $y = x^2 + C$ es una solución de esta ecuación diferencial. Para determinar el valor de C, sustituimos los valores $x = 2$ y $y = 7$ en esta ecuación y resolvemos para C:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + C \\ 7 &= 2^2 + C = 4 + C \\ C &= 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución particular que pasa por el punto $(2, 7)$ es $y = x^2 + 3$.

4.3 Halle la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = 4x + 3$$

que pasa por el punto $(1, 7)$, dado que $y = 2x^2 + 3x + C$ es una solución general de la ecuación diferencial.

Problemas de valor inicial

Normalmente, una ecuación diferencial dada tiene un número infinito de soluciones, por lo que es natural preguntarse cuál queremos utilizar. Para elegir una solución, se necesita más información. Una información específica que puede ser útil es un **valor inicial**, que es un par ordenado que se utiliza para hallar una solución particular.

Una ecuación diferencial con uno o varios valores iniciales se denomina **problema de valor inicial**. La regla general es que el número de valores iniciales necesarios para un problema de valor inicial es igual al orden de la ecuación diferencial. Por ejemplo, si tenemos la ecuación diferencial $y' = 2x$, entonces $y(3) = 7$ es un valor inicial, y cuando se toman juntas, estas ecuaciones forman un problema de valor inicial. La ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 4e^x$ es de segundo orden, por lo que necesitamos dos valores iniciales. En los problemas de valor inicial de orden superior a uno, se debe utilizar el mismo valor para la variable independiente. Un ejemplo de valores iniciales para esta ecuación de segundo orden sería $y(0) = 2$ y $y'(0) = -1$. Estos dos valores iniciales junto con la ecuación diferencial forman un

problema de valor inicial. Estos problemas se llaman así porque a menudo la variable independiente de la función desconocida es t, que representa el tiempo. Así, un valor de $t = 0$ representa el principio del problema.

EJEMPLO 4.4

Verificación de la solución de un problema de valor inicial

Verifique que la función $y = 2e^{-2t} + e^t$ es una solución al problema de valor inicial

$$y' + 2y = 3e^t, \quad y(0) = 3.$$

Solución

Para que una función satisfaga un problema de valor inicial, debe satisfacer tanto la ecuación diferencial como la condición inicial. Para demostrar que y satisface la ecuación diferencial, empezamos por calcular y'. Esto da como resultado $y' = -4e^{-2t} + e^t$. A continuación sustituimos ambas y y y' en el lado izquierdo de la ecuación diferencial y simplificamos:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= \left(-4e^{-2t} + e^t\right) + 2\left(2e^{-2t} + e^t\right) \\ &= -4e^{-2t} + e^t + 4e^{-2t} + 2e^t \\ &= 3e^t. \end{aligned}$$

Esto es igual al lado derecho de la ecuación diferencial, por lo que $y = 2e^{-2t} + e^t$ resuelve la ecuación diferencial. A continuación calculamos $y(0)$:

$$\begin{aligned} y(0) &= 2e^{-2(0)} + e^0 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Este resultado verifica el valor inicial. Por lo tanto, la función dada satisface el problema de valor inicial.

4.4 Verifique que $y = 3e^{2t} + 4\,\text{sen}\,t$ es una solución al problema de valor inicial

$$y' - 2y = 4\cos t - 8\,\text{sen}\,t, \quad y(0) = 3.$$

En el Ejemplo 4.4, el problema de valor inicial constaba de dos partes. La primera parte era la ecuación diferencial $y' + 2y = 3e^x$, y la segunda parte era el valor inicial $y(0) = 3$. Estas dos ecuaciones forman en conjunto el problema de valor inicial.

Lo mismo ocurre en general. Un problema de valor inicial constará de dos partes: la ecuación diferencial y la condición inicial. La ecuación diferencial tiene una familia de soluciones, y la condición inicial determina el valor de C. La familia de soluciones de la ecuación diferencial en el Ejemplo 4.4 está dada por $y = 2e^{-2t} + Ce^t$. Esta familia de soluciones se muestra en la Figura 4.3, con la solución particular $y = 2e^{-2t} + e^t$ marcada.

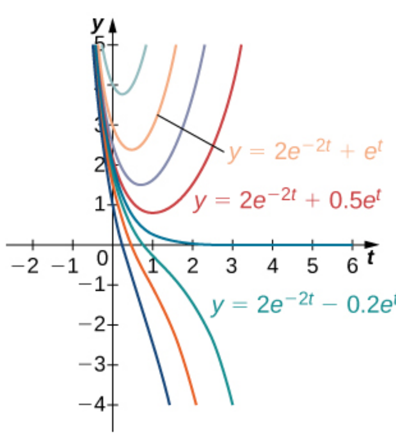


Figura 4.3 Una familia de soluciones de la ecuación diferencial $y' + 2y = 3e^t$. La solución particular $y = 2e^{-2t} + e^t$ está marcada.

EJEMPLO 4.5

Resolución de un problema de valor inicial

Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = 3e^x + x^2 - 4, \quad y(0) = 5.$$

Solución

El primer paso para resolver este problema de valor inicial es hallar una familia general de soluciones. Para ello, calculamos una antiderivada de ambos lados de la ecuación diferencial

$$\int y'\, dx = \int \left(3e^x + x^2 - 4\right) dx,$$

es decir,

$$y + C_1 = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + C_2. \qquad (4.1)$$

Podemos integrar ambos lados porque el término y aparece solo. Observe que hay dos constantes de integración C_1 y C_2. Resolviendo la Ecuación 4.1 para y da

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + C_2 - C_1.$$

Debido a que C_1 y C_2 son ambas constantes, $C_2 - C_1$ también es una constante. Por lo tanto, podemos definir $C = C_2 - C_1$, lo que lleva a la ecuación

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + C.$$

A continuación, determinamos el valor de C. Para ello, sustituimos $x = 0$ y $y = 5$ en la Ecuación 4.1 y resolvemos para C:

$$\begin{aligned} 5 &= 3e^0 + \tfrac{1}{3}0^3 - 4(0) + C \\ 5 &= 3 + C \\ C &= 2. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos el valor $C = 2$ en la Ecuación 4.1. La solución del problema de valor inicial es $y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$.

Análisis

La diferencia entre una solución general y una solución particular es que una solución general implica una familia de funciones, definidas explícita o implícitamente, de la variable independiente. El valor o los valores iniciales determinan qué solución concreta de la familia de soluciones satisface las condiciones deseadas.

4.5 Resuelva el problema de valor inicial

$$y' = x^2 - 4x + 3 - 6e^x, \quad y(0) = 8.$$

En las aplicaciones de la física y la ingeniería, a menudo consideramos las fuerzas que actúan sobre un objeto y utilizamos esta información para comprender el movimiento resultante que puede producirse. Por ejemplo, si empezamos con un objeto en la superficie de la Tierra, la fuerza principal que actúa sobre ese objeto es la gravedad. Los físicos e ingenieros pueden utilizar esta información, junto con la segunda ley del movimiento de Newton (en forma de ecuación $F = ma$, donde F representa la fuerza, m representa la masa y a representa la aceleración), para derivar una ecuación que se pueda resolver.

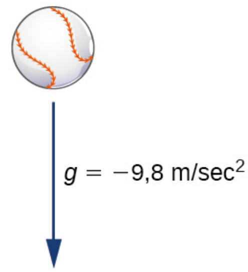


Figura 4.4 Para una pelota de béisbol que cae en el aire, la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad (sin tener en cuenta la resistencia del aire).

En la Figura 4.4 asumimos que la única fuerza que actúa sobre una pelota de béisbol es la fuerza de la gravedad. Esta suposición ignora la resistencia del aire (la fuerza debido a la resistencia del aire se considera en una discusión posterior). La aceleración debido a la gravedad en la superficie de la Tierra, g, es, aproximadamente, $9{,}8\text{ m/s}^2$. Introducimos un marco de referencia, donde la superficie de la Tierra está a una altura de 0 metros. Supongamos que $v(t)$ representa la velocidad del objeto en metros por segundo. Si $v(t) > 0$, la pelota está subiendo, y si $v(t) < 0$, la pelota está cayendo (Figura 4.5).

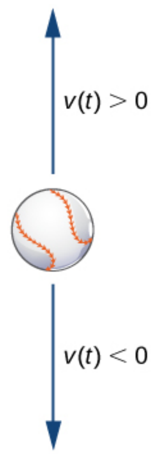


Figura 4.5 Posibles velocidades de la pelota de béisbol que sube/baja.

Nuestro objetivo es resolver la velocidad $v(t)$ en cualquier tiempo t. Para ello, planteamos un problema de valor inicial. Supongamos que la masa de la pelota es m, donde m se mide en kilogramos. Utilizamos la segunda ley de Newton, que establece que la fuerza que actúa sobre un objeto es igual a su masa por su aceleración ($F = ma$). La aceleración es la derivada de la velocidad, por lo que $a(t) = v'(t)$. Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la pelota de béisbol está dada por $F = m\,v'(t)$. Sin embargo, esta fuerza debe ser igual a la fuerza de gravedad que actúa sobre el objeto, que (de nuevo utilizando la segunda ley de Newton) está dada por $F_g = -mg$, ya que esta fuerza actúa en sentido descendente. Por lo tanto, obtenemos la ecuación $F = F_g$, que se convierte en $m\,v'(t) = -mg$. Dividiendo ambos lados de la ecuación entre m da la ecuación

$$v'(t) = -g.$$

Observe que esta ecuación diferencial sigue siendo la misma independientemente de la masa del objeto.

Ahora necesitamos un valor inicial. Como estamos resolviendo la velocidad, tiene sentido en el contexto del problema asumir que conocemos la **velocidad inicial**, o la velocidad en el momento $t = 0$. Esto se denota como $v(0) = v_0$.

EJEMPLO 4.6

Velocidad de una pelota de béisbol en movimiento

Una pelota de béisbol se lanza hacia arriba desde una altura de 3 metros sobre la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 10 m/s, y la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. La pelota tiene una masa de $0{,}15\text{ kg}$ en la superficie de la Tierra.

a. Calcule la velocidad $v(t)$ de la pelota de béisbol en el momento t.
b. ¿Cuál es su velocidad después de 2 segundos?

Solución

a. A partir de la discusión anterior, la ecuación diferencial que se aplica en esta situación es

$$v'(t) = -g,$$

donde $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. La condición inicial es $v(0) = v_0$, donde $v_0 = 10\ \text{m/s}$. Por lo tanto, el problema de valor inicial es $v'(t) = -9{,}8\ \text{m/s}^2$, $v(0) = 10\ \text{m/s}$.
El primer paso para resolver este problema de valor inicial es tomar la antiderivada de ambos lados de la ecuación diferencial. Esto da

$$\begin{aligned} \int v'(t)\,dt &= \int -9{,}8dt \\ v(t) &= -9{,}8t + C. \end{aligned}$$

El siguiente paso es resolver para C. Para ello, sustituya $t = 0$ y $v(0) = 10$:

$$\begin{aligned} v(t) &= -9{,}8t + C \\ v(0) &= -9{,}8\,(0) + C \\ 10 &= C. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C = 10$ y la función de la velocidad está dada por $v(t) = -9{,}8t + 10$.

b. Para calcular la velocidad después de 2 segundos, sustituya $t = 2$ en $v(t)$.

$$\begin{aligned} v(t) &= -9{,}8t + 10 \\ v(2) &= -9{,}8\,(2) + 10 \\ v\,(2) &= -9{,}6. \end{aligned}$$

Las unidades de velocidad son metros por segundo. Como la respuesta es negativa, el objeto está cayendo a una velocidad de $9{,}6\ \text{m/s}$.

4.6 Supongamos que una roca cae en reposo desde una altura de 100 metros y la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. Halle una ecuación para la velocidad $v(t)$ en función del tiempo, medida en metros por segundo.

Una pregunta natural que se hace después de resolver este tipo de problemas es a qué altura estará el objeto sobre la superficie de la Tierra en un momento determinado. Supongamos que $s(t)$ denota la altura sobre la superficie terrestre del objeto, medida en metros. Como la velocidad es la derivada de la posición (en este caso la altura), esta suposición da la ecuación $s'(t) = v(t)$. Es necesario un valor inicial; en este caso funciona bien la altura inicial del objeto. Supongamos que la altura inicial sea dada por la ecuación $s(0) = s_0$. En conjunto, estas suposiciones dan el problema de valor inicial

$$s'(t) = v(t), \quad s(0) = s_0.$$

Si se conoce la función de velocidad, entonces es posible resolver también la función de posición.

EJEMPLO 4.7

Altura de una pelota de béisbol en movimiento

Una pelota de béisbol se lanza hacia arriba desde una altura de 3 metros sobre la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de $10\ \text{m/s}$, y la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. La pelota tiene una masa de $0{,}15$ kilos en la superficie de la Tierra.

a. Halle la posición $s(t)$ de la pelota de béisbol en el momento t.
b. ¿Cuál es su altura después de 2 segundos?

Solución

a. Ya sabemos que la función de velocidad para este problema es $v(t) = -9{,}8t + 10$. La altura inicial de la pelota de béisbol es 3 metros, así que $s_0 = 3$. Por lo tanto, el problema de valor inicial para este ejemplo es
Para resolver el problema de valor inicial, primero calculamos las antiderivadas

$$\begin{aligned}\int s'(t)\,dt &= \int -9{,}8t + 10dt \\ s(t) &= -4{,}9t^2 + 10t + C.\end{aligned}$$

A continuación sustituimos $t = 0$ y resolvemos para C:

$$\begin{aligned}s(t) &= -4{,}9t^2 + 10t + C \\ s(0) &= -4{,}9(0)^2 + 10(0) + C \\ 3 &= C.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de posición es $s(t) = -4{,}9t^2 + 10t + 3$.

b. La altura de la pelota de béisbol después de 2 s está dado por $s(2)$:

$$\begin{aligned}s(2) &= -4{,}9(2)^2 + 10(2) + 3 \\ &= -4{,}9(4) + 23 \\ &= 3{,}4.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la pelota de béisbol está a $3{,}4$ metros sobre la superficie de la Tierra después de 2 segundos. Cabe destacar que la masa de la pelota se anula completamente en el proceso de resolución del problema.

SECCIÓN 4.1 EJERCICIOS

Determine el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y' + y = 3y^2$

2. $(y')^2 = y' + 2y$

3. $y''' + y''y' = 3x^2$

4. $y' = y'' + 3t^2$

5. $\frac{dy}{dt} = t$

6. $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x^4$

7. $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 8\frac{dy}{dt} + 3y = 4t$

Verifique que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial dada.

8. $y = \frac{x^3}{3}$ resuelve $y' = x^2$

9. $y = 2e^{-x} + x - 1$ resuelve $y' = x - y$

10. $y = e^{3x} - \frac{e^x}{2}$ resuelve $y' = 3y + e^x$

11. $y = \frac{1}{1-x}$ resuelve $y' = y^2$

12. $y = e^{x^2/2}$ resuelve $y' = xy$

13. $y = 4 + \ln x$ resuelve $xy' = 1$

14. $y = 3 - x + x\ln x$ resuelve $y' = \ln x$

15. $y = 2e^x - x - 1$ resuelve $y' = y + x$

16. $y = e^x + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\cos x}{2}$ resuelve $y' = \cos x + y$

17. $y = \pi e^{-\cos x}$ resuelve $y' = y \operatorname{sen} x$

Verifique las siguientes soluciones generales y halle la solución particular.

18. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y' = 4x^2$ que pasa por $(-3, -30)$, dado que $y = C + \frac{4x^3}{3}$ es una solución general.

19. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y' = 3x^3$ que pasa por $(1, 4{,}75)$, dado que $y = C + \frac{3x^4}{4}$ es una solución general.

20. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y' = 3x^2 y$ que pasa por $(0, 12)$, dado que $y = Ce^{x^3}$ es una solución general.

21. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y' = 2xy$ que pasa por $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, dado que $y = Ce^{x^2}$ es una solución general.

22. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y' = (2xy)^2$ que pasa por $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, dado que $y = -\frac{3}{C+4x^3}$ es una solución general.

23. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y' x^2 = y$ que pasa por $\left(1, \frac{2}{e}\right)$, dado que $y = Ce^{-1/x}$ es una solución general.

24. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $8\frac{dx}{dt} = -2\cos(2t) - \cos(4t)$ que pasa por (π, π), dado que $x = C - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4t)$ es una solución general.

25. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $\frac{du}{dt} = \tan u$ que pasa por $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, dado que $u = \operatorname{sen}^{-1}\left(e^{C+t}\right)$ es una solución general.

26. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = e^{(t+y)}$ que pasa por $(1, 0)$, dado que $y = -\ln(C - e^t)$ es una solución general.

27. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y'(1 - x^2) = 1 + y$ que pasa por $(0, -2)$, dado que $y = C\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} - 1$ es una solución general.

Para los siguientes problemas, halle la solución general de la ecuación diferencial.

28. $y' = 3x + e^x$

29. $y' = \ln x + \tan x$

30. $y' = \operatorname{sen} x e^{\cos x}$

31. $y' = 4^x$

32. $y' = \operatorname{sen}^{-1}(2x)$ grandes.

33. $y' = 2t\sqrt{t^2 + 16}$

34. $x' = \coth t + \ln t + 3t^2$

35. $x' = t\sqrt{4 + t}$

36. $y' = y$

37. $y' = \frac{y}{x}$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial con la condición inicial $y(0) = 1$ y $y(0) = -1$. Dibuje ambas soluciones en el mismo gráfico.

38. $\frac{dy}{dt} = 2t$

39. $\frac{dy}{dt} = -t$

40. $\frac{dy}{dt} = 2y$

41. $\frac{dy}{dt} = -y$

42. $\frac{dy}{dt} = 2$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial con la condición inicial $y_0 = 10$. ¿En qué tiempo y aumenta a 100 o baja a 1?

43. $\frac{dy}{dt} = 4t$

44. $\frac{dy}{dt} = 4y$

45. $\frac{dy}{dt} = -2y$

46. $\frac{dy}{dt} = e^{4t}$

47. $\frac{dy}{dt} = e^{-4t}$

Recuerde que una familia de soluciones incluye soluciones de una ecuación diferencial que difieren en una constante. Para los siguientes problemas, utilice su calculadora para graficar una familia de soluciones de la ecuación diferencial dada. Utilice las condiciones iniciales de $y(t = 0) = -10$ a $y(t = 0) = 10$ aumentando en 2. ¿Hay algún punto crítico en el que el comportamiento de la solución empiece a cambiar?

48. **[T]** $y' = y(x)$

49. **[T]** $xy' = y$

50. **[T]** $y' = t^3$

51. **[T]** $y' = x + y$ (*Pista:* $y = Ce^x - x - 1$ es la solución general)

52. **[T]** $y' = x \ln x + \operatorname{sen} x$

53. Halle la solución general para describir la velocidad de una pelota de masa 1 lb que se lanza hacia arriba a una velocidad a ft/s.

54. En el problema anterior, si la velocidad inicial de la pelota lanzada al aire es $a = 25$ ft/s, escriba la solución particular de la velocidad de la pelota. Resuelva para calcular el momento en que la pelota toca el suelo.

55. Se lanzan dos objetos con masas diferentes m_1 y m_2 hacia arriba en el aire con la misma velocidad inicial a ft/s. ¿Cuál es la diferencia en su velocidad después de 1 segundo?

56. **[T]** Se lanza una pelota de masa 1 kilogramo hacia arriba con una velocidad de $a = 25$ m/s en Marte, donde la fuerza de gravedad es $g = -3{,}711$ m/s^2. Utilice su calculadora para aproximar cuánto tiempo más está la pelota en el aire en Marte a comparación de en la Tierra, donde $.g =-9.8 m/s^2$.

57. **[T]** Para el problema anterior, utilice su calculadora para aproximar cuánto más subió la pelota en Marte, donde $g =-9.8 m/s^2$.

58. **[T]** Un automóvil en la autopista acelera según $a = 15\cos(\pi t)$, donde t se mide en horas. Plantee y resuelva la ecuación diferencial para determinar la velocidad del automóvil si tiene una velocidad inicial de 51 mph. Después de 40 minutos de conducción, ¿cuál es la velocidad del conductor?

59. **[T]** Para el automóvil del problema anterior, halle la expresión de la distancia que ha recorrido el automóvil en el tiempo t, suponiendo una distancia inicial de 0. ¿Cuánto tiempo tarda el automóvil en recorrer 100 millas? Redondee su respuesta a horas y minutos.

60. **[T]** Para el problema anterior, calcule la distancia total recorrida en la primera hora.

61. Sustituya $y = Be^{3t}$ en $y' - y = 8e^{3t}$ para hallar una solución particular.

62. Sustituya $y = a\cos(2t) + b\operatorname{sen}(2t)$ en $y' + y = 4\operatorname{sen}(2t)$ para hallar una solución particular.

63. Sustituya $y = a + bt + ct^2$ en $y' + y = 1 + t^2$ para hallar una solución particular.

64. Sustituya $y = ae^t \cos t + be^t \operatorname{sen} t$ en $y' = 2e^t \cos t$ para hallar una solución particular.

65. Resuelva $y' = e^{kt}$ con la condición inicial $y(0) = 0$ y resuelva $y' = 1$ con la misma condición inicial. A medida que k se acerca a 0, ¿qué observa?

4.2 Campos de direcciones y métodos numéricos

Objetivos de aprendizaje

4.2.1 Dibujar el campo de direcciones para una ecuación diferencial de primer orden dada.
4.2.2 Utilizar un campo de direcciones para dibujar una curva de solución de una ecuación diferencial de primer orden.
4.2.3 Utilizar el método de Euler para aproximar la solución de una ecuación diferencial de primer orden.

En el resto de este capítulo nos centraremos en diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales y analizar el comportamiento de las soluciones. En algunos casos es posible predecir las propiedades de una solución de una ecuación diferencial sin conocer la solución real. También estudiaremos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales, que pueden programarse utilizando diversos lenguajes informáticos o incluso utilizando un programa de hoja de cálculo, como Microsoft Excel.

Creación de campos de direcciones

Los campos de direcciones (también llamados campos de pendiente) son útiles para investigar las ecuaciones diferenciales de primer orden. En particular, consideramos una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = f(x, y).$$

Un ejemplo aplicado de este tipo de ecuación diferencial aparece en la ley de enfriamiento de Newton, que resolveremos explícitamente más adelante en este capítulo. Primero, sin embargo, vamos a crear un campo de direcciones para la ecuación diferencial

$$T'(t) = -0{,}4(T - 72).$$

Aquí $T(t)$ representa la temperatura (en grados Fahrenheit) de un objeto en el tiempo t, y la temperatura ambiente es $72\ °\text{F}$. La Figura 4.6 muestra el campo de direcciones para esta ecuación.

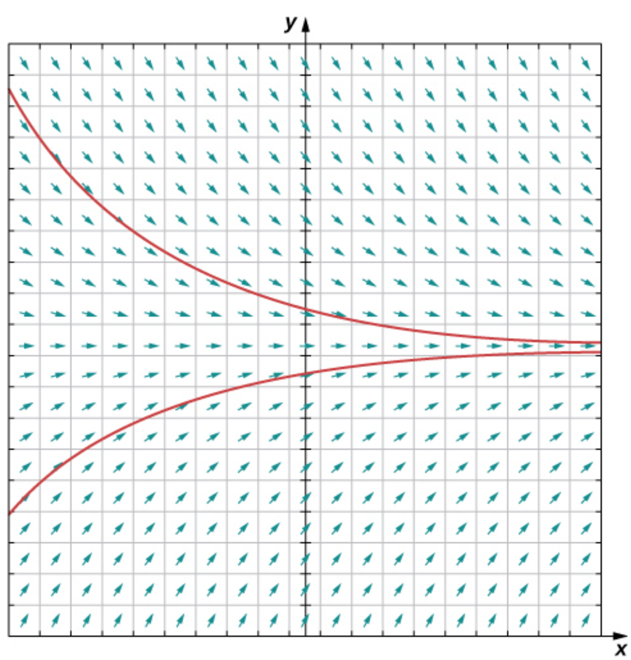


Figura 4.6 Campo de direcciones para la ecuación diferencial $T'(t) = -0{,}4(T - 72)$. Se representan dos soluciones: una con temperatura inicial inferior a $72\ °\text{F}$ y la otra con temperatura inicial superior a $72\ °\text{F}$.

La idea de un campo de direcciones es el hecho de que la derivada de una función evaluada en un punto determinado es la pendiente de la línea tangente al gráfico de esa función en el mismo punto. Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales para las que podemos crear un campo de direcciones son

$$y' = 3x + 2y - 4$$
$$y' = x^2 - y^2$$
$$y' = \frac{2x+4}{y-2}.$$

Para crear un campo de dirección, empezamos con la primera ecuación: $y' = 3x + 2y - 4$. Suponemos que (x_0, y_0) es cualquier par ordenado, y sustituimos estos números en el lado derecho de la ecuación diferencial. Por ejemplo, si elegimos $x = 1$ y $y = 2$, sustituyendo en el lado derecho de la ecuación diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} y' &= 3x + 2y - 4 \\ &= 3(1) + 2(2) - 4 = 3. \end{aligned}$$

Esto nos dice que si una solución de la ecuación diferencial $y' = 3x + 2y - 4$ pasa por el punto $(1, 2)$, entonces la pendiente de la solución en ese punto debe ser igual a 3. Para empezar a crear el campo de direcciones, ponemos un segmento de línea corto en el punto $(1, 2)$ con pendiente 3. Podemos hacer esto para cualquier punto del dominio de la función $f(x, y) = 3x + 2y - 4$, que consiste en todos los pares ordenados (x, y) en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, cualquier punto del plano cartesiano tiene asociada una pendiente, suponiendo que por ese punto pasa una solución de la ecuación diferencial. El campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = 3x + 2y - 4$ se muestra en la Figura 4.7.

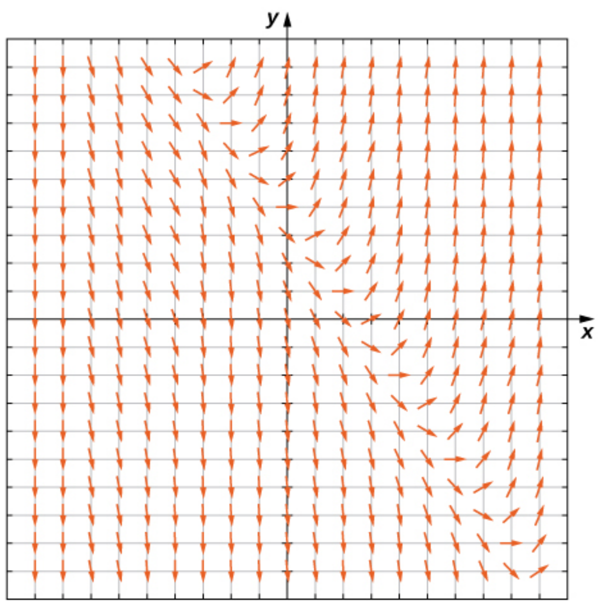


Figura 4.7 Campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = 3x + 2y - 4$.

Podemos generar un campo de direcciones de este tipo para cualquier ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$.

Definición

Un **campo de direcciones (campo de pendiente)** es un objeto matemático utilizado para representar gráficamente las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden. En cada punto de un campo de direcciones aparece un segmento de línea cuya pendiente es igual a la de la solución de la ecuación diferencial que pasa por ese punto.

Uso de los campos de direcciones

Podemos utilizar un campo de direcciones para predecir el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial sin conocer la solución real. Por ejemplo, el campo de direcciones en la Figura 4.7 sirve de guía para el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = 3x + 2y - 4$.

Para utilizar un campo de direcciones, empezamos eligiendo cualquier punto del campo. El segmento de línea en ese punto sirve como señal que nos indica la dirección que debemos tomar a partir de ahí. Por ejemplo, si una solución de la

ecuación diferencial pasa por el punto $(0, 1)$, entonces la pendiente de la solución que pasa por ese punto viene dada por $y' = 3(0) + 2(1) - 4 = -2$. Ahora supongamos que x aumenta ligeramente, digamos que a $x = 0{,}1$. Utilizando el método de aproximaciones lineales se obtiene una fórmula para el valor aproximado de y para $x = 0{,}1$. En particular,

$$\begin{aligned} L(x) &= y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 1 - 2(x - 0) \\ &= 1 - 2x. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 0{,}1$ en $L(x)$ da un valor y aproximado de $0{,}8$.

En este punto la pendiente de la solución cambia (de nuevo según la ecuación diferencial). Podemos seguir avanzando, recalculando la pendiente de la solución a medida que damos pequeños pasos hacia la derecha, y observando el comportamiento de la solución. La Figura 4.8 muestra un gráfico de la solución que pasa por el punto $(0, 1)$.

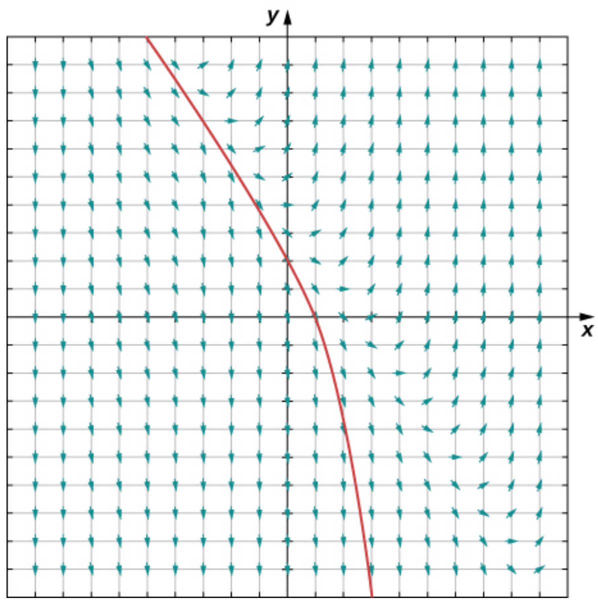


Figura 4.8 Campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = 3x + 2y - 4$ con la solución que pasa por el punto $(0, 1)$.

La curva es el gráfico de la solución del problema de valor inicial

$$y' = 3x + 2y - 4, \quad y(0) = 1.$$

Esta curva se denomina **curva solución** que pasa por el punto $(0, 1)$. La solución exacta de este problema de valor inicial es

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}e^{2x},$$

y el gráfico de esta solución es idéntico a la curva en la Figura 4.8.

4.7 Cree un campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$ y dibuje una curva solución que pase por el punto $(-1, 2)$.

MEDIOS

Vaya a este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_SlopeFields) para ver más sobre los campos de pendiente.

Consideremos ahora el campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = (x - 3)(y^2 - 4)$, se muestra en la Figura 4.9. Este campo de direcciones tiene varias propiedades interesantes. En primer lugar, en $y = -2$ y $y = 2$, aparecen guiones horizontales en todo el gráfico. Esto significa que si $y = -2$, entonces $y' = 0$. Sustituyendo esta expresión en el lado derecho de la ecuación diferencial se obtiene

$$\begin{aligned}(x-3)(y^2-4) &= (x-3)((-2)^2-4)\\ &= (x-3)(0)\\ &= 0\\ &= y'.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = -2$ es una solución de la ecuación diferencial. De la misma manera, $y = 2$ es una solución de la ecuación diferencial. Estas son las únicas soluciones de valor constante de la ecuación diferencial, como podemos ver en el siguiente argumento. Supongamos que $y = k$ es una solución constante de la ecuación diferencial. Entonces $y' = 0$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial se obtiene $0 = (x-3)\left(k^2-4\right)$. Esta ecuación debe ser cierta para todos los valores de x, por lo que el segundo factor debe ser igual a cero. Este resultado produce la ecuación $k^2 - 4 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $k = -2$ y $k = 2$, que son las soluciones constantes ya mencionadas. Estas son las llamadas soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial.

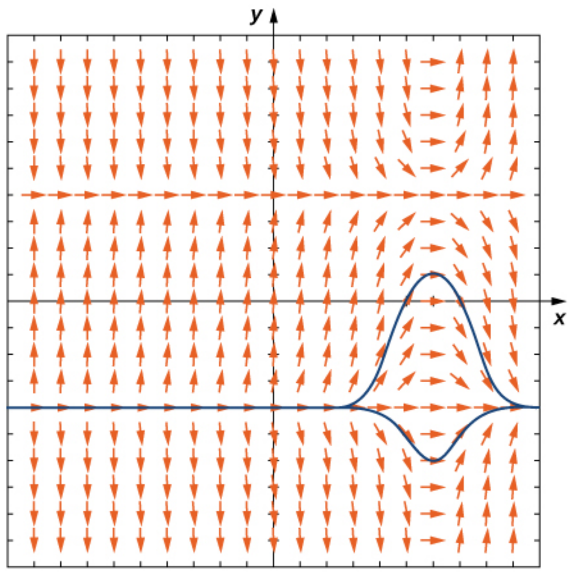


Figura 4.9 Campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = (x-3)(y^2-4)$ mostrando dos soluciones. Estas soluciones están muy próximas, pero una de ellas está apenas por encima de la solución de equilibrio $x = -2$ y la otra está apenas por debajo de la misma solución de equilibrio.

Definición

Consideremos la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Una **solución de equilibrio** es cualquier solución de la ecuación diferencial de la forma $y = c$, donde c es una constante.

Para determinar las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, iguale el lado derecho a cero. Una solución de equilibrio de la ecuación diferencial es cualquier función de la forma $y = k$ tal que $f(x, k) = 0$ para todos los valores de x en el dominio de f.

Una característica importante de las soluciones de equilibrio es si se acercan o no a la línea $y = k$ como asíntota para valores grandes de x.

Definición

Consideremos la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, y supongamos que todas las soluciones de esta ecuación diferencial están definidas para $x \geq x_0$. Supongamos que $y = k$ sea una solución de equilibrio de la ecuación diferencial.

1. $y = k$ es una **solución asintóticamente estable** de la ecuación diferencial si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier valor $c \in (k-\varepsilon, k+\varepsilon)$ la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = c$$

se acerca a k como x se acerca al infinito.

2. $y = k$ es una **solución asintóticamente inestable** de la ecuación diferencial si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier valor $c \in (k - \varepsilon, k + \varepsilon)$ la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = c$$

nunca se acerca a k como x se acerca al infinito.

3. $y = k$ es una **solución asintóticamente semiestable** de la ecuación diferencial si no es ni asintóticamente estable ni asintóticamente inestable.

Ahora volvemos a la ecuación diferencial $y' = (x - 3)(y^2 - 4)$, con la condición inicial $y(0) = 0{,}5$. El campo de direcciones para este problema de valores iniciales, junto con la solución correspondiente, se muestra en la Figura 4.10.

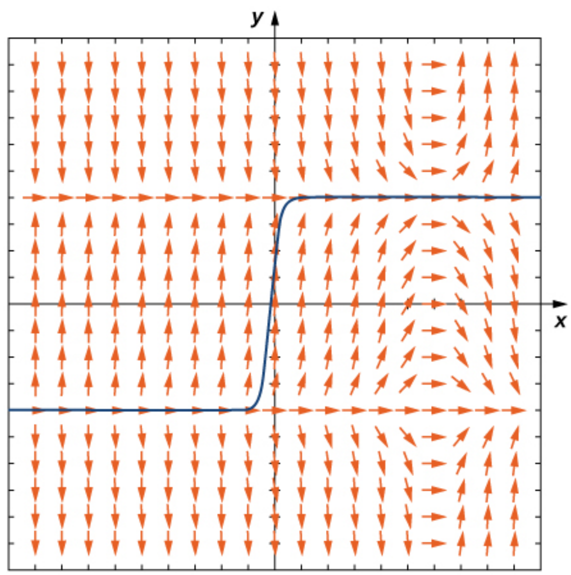


Figura 4.10 Campo de direcciones para el problema de valor inicial $y' = (x - 3)(y^2 - 4)$, $y(0) = 0{,}5$.

Los valores de la solución de este problema de valor inicial se mantienen entre $y = -2$ y $y = 2$, que son las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial. Sin embargo, un problema de valor inicial que comienza con $-2 < y < 2$ nunca puede cruzar las soluciones de equilibrio $y = 2$ y $y = -2$. Por lo tanto, dado que $y^2 - 4 < 0$ y para $x > 3$, $y' = (x-3)(y^2-4) < 0$, y es decreciente y por eso se acerca a $y = -2$. Por lo tanto, $y = -2$ es una solución asintóticamente estable de la ecuación diferencial.

¿Qué ocurre cuando el valor inicial es inferior a $y = -2$? Este escenario se ilustra en la Figura 4.11, con el valor inicial $y(0) = -3$.

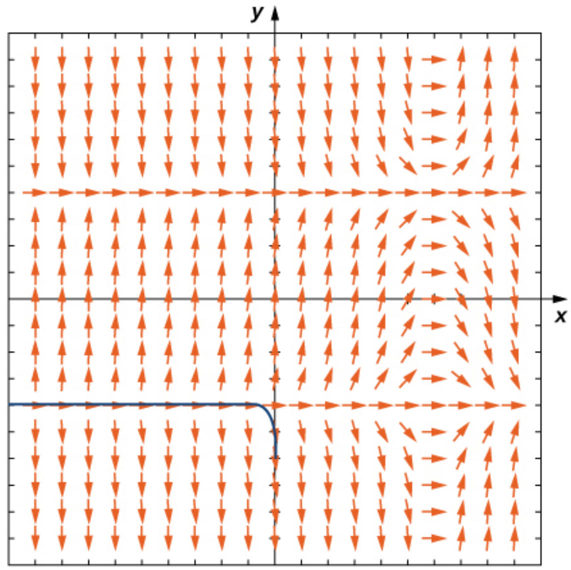


Figura 4.11 Campo de direcciones para el problema de valor inicial $y' = (x - 3)(y^2 - 4), \quad y(0) = -3$.

Podemos ver que para los valores iniciales $y <-2$ por $x > 3, y'(x-3)(y^2-4) > 0$ y y es creciente y por eso se acerca a $y =-2$. Esto reafirma que $y =-2$ es una solución asintóticamente estable de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 4.8

Estabilidad de una solución de equilibrio

Cree un campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = (y - 3)^2(y^2 + y - 2)$ e identifique cualquier solución de equilibrio. Clasifique cada una de las soluciones de equilibrio como estable, inestable o semiestable.

Solución

El campo de direcciones se muestra en la Figura 4.12.

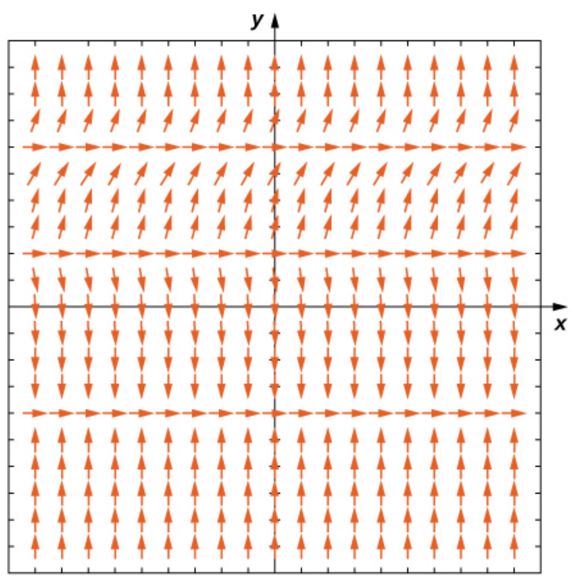


Figura 4.12 Campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = (y - 3)^2(y^2 + y - 2)$.

Las soluciones de equilibrio son $y = -2$, $y = 1$, y $y = 3$. Para clasificar cada una de las soluciones, fíjese en la flecha que hay justo encima o debajo de cada uno de estos valores. Por ejemplo, en $y = -2$ las flechas situadas justo debajo de esta solución apuntan hacia arriba, y las flechas situadas justo encima de la solución apuntan hacia abajo. Por lo tanto, todas las condiciones iniciales cercanas a $y = -2$ se acercan a $y = -2$, y la solución es estable. Para la solución $y = 1$, todas las condiciones iniciales arriba y abajo de $y = 1$ se repelen (se alejan) de $y = 1$, por lo que esta solución es inestable. La

solución $y = 3$ es semiestable, porque para condiciones iniciales ligeramente superiores a 3, la solución se acerca al infinito, y para condiciones iniciales ligeramente inferiores a 3, la solución se acerca a $y = 3$.

Análisis

Es posible hallar las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial igualando el lado derecho a cero y resolviendo para y. Este enfoque da las mismas soluciones de equilibrio que las que vimos en el campo de direcciones.

4.8 Cree un campo de direcciones para la ecuación diferencial $y' = (x + 5)(y + 2)(y^2 - 4y + 4)$ e identifique cualquier solución de equilibrio. Clasifique cada una de las soluciones de equilibrio como estable, inestable o semiestable.

Método de Euler

Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = 2x - 3, \quad y(0) = 3.$$

Integrando ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene $y = x^2 - 3x + C$, y resolviendo para C se obtiene la solución particular $y = x^2 - 3x + 3$. La solución de este problema de valor inicial aparece como la parábola en la Figura 4.13.

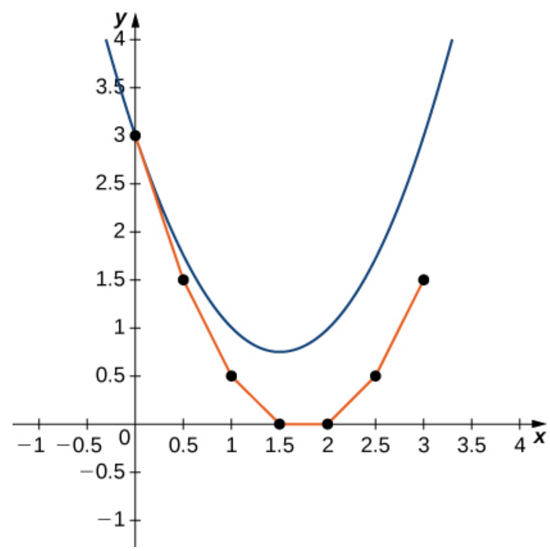


Figura 4.13 Método de Euler para el problema de valor inicial $y' = 2x - 3, \quad y(0) = 3$.

El gráfico rojo está compuesto por segmentos de línea que se aproximan a la solución del problema de valor inicial. El gráfico comienza con el mismo valor inicial de $(0, 3)$. Entonces la pendiente de la solución en cualquier punto está determinada por el lado derecho de la ecuación diferencial, y la longitud del segmento de la línea se determina aumentando el valor x por $0{,}5$ cada vez (el *tamaño del paso*). Este enfoque es la base del método de Euler.

Antes de enunciar el método de Euler como un teorema, consideremos otro problema de valor inicial:

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(-1) = 2.$$

La idea de los campos de direcciones también puede aplicarse a este problema para estudiar el comportamiento de su solución. Por ejemplo, en el punto $(-1, 2)$, la pendiente de la solución está dada por $y' = (-1)^2 - 2^2 = -3$, por lo que la pendiente de la línea tangente a la solución en ese punto también es igual a -3. Ahora definimos $x_0 = -1$ y $y_0 = 2$. Como la pendiente de la solución en este punto es igual a -3, podemos utilizar el método de aproximación lineal para aproximar y cerca de $(-1, 2)$.

$$L(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Aquí $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, y $f'(x_0) = -3$, por lo que la aproximación lineal se convierte en

$$\begin{aligned} L(x) &= 2 - 3\,(x - (-1)) \\ &= 2 - 3x - 3 \\ &= -3x - 1 \end{aligned}$$

Ahora elegimos un **tamaño de paso**. El tamaño del paso es un valor pequeño, normalmente $0{,}1$ o menos, que sirve de incremento para x; se representa con la variable h. En nuestro ejemplo, supongamos que $h = 0{,}1$. Incrementando x_0 por h da nuestro siguiente valor x:

$$x_1 = x_0 + h = -1 + 0{,}1 = -0{,}9.$$

Podemos sustituir $x_1 = -0{,}9$ en la aproximación lineal para calcular y_1.

$$\begin{aligned} y_1 &= L\,(x_1) \\ &= -3\,(-0{,}9) - 1 \\ &= 1{,}7. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor aproximado y de la solución cuando $x = -0{,}9$ es $y = 1{,}7$. Podemos entonces repetir el proceso, utilizando $x_1 = -0{,}9$ y $y_1 = 1{,}7$ para calcular x_2 y y_2. La nueva pendiente está dada por $y' = (-0{,}9)^2 - (1{,}7)^2 = -2{,}08$. Primero, $x_2 = x_1 + h = -0{,}9 + 0{,}1 = -0{,}8$. Utilizando la aproximación lineal se obtiene

$$\begin{aligned} L(x) &= y_1 + f'\,(x_1)\,(x - x_1) \\ &= 1{,}7 - 2{,}08\,(x - (-0{,}9)) \\ &= 1{,}7 - 2{,}08x - 1{,}872 \\ &= -2{,}08x - 0{,}172. \end{aligned}$$

Por último, sustituimos $x_2 = -0{,}8$ en la aproximación lineal para calcular y_2.

$$\begin{aligned} y_2 &= L(x_2) \\ &= -2{,}08x_2 - 0{,}172 \\ &= -2{,}08\,(-0{,}8) - 0{,}172 \\ &= 1{,}492. \end{aligned}$$

Por tanto, el valor aproximado de la solución de la ecuación diferencial es $y = 1{,}492$ cuando $x = -0{,}8$.

Lo que acabamos de mostrar es la idea en la que se basa **el método de Euler**. Repitiendo estos pasos se obtiene una lista de valores para la solución. Estos valores se muestran en la Tabla 4.2, redondeados a cuatro decimales.

n	0	1	2	3	4	5
x_n	−1	−0,9	−0,8	−0,7	−0,6	−0,5
y_n	2	1,7	1,492	1,3334	1,2046	1,0955
n	6	7	8	9	10	
x_n	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1	0	
y_n	1,0004	1,9164	1,8414	1,7746	1,7156	

Tabla 4.2 Usar el método de Euler para aproximar soluciones a una ecuación diferencial

Teorema 4.1

Método de Euler

Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = f\,(x, y)\,, \quad y\,(x_0) = y_0.$$

Para aproximar una solución a este problema utilizando el método de Euler, defina

$$x_n = x_0 + nh$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$ **(4.2)**

Aquí $h > 0$ representa el tamaño de paso y n es un número entero, empezando por 1. El número de pasos dados se cuenta con la variable n.

Normalmente h es un valor pequeño, por ejemplo $0,1$ o $0,05$. Cuanto menor sea el valor de h, más cálculos se necesitan. Cuanto mayor sea el valor de h, menos cálculos se necesitan. Sin embargo, la compensación resulta en un menor grado de exactitud para un tamaño de paso mayor, como se ilustra en la Figura 4.14.

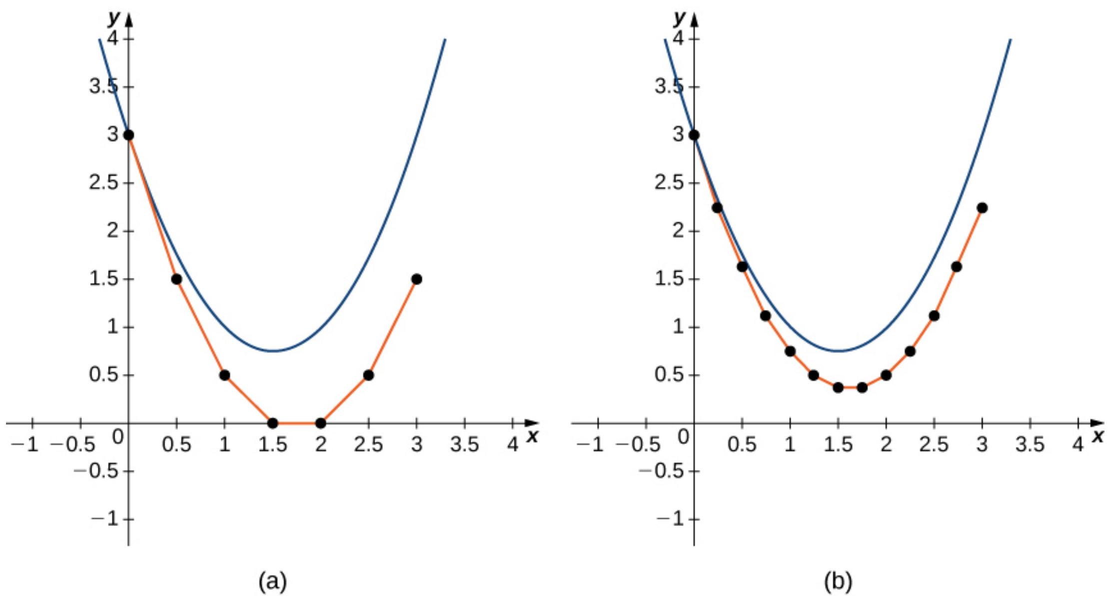


Figura 4.14 Método de Euler para el problema de valor inicial $y' = 2x - 3$, $y(0) = 3$ con (a) un tamaño de paso de $h = 0{,}5$; y (b) un tamaño de paso de $h = 0{,}25$.

EJEMPLO 4.9

Uso del método de Euler

Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = 3x^2 - y^2 + 1, \quad y(0) = 2.$$

Utilice el método de Euler con un tamaño de paso de $0{,}1$ para generar una tabla de valores de la solución para valores de x entre 0 y 1.

Solución

Nos dan $h = 0{,}1$ y $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 1$. Además, la condición inicial $y(0) = 2$ da como resultado $x_0 = 0$ y $y_0 = 2$. Utilizando la Ecuación 4.2 con $n = 0$, podemos generar la Tabla 4.3.

n	x_n	$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ grandes.
0	0	2
1	$0{,}1$	$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1{,}7$
2	$0{,}2$	$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}514$

Tabla 4.3 Usar el método de Euler para aproximar soluciones a una ecuación diferencial

3	0,3	$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}3968$
4	0,4	$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1{,}3287$
5	0,5	$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1{,}3001$
6	0,6	$y_6 = y_5 + hf(x_5, y_5) = 1{,}3061$
7	0,7	$y_7 = y_6 + hf(x_6, y_6) = 1{,}3435$
8	0,8	$y_8 = y_7 + hf(x_7, y_7) = 1{,}4100$
9	0,9	$y_9 = y_8 + hf(x_8, y_8) = 1{,}5032$
10	1,0	$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = 1{,}6202$

Tabla 4.3 Usar el método de Euler para aproximar soluciones a una ecuación diferencial

Con diez cálculos, podemos aproximar los valores de la solución del problema de valor inicial para valores de x entre 0 y 1.

MEDIOS

Para obtener más información sobre el método de Euler (http://www.openstax.org/l/20_EulersMethod) utilice esta miniaplicación.

4.9 Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = x^3 + y^2, \quad y(1) = -2.$$

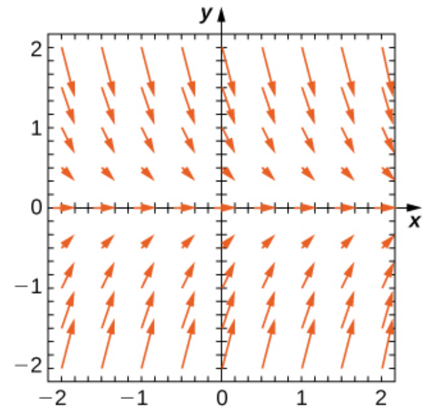
Utilizando un tamaño de paso de $0{,}1$, genere una tabla con los valores aproximados de la solución del problema de valor inicial para los valores de x entre 1 y 2.

MEDIOS

Visite este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_EulerMethod2) para ver una aplicación práctica del material de esta sección.

SECCIÓN 4.2 EJERCICIOS

Para los siguientes problemas, utilice el siguiente campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = -2y$. Dibuje el gráfico de la solución para las condiciones iniciales dadas.



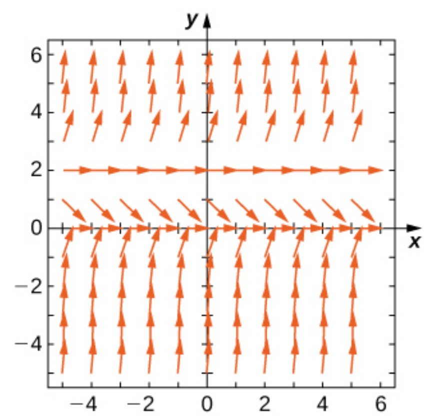
66. $y(0) = 1$

67. $y(0) = 0$

68. $y(0) = -1$

69. ¿Existe algún equilibrio? ¿Cuáles son sus estabilidades?

Para los siguientes problemas, utilice el siguiente campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 2y$. Dibuje el gráfico de la solución para las condiciones iniciales dadas.



70. $y(0) = 3$

71. $y(0) = 1$

72. $y(0) = -1$

73. ¿Existe algún equilibrio? ¿Cuáles son sus estabilidades?

Dibuje el campo de direcciones para las siguientes ecuaciones diferenciales, luego resuelva la ecuación diferencial. Dibuje su solución sobre el campo de direcciones. ¿Su solución sigue las flechas de su campo de direcciones?

74. $y' = t^3$

75. $y' = e^t$

76. $\frac{dy}{dx} = x^2 \cos x$

77. $\frac{dy}{dt} = te^t$

78. $\frac{dx}{dt} = \cosh(t)$

Dibuje el campo de direcciones para las siguientes ecuaciones diferenciales. ¿Qué puede decir sobre el comportamiento de la solución? ¿Existen equilibrios? ¿Qué estabilidad tienen estos equilibrios?

79. $y' = y^2 - 1$

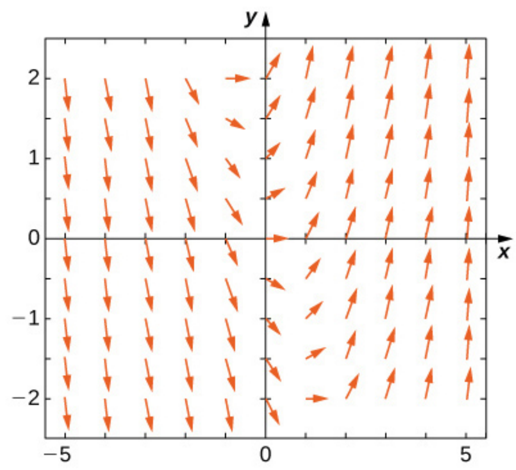
80. $y' = y - x$

81. $y' = 1 - y^2 - x^2$

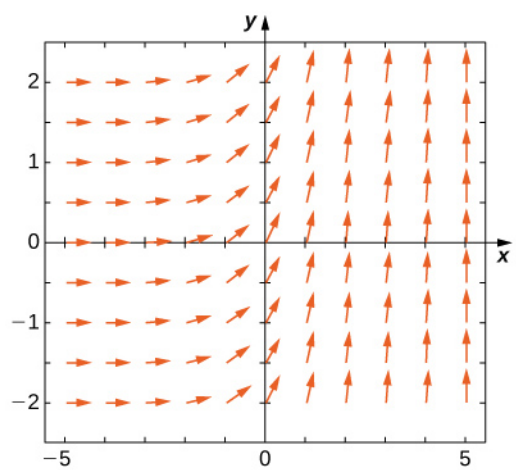
82. $y' = t^2 \operatorname{sen} y$

83. $y' = 3y + xy$

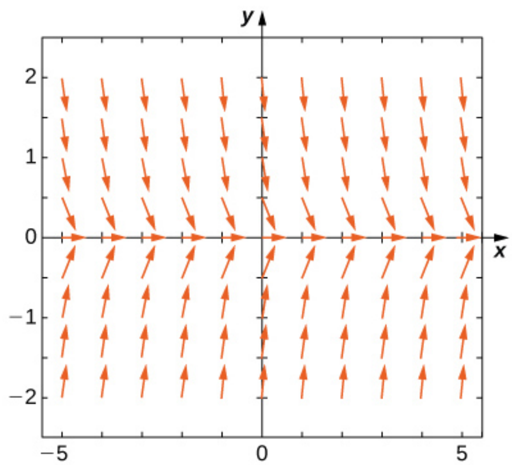
Haga coincidir el campo de direcciones con las ecuaciones diferenciales dadas. Explique sus selecciones.



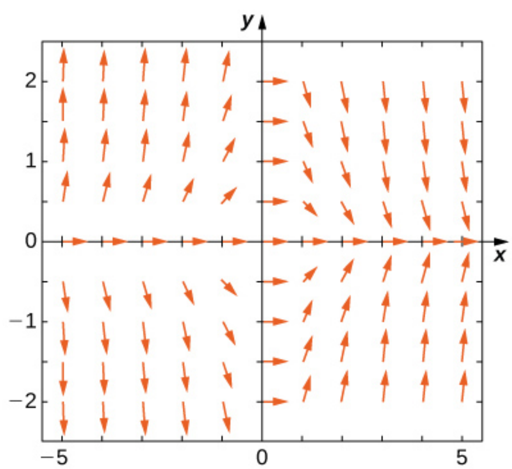
(a)



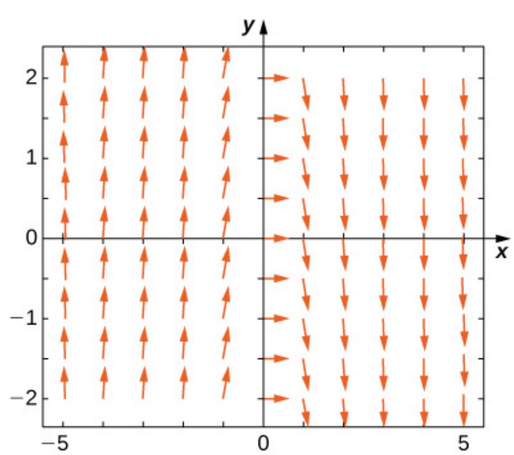
(b)



(c)



(d)



(e)

84. $y' = -3y$

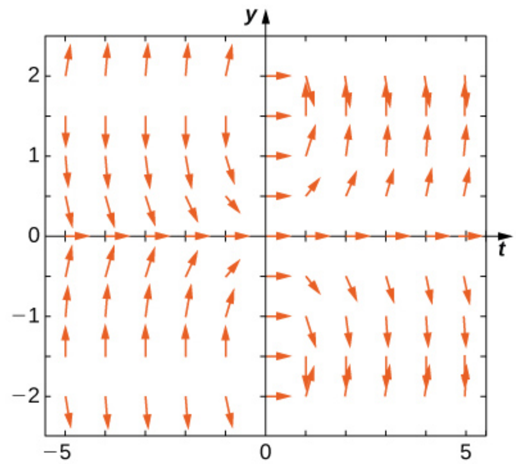
85. $y' = -3t$

86. $y' = e^t$

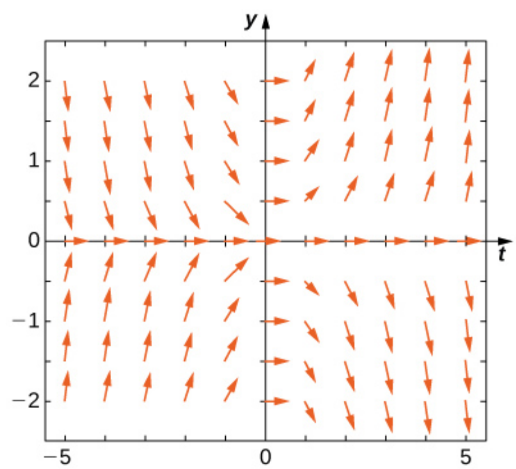
87. $y' = \frac{1}{2}y + t$

88. $y' = -ty$

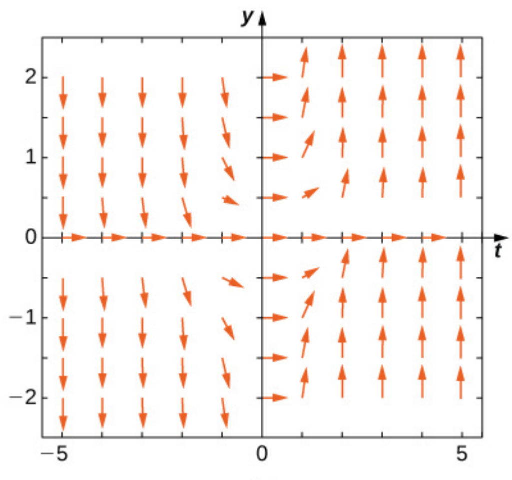
Haga coincidir el campo de direcciones con las ecuaciones diferenciales dadas. Explique sus selecciones.



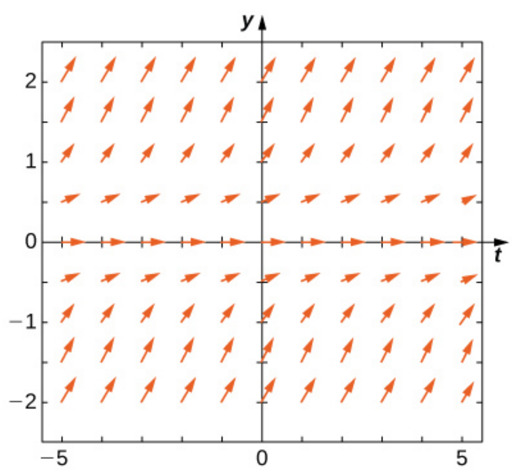
(a)



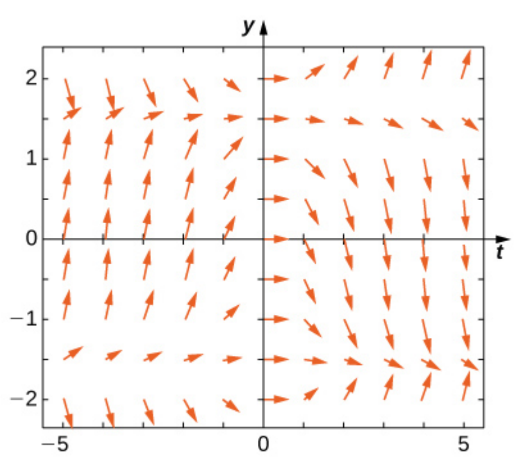
(b)



(c)



(d)



(e)

89. $y' = t \operatorname{sen} y$

90. $y' = -t \cos y$

91. $y' = t \tan y$

92. $y' = \operatorname{sen}^2 y$

93. $y' = y^2 t^3$

Estime las siguientes soluciones mediante el método de Euler con $n = 5$ pasos sobre el intervalo $t = [0, 1]$. Si es capaz de resolver el problema de valor inicial exactamente, compare su solución con la solución exacta. Si no puede resolver el problema de valor inicial, se le proporcionará la solución exacta para que la compare con el método de Euler. ¿Qué precisión tiene el método de Euler?

94. $y' = -3y, \quad y(0) = 1$

95. $y' = t^2$

96. $y' = 3t - y, y(0) = 1$. La solución exacta es $y = 3t + 4e^{-t} - 3$

97. $y' = y + t^2, y(0) = 3$. La solución exacta es $y = 5e^t - 2 - t^2 - 2t$

98. $y' = 2t, y(0) = 0$

99. **[T]** $y' = e^{(x+y)}, y(0) = -1$. La solución exacta es $y = -\ln(e + 1 - e^x)$ grandes.

100. $y' = y^2 \ln(x + 1), y(0) = 1$. La solución exacta es $y = -\frac{1}{(x+1)(\ln(x+1)-1)}$ grandes.

101. $y' = 2^x, y(0) = 0$, La solución exacta es $y = \frac{2^x - 1}{\ln(2)}$ grandes.

102. $y' = y, y(0) = -1$. La solución exacta es $y = -e^x$.

103. $y' = -5t, y(0) = -2$. La solución exacta es $y = -\frac{5}{2}t^2 - 2$

Las ecuaciones diferenciales pueden utilizarse para modelar epidemias de enfermedades. En el siguiente conjunto de problemas, examinamos el cambio de tamaño de dos subpoblaciones de personas que viven en una ciudad: los individuos infectados y los individuos susceptibles a la infección. S representa el tamaño de la población susceptible, e I representa el tamaño de la población infectada. Suponemos que si una persona susceptible interactúa con una persona infectada, existe una probabilidad c que la persona susceptible se infecte. Cada persona infectada se recupera de la infección a una tasa r y vuelve a ser susceptible. Consideramos el caso de la gripe, en el que suponemos que nadie muere por la enfermedad, por lo que suponemos que el tamaño total de la población de las dos subpoblaciones es un número constante, N. Las ecuaciones diferenciales que modelan estos tamaños de población son

$$S' = rI - cSI \quad \text{y}$$
$$I' = cSI - rI.$$

Aquí c representa la tasa de contacto y r es la tasa de recuperación.

104. Demuestre que, por nuestra suposición de que el tamaño total de la población es constante $(S + I = N)$, se puede reducir el sistema a una única ecuación diferencial en $I: I' = c(N - I)I - rI$.

105. Suponiendo que los parámetros sean $c = 0{,}5$, $N = 5$, y $r = 0{,}5$, dibuje el campo de direcciones resultante.

106. **[T]** Utilice un programa de computadora o una calculadora para calcular la solución del problema de valor inicial $y' = ty, \quad y(0) = 2$ utilizando el método de Euler con el tamaño de paso dado h. Halle la solución en $t = 1$. A modo de pista, aquí se presenta el "pseudocódigo" de cómo escribir un programa de computadora para realizar el Método de Euler para $y' = f(t, y), y(0) = 2$:

Cree la función $f(t, y)$

Defina los parámetros $y(1) = y_0, \quad t(0) = 0$, tamaño de paso h, y número total de pasos, N

Escriba un bucle for:

para $\text{k} = 1 \text{ hasta N}$

$\text{fn} = \text{f}\left(\text{t}\left(\text{k}\right), \text{y}\left(\text{k}\right)\right)$ grandes.

$\text{y}\left(\text{k+1}\right) = \text{y}\left(\text{k}\right) + \text{h*fn}$

$\text{t}\left(\text{k+1}\right) = \text{t}\left(\text{k}\right) + \text{h}$

107. Resuelva el problema de valor inicial para la solución exacta.

108. Dibuje el campo de direcciones

109. $h = 1$

110. **[T]** $h = 10$

111. **[T]** $h = 100$

112. **[T]** $h = 1.000$

113. **[T]** Evalúe la solución exacta en $t = 1$. Haga una tabla de errores para el error relativo entre la solución del método de Euler y la solución exacta. ¿Cuánto cambia el error? ¿Puede explicarlo?

Consideremos el problema de valor inicial $y' = -2y, \quad y(0) = 2.$

114. Demuestre que $y = 2e^{-2x}$ resuelve este problema de valor inicial.

115. Dibuje el campo de direcciones de esta ecuación diferencial.

116. **[T]** A mano o con calculadora o computadora, aproxime la solución mediante el método de Euler en $t = 10$ utilizando $h = 5$.

117. **[T]** Con una calculadora o una computadora, aproxime la solución mediante el método de Euler a $t = 10$ utilizando $h = 100$.

118. **[T]** Grafique la respuesta exacta y cada aproximación de Euler (para $h = 5$ y $h = 100$) en cada h en el campo de direcciones ¿Qué observa?

4.3 Ecuaciones separables

Objetivos de aprendizaje

4.3.1 Utilizar la separación de variables para resolver una ecuación diferencial.
4.3.2 Resolver aplicaciones utilizando la separación de variables.

A continuación examinamos una técnica de solución para hallar soluciones exactas a una clase de ecuaciones diferenciales conocidas como ecuaciones diferenciales separables. Estas ecuaciones son comunes en una gran variedad de disciplinas, como la física, la química y la ingeniería. Al final de la sección ilustramos algunas aplicaciones.

Separación de variables

Comenzamos con una definición y algunos ejemplos.

Definición

Una **ecuación diferencial separable** es cualquier ecuación que puede escribirse en la forma

$$y' = f(x)\,g(y). \tag{4.3}$$

El término "separable" se refiere al hecho de que el lado derecho de la ecuación puede separarse en una función de x veces una función de y. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales separables son

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^2 - 4\right)(3y + 2) \\ y' &= 6x^2 + 4x \\ y' &= \sec y + \tan y \\ y' &= xy + 3x - 2y - 6. \end{aligned}$$

La segunda ecuación es separable con $f(x) = 6x^2 + 4x$ y $g(y) = 1$, la tercera ecuación es separable con $f(x) = 1$ y $g(y) = \sec y + \tan y$, y el lado derecho de la cuarta ecuación se puede factorizar como $(x–2)(y + 3)$, por lo que también es separable. La tercera ecuación también se llama **ecuación diferencial autónoma** porque el lado derecho de la ecuación es una función de y sola. Si una ecuación diferencial es separable, entonces es posible resolver la ecuación utilizando el método de **separación de variables**.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Separación de variables

1. Compruebe si hay valores de y que hacen $g(y) = 0$. Estos corresponden a soluciones constantes.
2. Reescriba la ecuación diferencial en la forma $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.
3. Integre ambos lados de la ecuación.
4. Resuelva la ecuación resultante para y si es posible.
5. Si existe una condición inicial, sustituya los valores adecuados por x como y en la ecuación y resuelva la constante.

Observe que el paso 4 indica "Resolver la ecuación resultante para y si es posible" No siempre es posible obtener y como función explícita de x. Muy a menudo tenemos que conformarnos con hallar y como función implícita de x.

EJEMPLO 4.10

Uso de la separación de variables

Halle una solución general a la ecuación diferencial $y' = \left(x^2 - 4\right)(3y + 2)$ utilizando el método de separación de variables.

Solución

Siga el método de separación de variables en cinco pasos.

1. En este ejemplo, $f(x) = x^2 - 4$ y $g(y) = 3y + 2$. Si establecemos que $g(y) = 0$ da como resultado $y = -\frac{2}{3}$ como solución constante.
2. Reescriba la ecuación diferencial en la forma
$$\frac{dy}{3y+2} = (x^2 - 4)dx.$$
3. Integre ambos lados de la ecuación:
$$\int \frac{dy}{3y+2} = \int \left(x^2 - 4\right) dx.$$
Supongamos que $u = 3y + 2$. Entonces $du = 3\frac{dy}{dx}dx$, por lo que la ecuación se convierte en
$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du &= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C \\ \frac{1}{3}\ln|u| &= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C \\ \frac{1}{3}\ln|3y+2| &= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C. \end{aligned}$$
4. Para resolver esta ecuación para y, multiplique primero ambos lados de la ecuación por 3.
$$\ln|3y+2| = x^3 - 12x + 3C$$
Ahora utilizamos algo de lógica cuando tratamos con la constante C. Dado que C representa una constante arbitraria, $3C$ también representa una constante arbitraria. Si llamamos a la segunda constante arbitraria C_1, la ecuación se convierte en
$$\ln|3y+2| = x^3 - 12x + C_1.$$
Ahora potencie ambos lados de la ecuación (es decir, haga de cada lado de la ecuación el exponente de la base e).
$$\begin{aligned} e^{\ln|3y+2|} &= e^{x^3-12x+C_1} \\ |3y+2| &= e^{C_1}e^{x^3-12x} \end{aligned}$$
De nuevo, defina una constante nueva $C_2 = e^{c_1}$ (observe que $C_2 > 0$):
$$|3y+2| = C_2 e^{x^3-12x}.$$

Esto corresponde a dos ecuaciones distintas: $3y+2=C_2e^{x^3-12x}$ y $3y+2=-C_2e^{x^3-12x}$.

La solución de cualquiera de las dos ecuaciones puede escribirse en la forma $y=\frac{-2\pm C_2e^{x^3-12x}}{3}$.

Dado que $C_2>0$, no importa si usamos el más o el menos, por lo que la constante puede tener cualquiera de los dos signos. Además, el subíndice de la constante C es totalmente arbitrario y se puede omitir. Por lo tanto, la solución puede escribirse como

$$y=\frac{-2+Ce^{x^3-12x}}{3}.$$

5. No se impone ninguna condición inicial, por lo que hemos terminado.

4.10 Utilice el método de separación de variables para hallar una solución general a la ecuación diferencial $y'=2xy+3y-4x-6$.

EJEMPLO 4.11

Resolución de un problema de valor inicial

Utilizando el método de separación de variables, resuelva el problema de valor inicial

$$y'=(2x+3)(y^2-4),\quad y(0)=-1.$$

Solución

Siga el método de separación de variables en cinco pasos.

1. En este ejemplo, $f(x)=2x+3$ y $g(y)=y^2-4$. Si establecemos que $g(y)=0$ da como resultado $y=\pm2$ como soluciones constantes.
2. Divida ambos lados de la ecuación entre y^2-4 y multiplique por dx. Esto da la ecuación
$$\frac{dy}{y^2-4}=(2x+3)\,dx.$$
3. A continuación, integre ambos lados:
$$\int\frac{1}{y^2-4}\,dy=\int(2x+3)\,dx. \tag{4.4}$$
Para evaluar el lado izquierdo, utilice el método de descomposición en fracciones parciales. Esto nos lleva a la identidad
$$\frac{1}{y^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+2}\right).$$
Entonces la Ecuación 4.4 se convierte en
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+2}\right)dy &= \int(2x+3)\,dx\\ \frac{1}{4}(\ln|y-2|-\ln|y+2|) &= x^2+3x+C.\end{aligned}$$
Multiplicando ambos lados de esta ecuación por 4 y sustituyendo $4C$ con C_1 da
$$\begin{aligned}\ln|y-2|-\ln|y+2| &= 4x^2+12x+C_1\\ \ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| &= 4x^2+12x+C_1.\end{aligned}$$
4. Es posible resolver esta ecuación para *y*. Primero potencie ambos lados de la ecuación y defina $C_2=e^{C_1}$:
$$\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=C_2e^{4x^2+12x}.$$

A continuación podemos eliminar el valor absoluto y suponer que C_2 es positivo o negativo. A continuación, multiplique ambos lados por $y+2$.

$$\begin{aligned} y-2 &= C_2\,(y+2)\,e^{4x^2+12x} \\ y-2 &= C_2\,ye^{4x^2+12x}+2C_2\,e^{4x^2+12x}. \end{aligned}$$

Ahora reúna todos los términos que involucren a y en un lado de la ecuación y resuelva para y:

$$\begin{aligned} y-C_2\,ye^{4x^2+12x} &= 2+2C_2\,e^{4x^2+12x} \\ y(1-C_2\,e^{4x^2+12x}) &= 2+2C_2\,e^{4x^2+12x} \\ y &= \frac{2+2C_2\,e^{4x^2+12x}}{1-C_2\,e^{4x^2+12x}}. \end{aligned}$$

5. Para determinar el valor de C_2, sustituya $x=0$ y $y=-1$ en la solución general. Alternativamente, podemos poner los mismos valores en una ecuación anterior, es decir, la ecuación $\frac{y-2}{y+2}=C_2\,e^{4x^2+12}$. Esto es mucho más fácil de resolver para C_2:

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{y+2} &= C_2\,e^{4x^2+12x} \\ \frac{-1-2}{-1+2} &= C_2\,e^{4(0)^2+12(0)} \\ C_2 &= -3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y=\frac{2-6e^{4x^2+12x}}{1+3e^{4x^2+12x}}.$$

Un gráfico de esta solución aparece en la Figura 4.15.

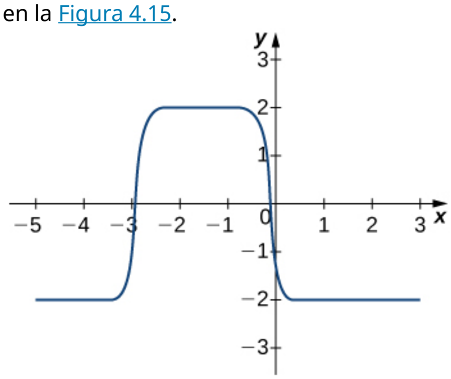


Figura 4.15 Gráfico de la solución del problema de valor inicial $y'=(2x+3)\left(y^2-4\right), \quad y(0)=-1$.

4.11 Halle la solución del problema de valor inicial

$$6y'=(2x+1)\left(y^2-2y-8\right), \quad y(0)=-3$$

utilizando el método de separación de variables.

Aplicaciones de la separación de variables

Muchos problemas interesantes pueden describirse mediante ecuaciones separables. Ilustramos dos tipos de problemas: las concentraciones de soluciones y la ley de Newton del enfriamiento.

Concentraciones de soluciones

Considere un tanque que se llena con una solución salina. Queremos determinar la cantidad de sal presente en el tanque en función del tiempo. Podemos aplicar el proceso de separación de variables para resolver este problema y otros similares que impliquen concentraciones de soluciones.

EJEMPLO 4.12

Determinación de la concentración de sal en el tiempo

Un tanque que contiene $100\,\mathrm{L}$ de una solución de salmuera tiene inicialmente $4\,\mathrm{kg}$ de sal disuelta en la solución. En el tiempo $t = 0$, otra solución de salmuera fluye hacia el tanque a una tasa de $2\,\mathrm{L/min}$. Esta solución de salmuera contiene una concentración de $0{,}5\,\mathrm{kg/L}$ de sal. Al mismo tiempo, se abre una llave de paso en el fondo del tanque, lo que permite que la solución combinada salga a una tasa de $2\,\mathrm{L/min}$, para que el nivel de líquido en el depósito se mantenga constante (Figura 4.16). Calcule la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo (medido en minutos) y la cantidad límite de sal en el tanque, suponiendo que la solución en el tanque está bien mezclada en todo momento.



Figura 4.16 Un tanque de salmuera con una cantidad inicial de solución salina admite un flujo de entrada y emite un flujo de salida. ¿Cómo cambia la cantidad de sal con el tiempo?

Solución

Primero definimos una función $u(t)$ que representa la cantidad de sal en kilogramos en el tanque en función del tiempo. Entonces $\frac{du}{dt}$ representa la tasa a la que cambia la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo. También, $u(0)$ representa la cantidad de sal en el tanque en el tiempo $t = 0$, que es 4 kilogramos.

El planteamiento general de la ecuación diferencial que vamos a resolver es de la forma

$$\frac{du}{dt} = \text{TASA DE FLUJO DE ENTRADA} - \text{TASA DE FLUJO DE SALIDA.} \tag{4.5}$$

La TASA DE FLUJO DE ENTRADA representa la tasa a la que la sal entra en el tanque y la TASA DE FLUJO DE SALIDA representa la tasa a la que la sal sale del tanque. Debido a que la solución entra en el tanque a una tasa de 2 L/min, y cada litro de solución contiene $0{,}5$ kilo de sal, cada minuto $2\,(0{,}5) = 1\ \text{kilo}$ de sal entra en el tanque. Por lo tanto, la TASA DE FLUJO DE ENTRADA = 1.

Para calcular la tasa a la que la sal sale del tanque, necesitamos la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo. Dado que la cantidad real de sal varía con el tiempo, también lo hace la concentración de sal. Sin embargo, el volumen de la solución se mantiene fijo en 100 litros. El número de kilogramos de sal en el tanque en el tiempo t es igual a $u\,(t)$. Así, la concentración de sal es $\frac{u(t)}{100}$ kg/L, y la solución sale del tanque a una tasa de 2 L/min. Por lo tanto, la sal sale del tanque a una tasa de $\frac{u(t)}{100}\cdot 2 = \frac{u(t)}{50}$ kg/min, y la TASA DE FLUJO DE SALIDA es igual a $\frac{u(t)}{50}$. Por lo tanto, la ecuación diferencial se convierte en $\frac{du}{dt} = 1 - \frac{u}{50}$, y la condición inicial es $u\,(0) = 4$. El problema de valor inicial a resolver es

$$\frac{du}{dt} = 1 - \frac{u}{50}, \quad u\,(0) = 4.$$

La ecuación diferencial es una ecuación separable, por lo que podemos aplicar la estrategia de cinco pasos para la solución.

Paso 1. Si establecemos que $1 - \frac{u}{50} = 0$ da como resultado $u = 50$ como solución constante. Dado que la cantidad inicial

de sal en el tanque es 4 kilogramos, esta solución no se aplica.

Paso 2. Reescriba la ecuación como

$$\frac{du}{dt} = \frac{50 - u}{50}.$$

A continuación, multiplique ambos lados por dt y divida ambos lados entre $50 - u$:

$$\frac{du}{50 - u} = \frac{dt}{50}.$$

Paso 3. Integre ambos lados:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{50 - u} &= \int \frac{dt}{50} \\ -\ln|50 - u| &= \tfrac{t}{50} + C. \end{aligned}$$

Paso 4. Resuelva para $u(t)$:

$$\begin{aligned} \ln|50 - u| &= -\tfrac{t}{50} - C \\ e^{\ln|50 - u|} &= e^{-(t/50) - C} \\ |50 - u| &= C_1 e^{-t/50}. \end{aligned}$$

Elimine el valor absoluto permitiendo que la constante sea positiva o negativa:

$$50 - u = C_1 e^{-t/50}.$$

Por último, resuelva para $u(t)$:

$$u(t) = 50 - C_1 e^{-t/50}.$$

Paso 5. Resuelva para C_1:

$$\begin{aligned} u(0) &= 50 - C_1 e^{-0/50} \\ 4 &= 50 - C_1 \\ C_1 &= 46. \end{aligned}$$

La solución del problema de valor inicial es $u(t) = 50 - 46e^{-t/50}$. Para calcular la cantidad límite de sal en el tanque, tome el límite como t se acerca al infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} u(t) &= 50 - 46e^{-t/50} \\ &= 50 - 46(0) \\ &= 50. \end{aligned}$$

Observe que esta era la solución constante de la ecuación diferencial. Si la cantidad inicial de sal en el tanque es 50 kilogramos, entonces se mantiene constante. Si comienza con menos de 50 kilogramos, con el tiempo se acerca a los 50 kilogramos.

4.12 Un tanque contiene 3 kilogramos de sal disuelta en 75 litros de agua. Una solución salina de $0{,}4$ kg de sal/L se bombea al tanque a una tasa de 6 L/min y se drena a la misma tasa. Calcule la concentración de sal en el tiempo t. Suponga que el tanque está bien mezclado en todo momento.

Ley del enfriamiento de Newton

La ley del enfriamiento de Newton establece que la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura ambiente (es decir, la temperatura de su entorno). Supongamos que $T(t)$ representa la temperatura de un objeto en función del tiempo, entonces $\frac{dT}{dt}$ representa la tasa a la que cambia esa temperatura. La temperatura del entorno del objeto puede representarse mediante T_s. Entonces la ley del enfriamiento de Newton se puede escribir en la forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_s)$$

o simplemente

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s). \tag{4.6}$$

La temperatura del objeto al comienzo de cualquier experimento es el valor inicial del problema de valor inicial. Llamamos a esta temperatura T_0. Por tanto, el problema de valor inicial que hay que resolver tiene la forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s), \quad T(0) = T_0, \tag{4.7}$$

donde k es una constante que debe se debe dar o determinar en el contexto del problema. Utilizamos estas ecuaciones en el Ejemplo 4.13.

EJEMPLO 4.13

Esperar a que se enfríe una pizza

Se saca una pizza del horno después de hornearla bien y su temperatura al salir del horno es $350°F$. La temperatura de la cocina es $75°F$, y después de 5 minutos la temperatura de la pizza es $340°F$. Nos gustaría esperar hasta que la temperatura de la pizza alcance $300°F$ antes de cortarla y servirla (Figura 4.17). ¿Cuánto tiempo más tendremos que esperar?



Figura 4.17 Por la ley del enfriamiento de Newton, si la pizza se enfría $10°F$ en 5 minutos, ¿cuánto tiempo pasará antes de que se enfríe a $300°F$?

Solución

La temperatura ambiente (temperatura del entorno) es $75°F$, así que $T_s = 75$. La temperatura de la pizza al salir del horno es $350°F$, la cual es la temperatura inicial (es decir, el valor inicial), por lo que $T_0 = 350$. Por lo tanto, la Ecuación 4.4 se convierte en

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 75), \quad T(0) = 350.$$

Para resolver la ecuación diferencial, utilizamos la técnica de cinco pasos para resolver ecuaciones separables.

1. Si el lado derecho es igual a cero, se obtiene $T = 75$ como solución constante. Como la pizza empieza en $350°F$, esta no es la solución que buscamos.
2. Reescriba la ecuación diferencial multiplicando ambos lados por dt y dividiendo ambos lados entre $T - 75$:
$$\frac{dT}{T - 75} = kdt.$$
3. Integre ambos lados:
$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T - 75} &= \int kdt \\ \ln|T - 75| &= kt + C. \end{aligned}$$
4. Resuelva para T potenciando primero ambos lados:

$$\begin{aligned} e^{\ln|T-75|} &= e^{kt+C} \\ |T-75| &= C_1 e^{kt} \\ T-75 &= C_1 e^{kt} \\ T(t) &= 75 + C_1 e^{kt}. \end{aligned}$$

5. Resuelva para C_1 utilizando la condición inicial $T(0) = 350$:

$$\begin{aligned} T(t) &= 75 + C_1 e^{kt} \\ T(0) &= 75 + C_1 e^{k(0)} \\ 350 &= 75 + C_1 \\ C_1 &= 275. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}.$$

Para determinar el valor de k, tenemos que utilizar el hecho de que después de 5 minutos la temperatura de la pizza es $340°\text{F}$. Por lo tanto $T(5) = 340$. Sustituyendo esta información en la solución del problema de valor inicial, tenemos

$$\begin{aligned} T(t) &= 75 + 275e^{kt} \\ T(5) &= 340 = 75 + 275e^{5k} \\ 265 &= 275e^{5k} \\ e^{5k} &= \frac{53}{55} \\ \ln e^{5k} &= \ln\left(\frac{53}{55}\right) \\ 5k &= \ln\left(\frac{53}{55}\right) \\ k &= \frac{1}{5}\ln\left(\frac{53}{55}\right) \approx -0{,}007408. \end{aligned}$$

$0{,}007408t$

Así que ahora tenemos $T(t) = 75 + 275e$. ¿Cuándo es la temperatura $300°\text{F}$? Si resolvemos para t, tenemos

$$\begin{aligned} T(t) &= 75 + 275e^{-0.007408t} \\ 300 &= 75 + 275e^{-0.007408t} \\ 225 &= 275e^{-0.007408t} \\ e^{-0.007408t} &= \frac{9}{11} \\ \ln e^{-0.007408t} &= \ln\frac{9}{11} \\ -0.007408t &= \ln\frac{9}{11} \\ t &= -\frac{1}{0.007408}\ln\frac{9}{11} \approx 27.1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que esperar $22{,}1$ minutos adicionales (después de que la temperatura de la pizza alcance $340°\text{F}$). Eso debería ser el tiempo suficiente para terminar este cálculo.

4.13 Se retira un pastel del horno después de hornearlo completamente y la temperatura del pastel cuando sale del horno es $450°\text{F}$. La temperatura de la cocina es $70\ °\text{F}$, y después de 10 minutos la temperatura del pastel es $330°\text{F}$.

a. Escriba el problema de valor inicial correspondiente para describir esta situación.
b. Resuelva el problema de valor inicial para $T(t)$.
c. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la temperatura del pastel tenga una diferencia menor que $5°\text{F}$ de la temperatura ambiente?

SECCIÓN 4.3 EJERCICIOS

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial con la condición inicial $y_0 = 0$ y grafique la solución.

119. $\frac{dy}{dt} = y + 1$

120. $\frac{dy}{dt} = y - 1$

121. $\frac{dy}{dt} = y + 1$

122. $\frac{dy}{dt} = -y - 1$

Halle la solución general de la ecuación diferencial.

123. $x^2 y' = (x + 1)\, y$

124. $y' = \tan(y)\, x$

125. $y' = 2xy^2$

126. $\frac{dy}{dt} = y \cos(3t + 2)$
grandes.

127. $2x \frac{dy}{dx} = y^2$

128. $y' = e^y x^2$

129. $(1 + x)\, y' = (x + 2)(y - 1)$
grandes.

130. $\frac{dx}{dt} = 3t^2 \left(x^2 + 4\right)$
grandes.

131. $t \frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - y^2}$

132. $y' = e^x e^y$

Halle la solución del problema de valor inicial.

133. $y' = e^{y-x},\ y(0) = 0$

134. $y' = y^2(x + 1),\ y(0) = 2$

135. $\frac{dy}{dx} = y^3 x e^{x^2},\ y(0) = 1$

136. $\frac{dy}{dt} = y^2 e^x \operatorname{sen}(3x),\ y(0) = 1$

137. $y' = \frac{x}{\operatorname{sech}^2 y},\ y(0) = 0$

138. $y' = 2xy(1 + 2y),\ y(0) = -1$

139. $\frac{dx}{dt} = \ln(t)\sqrt{1 - x^2},\ x(1) = 0$

140. $y' = 3x^2(y^2 + 4),\ y(0) = 0$

141. $y' = e^y 5^x,\ y(0) = \ln(\ln(5))$
grandes.

142. $y' = -2x \tan(y),\ y(0) = \frac{\pi}{2}$

Para los siguientes problemas, utilice un programa de computadora o su calculadora para generar los campos de direcciones. Resuelva de manera explícita y dibuje las curvas de solución para varias condiciones iniciales. ¿Existen algunas condiciones iniciales críticas que cambien el comportamiento de la solución?

143. **[T]** $y' = 1 - 2y$

144. **[T]** $y' = y^2 x^3$

145. **[T]** $y' = y^3 e^x$

146. **[T]** $y' = e^y$

147. **[T]** $y' = y\ln(x)$ grandes.

148. La mayoría de los fármacos en el torrente sanguíneo se descomponen según la ecuación $y' = cy$, donde y es la concentración del fármaco en el torrente sanguíneo. Si la vida media de un fármaco es de 2 horas, ¿qué fracción de la dosis inicial queda después de 6 ¿horas?

149. Un medicamento se administra por vía intravenosa a un paciente a una tasa de r mg/h y se elimina del organismo a una tasa proporcional a la cantidad de fármaco aún presente en el cuerpo, d Plantee y resuelva la ecuación diferencial, suponiendo que no hay ningún fármaco inicialmente presente en el cuerpo.

150. **[T]** ¿Con qué frecuencia debe tomarse un medicamento si su dosis es 3 mg, se elimina a una tasa de $c = 0{,}1$ mg/h y 1 mg es necesario que esté en el torrente sanguíneo en todo momento?

151. Un tanque contiene 1 kilogramo de sal disuelta en 100 litros de agua. Una solución salina de $0{,}1$ kg de sal/L se bombea en el tanque a una tasa de 2 L/min y se drena a la misma tasa. Calcule la concentración de sal en el tiempo t. Supongamos que el tanque está bien mezclado.

152. Un tanque que contiene 10 kilogramos de sal disuelta en 1.000 litros de agua se le bombean dos soluciones salinas. La primera solución de $0{,}2$ kg de sal/L se bombea a una tasa de 20 L/min y la segunda solución de $0{,}05$ kg de sal/L se bombea a una tasa de 5 L/min. El tanque drena a 25 L/min. Supongamos que el tanque está bien mezclado. Calcule la concentración de sal en el tiempo t.

153. **[T]** Para el problema anterior, calcule la cantidad de sal que hay en el tanque 1 hora después del inicio del proceso.

154. La ley de Torricelli establece que para un tanque de agua con un agujero en el fondo que tiene una sección transversal de A y con una altura de agua h por encima del fondo del tanque, la tasa de cambio del volumen de agua que fluye del tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua, según $\frac{dV}{dt} = -A\sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Tenga en cuenta que $\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}$. Resuelva el problema de valor inicial resultante para la altura del agua, suponiendo que el tanque tiene un agujero de radio 2 pies. La altura inicial del agua es 100 pies.

155. Para el problema anterior, determine el tiempo que tarda el tanque en vaciarse.

Para los siguientes problemas, utilice la ley del enfriamiento de Newton.

156. La base líquida de un helado tiene una temperatura inicial de $200°F$ antes de colocarla en un congelador con una temperatura constante de $0°F$. Después de 1 hora, la temperatura de la base del helado ha disminuido a $140°F$. Formule y resuelva el problema de valor inicial para determinar la temperatura del helado.

157. **[T]** La base líquida de un helado tiene una temperatura inicial de $210°F$ antes de colocarla en un congelador con una temperatura constante de $20°F$. Después de 2 horas, la temperatura de la base del helado ha disminuido a $170°F$. ¿A qué hora estará listo el helado para comerlo? (Supongamos que $30°F$ es la temperatura óptima para comerlo).

158. **[T]** Está organizando una fiesta de helados. La temperatura exterior es $80\ °F$ y el helado está a $10°F$. Después de 10 minutos, la temperatura del helado ha aumentado $10°F$. ¿Cuánto tiempo más puede esperar antes de que el helado se derrita a $40°F$?

159. Tiene una taza de café a una temperatura de $70°C$ y la temperatura ambiente en la habitación es $20°C$. Si suponemos una tasa de enfriamiento k de $0{,}125$, escriba y resuelva la ecuación diferencial para describir la temperatura del café con respecto al tiempo.

160. **[T]** Tiene una taza de café a una temperatura de $70°C$ que coloca en el exterior, donde la temperatura ambiente es $0°C$. Después de 5 minutos, ¿cuánto se ha enfriado el café?

161. Tiene una taza de café a una temperatura de $70°C$ y vierte inmediatamente 1 porción de leche por 5 porciones de café. La leche está inicialmente a una temperatura de $1°C$. Escriba y resuelva la ecuación diferencial que determina la temperatura de este café.

162. Tiene una taza de café a una temperatura de $70°C$, que deja enfriar 10 minutos antes de verter la misma cantidad de leche a $1°C$ como en el problema anterior. ¿Cómo se compara la temperatura con la taza anterior después de 10 minutos?

163. Resuelva el problema genérico $y' = ay + b$ con condición inicial $y(0) = c$.

164. Demuestre la ecuación básica de interés compuesto continuo. Si suponemos un depósito inicial de P_0 y una tasa de interés de r, plantee y resuelva una ecuación para el interés compuesto continuo.

165. Supongamos una cantidad inicial de nutrientes de I kilogramos en un tanque con L litros. Supongamos una concentración de c kg/L que se bombea a una tasa de r L/min. El tanque está bien mezclado y se vacía a una tasa de r L/min. Halle la ecuación que describe la cantidad de nutrientes en el tanque.

166. Las hojas se acumulan en el suelo del bosque a una tasa de 2 g/cm^2/año y también se descomponen a una tasa de $90\ \%$ por año. Escriba una ecuación diferencial que determine el número de gramos de hojarasca por centímetro cuadrado de suelo forestal, suponiendo que en el tiempo 0 no hay hojarasca en el suelo. ¿Se acerca esta cantidad a un valor estable? ¿Cuál es ese valor?

167. Las hojas se acumulan en el suelo del bosque a una tasa de 4 g/cm^2/año. Estas hojas se descomponen a una tasa de $10\ \%$ por año. Escriba una ecuación diferencial que determine el número de gramos de hojarasca por centímetro cuadrado de suelo forestal. ¿Se acerca esta cantidad a un valor estable? ¿Cuál es ese valor?

4.4 La ecuación logística

Objetivos de aprendizaje

4.4.1 Describir el concepto de capacidad de carga ambiental en el modelo logístico de crecimiento de la población.
4.4.2 Dibujar un campo de direcciones para una ecuación logística e interpretar las curvas solución.
4.4.3 Resolver una ecuación logística e interpretar los resultados.

Las ecuaciones diferenciales pueden utilizarse para representar el tamaño de una población a medida que varía en el tiempo. Esto lo vimos en un capítulo anterior en la sección de crecimiento y decaimiento exponencial, que es el modelo más simple. Un modelo más realista incluye otros factores que afectan al crecimiento de la población. En esta sección, estudiamos la ecuación diferencial logística y vemos cómo se aplica al estudio de la dinámica de poblaciones en el contexto de la biología.

Crecimiento de la población y capacidad de carga

Para modelar el crecimiento de la población mediante una ecuación diferencial, primero tenemos que introducir algunas variables y términos relevantes. La variable t. representará el tiempo. Las unidades de tiempo pueden ser horas, días, semanas, meses o incluso años. Cualquier problema dado debe especificar las unidades utilizadas en ese problema en particular. La variable P representará a la población. Como la población varía con el tiempo, se entiende que es una función del tiempo. Por lo tanto, utilizamos la notación $P(t)$ para la población en función del tiempo. Si $P(t)$ es una función diferenciable, entonces la primera derivada $\frac{dP}{dt}$ representa la tasa instantánea de cambio de la población en función del tiempo.

En Crecimiento y decaimiento exponencial, estudiamos el crecimiento y decaimiento exponencial de poblaciones y sustancias radiactivas. Un ejemplo de función de crecimiento exponencial es $P(t) = P_0 e^{rt}$. En esta función, $P(t)$ representa la población en el momento t, P_0 representa la **población inicial** (población en el tiempo $t = 0$), y la constante $r > 0$ se denomina **tasa de crecimiento**. La Figura 4.18 muestra un gráfico de $P(t) = 100e^{0{,}03t}$. Aquí $P_0 = 100$ y $r = 0{,}03$.

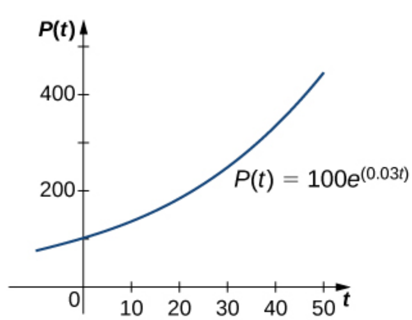


Figura 4.18 Un modelo de crecimiento exponencial de la población.

Podemos comprobar que la función $P(t) = P_0 e^{rt}$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = rP, \quad P(0) = P_0.$$

Esta ecuación diferencial tiene una interpretación interesante. El lado izquierdo representa la tasa de aumento (o disminución) de la población. El lado derecho es igual a una constante positiva multiplicada por la población actual. Por lo tanto, la ecuación diferencial establece que la tasa de aumento de la población es proporcional a la población en ese tiempo. Además, afirma que la constante de proporcionalidad nunca cambia.

Un problema de esta función es su predicción de que, a medida que pasa el tiempo, la población crece sin límites. Esto es poco realista en el mundo real. Diversos factores limitan la tasa de crecimiento de una población concreta, como la tasa de natalidad, la tasa de mortalidad, el suministro de alimentos, los depredadores, etc. La constante de crecimiento r suele tener en cuenta las tasas de natalidad y mortalidad, pero ninguno de los demás factores, y puede interpretarse como una tasa de crecimiento porcentual neta (natalidad menos mortalidad) por unidad de tiempo. Una pregunta natural es si la tasa de crecimiento de la población se mantiene constante o si cambia con el tiempo. Los biólogos han comprobado que, en muchos sistemas biológicos, la población crece hasta que se alcanza una determinada población en estado estacionario. Esta posibilidad no se tiene en cuenta con el crecimiento exponencial. Sin embargo, el concepto de capacidad de carga permite la posibilidad de que en una zona determinada solo pueda prosperar un cierto número de un organismo o animal determinado sin que se produzcan problemas de recursos.

Definición

La **capacidad de carga** de un organismo en un ambiente determinado se define como la población máxima de ese organismo que el ambiente puede sostener indefinidamente.

Utilizamos la variable K para denotar la capacidad de carga. La tasa de crecimiento está representada por la variable r. Utilizando estas variables, podemos definir la ecuación diferencial logística.

Definición

Supongamos que K representa la capacidad de carga de un organismo concreto en un ambiente determinado, y que r es un número real que representa la tasa de crecimiento. La función $P(t)$ representa la población de este organismo en función del tiempo t, y la constante P_0 representa la población inicial (población del organismo en el tiempo $t = 0$). Entonces la **ecuación diferencial logística** es

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \qquad (4.8)$$

MEDIOS

Consulte este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_logisticEq) para obtener más información sobre la ecuación logística.

La ecuación logística fue publicada por primera vez por Pierre Verhulst en 1845. Esta ecuación diferencial se puede acoplar con la condición inicial $P(0) = P_0$ para formar un problema de valor inicial para $P(t)$.

Supongamos que la población inicial es pequeña en relación con la capacidad de carga. Entonces $\frac{P}{K}$ es pequeña, posiblemente cercana a cero. Por lo tanto, la cantidad entre paréntesis en el lado derecho de la Ecuación 4.8 está cerca de 1, y el lado derecho de esta ecuación está cerca de rP. Si $r > 0$, entonces la población crece rápidamente, asemejándose a un crecimiento exponencial.

Sin embargo, a medida que la población crece, el cociente $\frac{P}{K}$ también crece, porque K es constante. Si la población se mantiene por debajo de la capacidad de carga, entonces $\frac{P}{K}$ es menor que 1, así que $1 - \frac{P}{K} > 0$. Por lo tanto, el lado derecho de la Ecuación 4.8 sigue siendo positivo, pero la cantidad entre paréntesis se reduce y, en consecuencia, la tasa de crecimiento disminuye. Si $P = K$ entonces el lado derecho es igual a cero, y la población no cambia.

Supongamos ahora que la población comienza con un valor superior a la capacidad de carga. Entonces $\frac{P}{K} > 1$, y $1 - \frac{P}{K} < 0$. Entonces el lado derecho de la Ecuación 4.8 es negativo, y la población disminuye. Siempre que $P > K$, la población disminuye. En realidad nunca llega a K porque $\frac{dP}{dt}$ será cada vez más pequeña, pero la población se acerca a

la capacidad de carga a medida que t se acerca al infinito. Este análisis puede representarse visualmente mediante una línea de fase. Una **línea de fase** describe el comportamiento general de una solución de una ecuación diferencial autónoma, en función de la condición inicial. Para el caso de una capacidad de carga en la ecuación logística, la línea de fase es como se muestra en la Figura 4.19.



Figura 4.19 Una línea de fase para la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$.

Esta línea de fase muestra que cuando P es menor que cero o mayor que K, la población disminuye con el tiempo. Cuando P está entre 0 y K, la población aumenta con el tiempo.

EJEMPLO 4.14

Inicio del capítulo: Examen de la capacidad de carga de una población de ciervos



Figura 4.20 (créditos: modificación del trabajo de Rachel Kramer, Flickr).

Consideremos la población de ciervos de cola blanca (*Odocoileus virginianus*) en el estado de Kentucky. El Departamento de Recursos de Pesca y Vida Silvestre de Kentucky (Kentucky Department of Fish and Wildlife Resources, KDFWR) establece las directrices para la caza y la pesca en el estado. Antes de la temporada de caza de 2004, estimó una población de 900.000 ciervos. Johnson señala: "Una población de ciervos que tiene mucho que comer y no es cazada por los humanos u otros depredadores se duplicará cada tres años" (George Johnson, "The Problem of Exploding Deer Populations Has No Attractive Solutions", enero $12, 2001$, consultado el 9 de abril de 2015, http://www.txtwriter.com/onscience/Articles/deerpops.html). Esta observación corresponde a una tasa de aumento $r = \frac{\ln(2)}{3} = 0{,}2311$, por lo que la tasa de crecimiento aproximada es $23{,}11\ \%$ por año. (Esto supone que la población crece exponencialmente, lo cual es razonable, al menos a corto plazo, con un suministro abundante de alimentos y sin depredadores). El KDFWR también informa sobre las densidades de población de ciervos para 32 condados de Kentucky, cuyo promedio es de aproximadamente 27 ciervos por milla cuadrada. Supongamos que esta es la densidad de ciervos para todo el estado (39.732 millas cuadradas). La capacidad de carga K es 39.732 millas cuadradas por 27 ciervos por milla cuadrada, o $1.072.764$ ciervos.

a. Para esta aplicación, tenemos $P_0 = 900.000$, $K = 1.072.764$, y $r = 0{,}2311$. Sustituya estos valores en la Ecuación 4.8 y plantee el problema de valor inicial.
b. Resuelva el problema de valor inicial de la parte a.
c. Según este modelo, ¿cuál será la población en 3 años? Recordemos que el tiempo de duplicación previsto por

Johnson para la población de ciervos era 3 años. ¿Cómo se comparan estos valores?

d. Supongamos que la población logra alcanzar $1.200.000$ ciervos. ¿Qué predice la ecuación logística que ocurrirá con la población en este escenario?

Solución

a. El problema de valor inicial es
$\frac{dP}{dt} = 0{,}2311P\left(1-\frac{P}{1.072.764}\right), \quad P(0) = 900.000.$

b. La ecuación logística es una ecuación diferencial autónoma, por lo que podemos utilizar el método de separación de variables.
Paso 1: Si el lado derecho es igual a cero, se obtiene $P = 0$ y $P = 1.072.764$. Esto significa que si la población comienza en cero nunca cambiará, y si comienza en la capacidad de carga, nunca cambiará.
Paso 2: Reescriba la ecuación diferencial y multiplique ambos lados por

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= 0{,}2311P\left(\frac{1.072.764-P}{1.072.764}\right) \\ dP &= 0{,}2311P\left(\frac{1.072.764-P}{1.072.764}\right)dt. \end{aligned}$$

Divida ambos lados entre $P(1.072.764 - P)$:

$$\frac{dP}{P(1.072.764 - P)} = \frac{0{,}2311}{1.072.764}dt.$$

Paso 3: Integre ambos lados de la ecuación utilizando la descomposición de fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(1.072.764 - P)} &= \int \frac{0{,}2311}{1.072.764}dt \\ \frac{1}{1.072.764}\int\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{1.072.764 - P}\right)dP &= \frac{0{,}2311t}{1.072.764} + C \\ \frac{1}{1.072.764}(\ln|P| - \ln|1.072.764 - P|) &= \frac{0{,}2311t}{1.072.764} + C. \end{aligned}$$

Paso 4: Multiplique ambos lados por $1.072.764$ y utilice la regla del cociente para los logaritmos:

$$\ln\left|\frac{P}{1.072.764 - P}\right| = 0{,}2311t + C_1.$$

Aquí $C_1 = 1.072.764C$. A continuación potencie ambos lados y elimine el valor absoluto:

$$\begin{aligned} e^{\ln\left|\frac{P}{1.072.764-P}\right|} &= e^{0{,}2311t+C_1} \\ \left|\frac{P}{1.072.764-P}\right| &= C_2e^{0{,}2311t} \\ \frac{P}{1.072.764-P} &= C_2e^{0{,}2311t}. \end{aligned}$$

Aquí $C_2 = e^{C_1}$ pero después de eliminar el valor absoluto, también puede ser negativo. Ahora resuelva para:

$$\begin{aligned} P &= C_2e^{0{,}2311t}(1.072.764 - P). \\ P &= 1.072.764C_2e^{0{,}2311t} - C_2Pe^{0{,}2311t} \\ P + C_2Pe^{0{,}2311t} &= 1.072.764C_2e^{0{,}2311t} \\ P\left(1 + C_2e^{0{,}2311t}\right) &= 1.072.764C_2e^{0{,}2311t} \\ P(t) &= \frac{1.072.764C_2e^{0{,}2311t}}{1+C_2e^{0{,}2311t}}. \end{aligned}$$

Paso 5: Para determinar el valor de C_2, en realidad es más fácil retroceder un par de pasos hasta donde se definió C_2. En particular, utilice la ecuación

$$\frac{P}{1.072.764 - P} = C_2e^{0{,}2311t}.$$

La condición inicial es $P(0) = 900.000$. Sustituya P con 900.000 y t con cero:

$$\begin{aligned}\frac{P}{1.072.764-P} &= C_2 e^{0,2311t}\\ \frac{900.000}{1.072.764-900.000} &= C_2 e^{0,2311(0)}\\ \frac{900.000}{172.764} &= C_2\\ C_2 &= \frac{25.000}{4.799} \approx 5,209.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}P(t) &= \frac{1.072.764\left(\frac{25.000}{4.799}\right)e^{0,2311t}}{1+\left(\frac{25.000}{4.799}\right)e^{0,2311t}}\\ &= \frac{1.072.764(25.000)e^{0,2311t}}{4.799+25.000e^{0,2311t}}.\end{aligned}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre 25.000 da

$$P(t) = \frac{1.072.764e^{0,2311t}}{0,19196 + e^{0,2311t}}.$$

La Figura 4.21 es un gráfico de esta ecuación

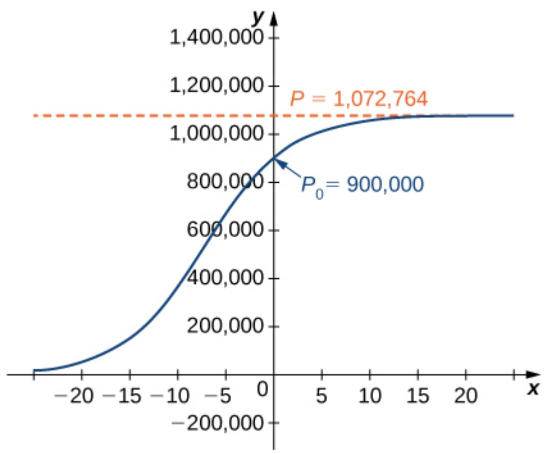


Figura 4.21 Curva logística para la población de ciervos con una población inicial de 900.000 ciervos.

c. Con este modelo podemos predecir la población en 3 años.

$$P(3) = \frac{1.072.764e^{0,2311(3)}}{0,19196 + e^{0,2311(3)}} \approx 978.830 \text{ ciervos}$$

Esto es mucho menos que el doble de la población inicial de 900.000. Recuerde que el tiempo de duplicación se basa en el supuesto de que la tasa de crecimiento nunca cambia, pero el modelo logístico tiene en cuenta esta posibilidad.

d. Si la población alcanzara 1.200.000 ciervos, entonces el nuevo problema de valor inicial sería

$$\frac{dP}{dt} = 0,2311P\left(1-\frac{P}{1.072.764}\right), \quad P(0) = 1.200.000.$$

La solución general de la ecuación diferencial seguiría siendo la misma

$$P(t) = \frac{1.072.764C_2 e^{0,2311t}}{1 + C_2 e^{0,2311t}}$$

Para determinar el valor de la constante, vuelva a la ecuación

$$\frac{P}{1.072.764 - P} = C_2 e^{0,2311t}.$$

Sustituyendo los valores $t = 0$ y $P = 1.200.000$, se obtiene

$$\begin{aligned} C_2 e^{0,2311(0)} &= \frac{1.200.000}{1.072.764 - 1.200.000} \\ C_2 &= -\frac{100.000}{10.603} \approx -9{,}431. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1.072.764 C_2 e^{0,2311t}}{1 + C_2 e^{0,2311t}} \\ &= \frac{1.072.764\left(-\frac{100.000}{10.603}\right) e^{0,2311t}}{1 + \left(-\frac{100.000}{10.603}\right) e^{0,2311t}} \\ &= -\frac{107.276.400.000 e^{0,2311t}}{100.000 e^{0,2311t} - 10.603} \\ &\approx \frac{10.117.551 e^{0,2311t}}{9{,}43129 e^{0,2311t} - 1}. \end{aligned}$$

Esta ecuación se representa gráficamente en la Figura 4.22.

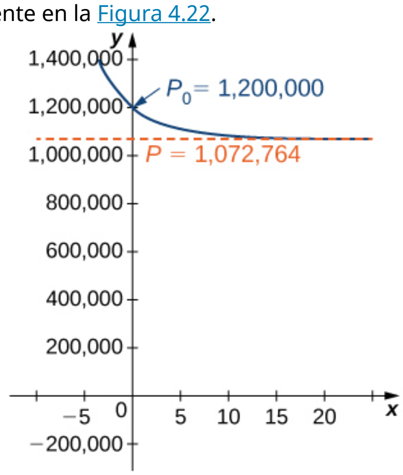


Figura 4.22 Curva logística para la población de ciervos con una población inicial de $1.200.000$ ciervos.

Resolución de la ecuación diferencial logística

La ecuación diferencial logística es una ecuación diferencial autónoma, por lo que podemos utilizar la separación de variables para hallar la solución general, como acabamos de hacer en el Ejemplo 4.14.

Paso 1: Si el lado derecho es igual a cero, se obtiene $P = 0$ y $P = K$ como soluciones constantes. La primera solución indica que cuando no hay organismos presentes, la población nunca crecerá. La segunda solución indica que cuando la población comienza en la capacidad de carga, nunca cambiará.

Paso 2: Reescriba la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{dP}{dt} = \frac{rP(K-P)}{K}.$$

A continuación, multiplique ambos lados por dt y divida ambos lados entre $P(K-P)$. Esto lleva a

$$\frac{dP}{P(K-P)} = \frac{r}{K} dt.$$

Multiplique ambos lados de la ecuación por K e integre:

$$\int \frac{K}{P(K-P)} dP = \int r dt.$$

El lado izquierdo de esta ecuación puede integrarse utilizando la descomposición en fracciones parciales. Le dejamos que verifique que

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}.$$

Entonces la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} dP &= \int r dt \\ \ln|P| - \ln|K-P| &= rt + C \\ \ln\left|\frac{P}{K-P}\right| &= rt + C. \end{aligned}$$

Ahora potencie ambos lados de la ecuación para eliminar el logaritmo natural:

$$\begin{aligned} e^{\ln\left|\frac{P}{K-P}\right|} &= e^{rt+C} \\ \left|\frac{P}{K-P}\right| &= e^C e^{rt}. \end{aligned}$$

Definimos $C_1 = e^c$ y, observando que $K, P > 0$ y $P < K$, de modo que $\frac{P}{K-P} > 0$ podemos eliminar el signo del valor absoluto, de modo que la ecuación se convierte en

$$\frac{P}{K-P} = C_1 e^{rt}. \tag{4.9}$$

Para resolver esta ecuación para $P(t)$, multiplique primero ambos lados por $K - P$ y reúna los términos que contienen P en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\begin{aligned} P &= C_1 e^{rt}(K-P) \\ P &= C_1 K e^{rt} - C_1 P e^{rt} \\ P + C_1 P e^{rt} &= C_1 K e^{rt}. \end{aligned}$$

A continuación, factorice P del lado izquierdo y divida ambos lados entre el otro factor:

$$\begin{aligned} P\left(1 + C_1 e^{rt}\right) &= C_1 K e^{rt} \\ P(t) &= \frac{C_1 K e^{rt}}{1 + C_1 e^{rt}}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

El último paso es determinar el valor de C_1. La forma más sencilla de hacerlo es sustituir $t = 0$ y P_0 en vez de P en la Ecuación 4.9 y resolver para C_1:

$$\begin{aligned} \frac{P}{K-P} &= C_1 e^{rt} \\ \frac{P_0}{K-P_0} &= C_1 e^{r(0)} \\ C_1 &= \frac{P_0}{K-P_0}. \end{aligned}$$

Por último, sustituya la expresión de C_1 en la Ecuación 4.10:

$$P(t) = \frac{C_1 K e^{rt}}{1 + C_1 e^{rt}} = \frac{\frac{P_0}{K-P_0} K e^{rt}}{1 + \frac{P_0}{K-P_0} e^{rt}}$$

Ahora multiplique el numerador y el denominador del lado derecho por $(K - P_0)$ y simplifique:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\frac{P_0}{K-P_0} K e^{rt}}{1 + \frac{P_0}{K-P_0} e^{rt}} \\ &= \frac{\frac{P_0}{K-P_0} K e^{rt}}{1 + \frac{P_0}{K-P_0} e^{rt}} \cdot \frac{K-P_0}{K-P_0} \\ &= \frac{P_0 K e^{rt}}{(K-P_0) + P_0 e^{rt}}. \end{aligned}$$

Enunciamos este resultado como un teorema.

Teorema 4.2

Solución de la ecuación diferencial logística

Consideremos la ecuación diferencial logística sujeta a una población inicial de P_0 con capacidad de carga K y tasa de crecimiento r. La solución del correspondiente problema de valor inicial viene dada por

$$P(t) = \frac{P_0 K e^{rt}}{(K - P_0) + P_0 e^{rt}}. \qquad (4.11)$$

Ahora que tenemos la solución del problema de valor inicial, podemos elegir valores para $P_0, r,$ y K y estudiar la curva de solución. Por ejemplo, en el Ejemplo 4.14 utilizamos los valores $r = 0{,}2311,\ K = 1.072.764,$ y una población inicial de 900.000 ciervos. Esto nos lleva a la solución

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0 K e^{rt}}{(K-P_0)+P_0 e^{rt}} \\ &= \frac{900.000(1.072.764)e^{0{,}2311t}}{(1.072.764-900.000)+900.000e^{0{,}2311t}} \\ &= \frac{900.000(1.072.764)e^{0{,}2311t}}{172.764+900.000e^{0{,}2311t}}. \end{aligned}$$

Dividiendo la parte superior e inferior entre 900.000 da

$$P(t) = \frac{1.072.764e^{0{,}2311t}}{0{,}19196 + e^{0{,}2311t}}.$$

Esto es lo mismo que la solución original. El gráfico de esta solución se muestra de nuevo en azul en la Figura 4.23, superpuesto al gráfico del modelo de crecimiento exponencial con población inicial 900.000 y tasa de crecimiento $0{,}2311$ (que aparece en verde). La línea roja discontinua representa la capacidad de carga, y es una asíntota horizontal para la solución de la ecuación logística.

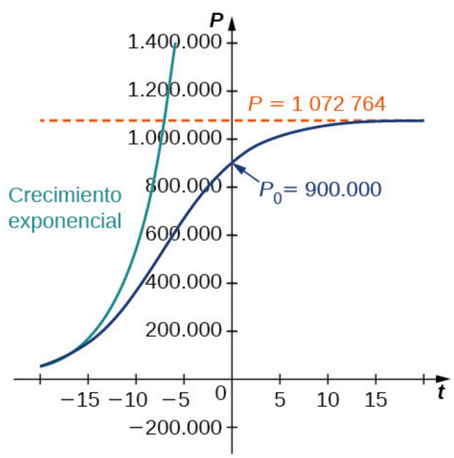


Figura 4.23 Una comparación del crecimiento exponencial frente al logístico para la misma población inicial de 900.000 organismos y tasa de crecimiento de $23{,}11\ \%$.

Trabajando bajo el supuesto de que la población crece según la ecuación diferencial logística, este gráfico predice que aproximadamente 20 años antes (1984), el crecimiento de la población fue muy cercano al exponencial. La tasa de crecimiento neto en ese momento habría sido de alrededor de $23{,}1\ \%$ por año. A medida que pasa el tiempo, los dos gráficos se separan. Esto sucede porque la población aumenta, y la ecuación diferencial logística establece que la tasa de crecimiento disminuye a medida que aumenta la población. En el momento en que se midió la población (2004), estaba cerca de la capacidad de carga, y la población estaba empezando a estabilizarse.

La solución de la ecuación diferencial logística tiene un punto de inflexión. Para hallar este punto, se establece la segunda derivada igual a cero:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0 K e^{rt}}{(K-P_0)+P_0 e^{rt}} \\ P'(t) &= \frac{r P_0 K (K-P_0) e^{rt}}{((K-P_0)+P_0 e^{rt})^2} \\ P''(t) &= \frac{r^2 P_0 K (K-P_0)^2 e^{rt} - r^2 P_0{}^2 K (K-P_0) e^{2rt}}{((K-P_0)+P_0 e^{rt})^3} \\ &= \frac{r^2 P_0 K (K-P_0) e^{rt} ((K-P_0)-P_0 e^{rt})}{((K-P_0)+P_0 e^{rt})^3}. \end{aligned}$$

Igualando el numerador a cero,

$$r^2 P_0 K (K - P_0) e^{rt} \left((K - P_0) - P_0 e^{rt}\right) = 0.$$

Siempre que $P_0 \neq K$, la cantidad total antes e incluyendo e^{rt} es distinta de cero, así que podemos dividirla:

$$(K - P_0) - P_0 e^{rt} = 0.$$

Resolviendo para t,

$$\begin{aligned} P_0 e^{rt} &= K - P_0 \\ e^{rt} &= \frac{K-P_0}{P_0} \\ \ln e^{rt} &= \ln \frac{K-P_0}{P_0} \\ rt &= \ln \frac{K-P_0}{P_0} \\ t &= \frac{1}{r} \ln \frac{K-P_0}{P_0}. \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que si $P_0 > K$, entonces esta cantidad es indefinida, y el gráfico no tiene un punto de inflexión. En el gráfico logístico, el punto de inflexión puede verse como el punto en el que el gráfico cambia de cóncavo hacia arriba a cóncavo hacia abajo. Aquí es donde empieza a producirse la "nivelación", porque la tasa de crecimiento neto se hace más lenta a medida que la población empieza a acercarse a la capacidad de carga.

4.14 Se observa que una población de conejos en una pradera es de 200 conejos para el tiempo $t = 0$. Al cabo de un mes, se observa que la población de conejos ha aumentado en $4\ \%$. Si utilizamos una población inicial de 200 y una tasa de crecimiento de $0{,}04$, con una capacidad de carga de 750 conejos,

a. Escriba la ecuación diferencial logística y la condición inicial para este modelo.
b. Dibuje un campo de pendiente para esta ecuación diferencial logística y dibuje la solución correspondiente a una población inicial de 200 conejos.
c. Resuelva el problema de valor inicial para $P(t)$.
d. Utilice la solución para predecir la población después de 1 año.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Proyecto estudiantil: Ecuación logística con un umbral de población

Una mejora del modelo logístico incluye un **umbral de población**. El umbral de población se define como la población mínima necesaria para que la especie sobreviva. Utilizamos la variable T para representar el umbral de población. Una ecuación diferencial que incorpora tanto el umbral de población T y la capacidad de carga K es

$$\frac{dP}{dt} = -rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{P}{T}\right) \tag{4.12}$$

donde r representa la tasa de crecimiento, como antes.

1. El umbral de población es útil para los biólogos y puede utilizarse para determinar si una especie determinada debe incluirse en la lista de especies en peligro. Un grupo de investigadores australianos afirma haber determinado el umbral de población para que cualquier especie sobreviva: 5.000 adultos. (Catherine Clabby, "A

Magic Number", *American Scientist* 98(1): 24, doi:10.1511/2010.82.24., consultado el 9 de abril de 2015, http://www.americanscientist.org/issues/pub/a-magic-number). Por lo tanto, utilizamos $T = 5.000$ como umbral de población en este proyecto. Supongamos que la capacidad de carga ambiental en Montana para los alces es 25.000. Plantee la Ecuación 4.12 utilizando la capacidad de carga de 25.000 y el umbral de población de 5.000. Supongamos una tasa de crecimiento neto anual de $18\ \%$.

2. Dibuje el campo de direcciones para la ecuación diferencial del paso 1, junto con varias soluciones para diferentes poblaciones iniciales. ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación diferencial? ¿A qué corresponden estas soluciones en el modelo de población original (es decir, en un contexto biológico)?
3. ¿Cuál es la población límite para cada población inicial que ha elegido en el paso 2? (Pista: Utilice el campo de pendiente para ver lo que sucede para varias poblaciones iniciales, es decir, busque las asíntotas horizontales de sus soluciones).
4. Esta ecuación puede resolverse mediante el método de separación de variables. Sin embargo, es muy difícil obtener la solución como una función explícita de t. Si utilizamos una población inicial de 18.000 alces, resuelva el problema de valor inicial y exprese la solución como una función implícita de t, o resuelva el problema general de valor inicial, hallando una solución en términos de $r, K, T,$ y P_0.

SECCIÓN 4.4 EJERCICIOS

Para los siguientes problemas, considere la ecuación logística en la forma $P' = CP - P^2$. Dibuje el campo de direcciones y halle la estabilidad de los equilibrios.

168. $C = 3$

169. $C = 0$

170. $C = -3$

171. Resuelva la ecuación logística para $C = 10$ y una condición inicial de $P(0) = 2$.

172. Resuelva la ecuación logística para $C = -10$ y una condición inicial de $P(0) = 2$.

173. Una población de ciervos dentro de un parque tiene una capacidad de carga de 200 y una tasa de crecimiento de $2\ \%$. Si la población inicial es de 50 ciervos, ¿cuál es la población de ciervos en un tiempo dado?

174. Una población de ranas en un estanque tiene una tasa de crecimiento de $5\ \%$. Si la población inicial es de 1.000 ranas y la capacidad de carga es 6.000, ¿cuál es la población de ranas en un tiempo dado?

175. **[T]** Las bacterias crecen a una tasa de $20\ \%$ por hora en una placa de Petri. Si inicialmente hay una bacteria y una capacidad de carga de 1 millón de células, ¿cuánto tiempo tarda en llegar a 500.000 células?

176. **[T]** Los conejos de un parque tienen una población inicial de 10 y crece a una tasa de $4\ \%$ por año. Si la capacidad de carga es 500, ¿en qué tiempo la población alcanza 100 conejos?

177. **[T]** Dos monos son colocados en una isla. Después de 5 años, hay 8 monos, y la capacidad de carga estimada es de 25 monos. ¿Cuándo alcanza la población 16 monos?

178. **[T]** Se construye un santuario de mariposas que puede albergar 2000 mariposas, y 400 mariposas se trasladan inicialmente. Si después de 2 meses hay ahora 800 mariposas, ¿cuándo llega la población a $1{,}500$ mariposas?

Los siguientes problemas consideran la ecuación logística con un término añadido de agotamiento, ya sea por muerte o por emigración.

179. **[T]** La población de truchas en un estanque está dada por $P' = 0{,}4P\left(1 - \frac{P}{10.000}\right) - 400$, donde 400 truchas son capturadas al año. Utilice tu calculadora o un programa de computadora para dibujar un campo de direcciones y dibuje algunas soluciones de ejemplo. ¿Qué espera del comportamiento?

180. En el problema anterior, ¿cuáles son las estabilidades de los equilibrios $0 < P_1 < P_2$?

181. **[T]** Para el problema anterior, utilice un software para generar un campo de direcciones para el valor $f = 400$. ¿Cuáles son las estabilidades de los equilibrios?

182. **[T]** Para los problemas anteriores, utilice un software para generar un campo de direcciones para el valor $f = 600$. ¿Cuáles son las estabilidades de los equilibrios?

183. **[T]** Para los problemas anteriores, considere el caso en el que se agrega un cierto número de peces al estanque, o $f = -200$. ¿Cuáles son los equilibrios no negativos y sus estabilidades?

Es más probable que la cantidad de pesca se rija por el número actual de peces presentes, por lo que en vez de un número constante de peces capturados, la tasa es proporcional al número actual de peces, con la constante de proporcionalidad k, como

$$P' = 0{,}4P\left(1 - \frac{P}{10.000}\right) - kP.$$

184. **[T]** Para el problema de pesca anterior, dibuje un campo de direcciones suponiendo que $k = 0{,}1$. Dibuje algunas soluciones que presentan este comportamiento. ¿Cuáles son los equilibrios y cuáles son sus estabilidades?

185. **[T]** Utilice un software o una calculadora para dibujar campos de direcciones para $k = 0{,}4$. ¿Cuáles son los equilibrios no negativos y sus estabilidades?

186. **[T]** Utilice un software o una calculadora para dibujar campos de direcciones para $k = 0{,}6$. ¿Cuáles son los equilibrios y sus estabilidades?

187. Resuelva esta ecuación, si asumimos un valor de $k = 0{,}05$ y una condición inicial de 2000 peces.

188. Resuelva esta ecuación, si asumimos un valor de $k = 0{,}05$ y una condición inicial de 5.000 peces.

Los siguientes problemas agregan un valor umbral mínimo para que la especie sobreviva, T, que cambia la ecuación diferencial a $P'(t) = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{T}{P}\right)$.

189. Dibuje el campo de direcciones de la ecuación logística del umbral, suponiendo que $K = 10, r = 0{,}1, T = 2$. ¿Cuándo sobrevive la población? ¿Cuándo se extingue?

190. Para el problema anterior, resuelva la ecuación del umbral logístico, suponiendo la condición inicial $P(0) = P_0$.

191. Los tigres de Bengala en un parque de conservación tienen una capacidad de carga de 100 y necesitan un mínimo de 10 para sobrevivir. Si crecen en población a una tasa de $1\ \%$ por año, con una población inicial de 15 tigres, calcule el número de tigres presentes.

192. Un bosque con lémures de cola anillada en Madagascar tiene el potencial de mantener 5.000 individuos, y la población de lémures crece a una tasa de $5\ \%$ por año. Un mínimo de 500 individuos es necesario para que los lémures sobrevivan. Dada una población inicial de 600 lémures, calcule la población de lémures.

193. La población de leones de montaña en el norte de Arizona tiene una capacidad de carga estimada de 250 y crece a una tasa de $0{,}25\ \%$ por año y debe haber 25 para que la población sobreviva. Con una población inicial de 30 leones de montaña, ¿cuántos años serán necesarios para que los leones de montaña salgan de la lista de especies en peligro de extinción (al menos 100)?

Las siguientes preguntas consideran la ecuación de Gompertz, una modificación para el crecimiento logístico, que se utiliza a menudo para modelar el crecimiento del cáncer, específicamente el número de células tumorales.

194. La ecuación de Gompertz está dada por $P(t)' = \alpha \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) P(t)$. Dibuje los campos de direcciones para esta ecuación suponiendo que todos los parámetros son positivos y que $K = 1$.

195. Supongamos que para una población $K = 1.000$ y $\alpha = 0{,}05$. Dibuje el campo de direcciones asociado a esta ecuación diferencial y dibuje algunas soluciones. ¿Cuál es el comportamiento de la población?

196. Resuelva la ecuación de Gompertz para el genérico α y K y $P(0) = P_0$.

197. **[T]** La ecuación de Gompertz se ha utilizado para modelar el crecimiento de los tumores en el cuerpo humano. A partir de una célula tumoral en el día 1 y asumiendo que $\alpha = 0{,}1$ y una capacidad de carga de 10 millones de células, ¿cuánto tiempo tarda en alcanzar la fase de "detección" en 5 millones de células?

198. **[T]** Se estima que la población humana mundial alcanzó 3 mil millones de personas en 1959 y 6 mil millones en 1999. Suponiendo una capacidad de carga de 16 mil millones de seres humanos, escriba y resuelva la ecuación diferencial para el crecimiento logístico, y determine en qué año la población alcanzó 7 mil millones.

199. **[T]** Se estima que la población humana mundial alcanzó 3 mil millones de personas en 1959 y 6 mil millones en 1999. Suponiendo una capacidad de carga de 16 mil millones de seres humanos, escriba y resuelva la ecuación diferencial del crecimiento de Gompertz, y determine en qué año la población alcanzó 7 mil millones. ¿Fue más preciso el crecimiento logístico o el crecimiento de Gompertz, teniendo en cuenta la población mundial alcanzó 7 mil millones el 31 de octubre de 2011?

200. Demuestre que la población crece más rápidamente cuando alcanza la mitad de la capacidad de carga para la ecuación logística $P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$.

201. ¿Cuándo aumenta más rápido la población en la ecuación logística del umbral $P'(t) = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{T}{P}\right)$?

202. ¿Cuándo aumenta más rápido la población para la ecuación de Gompertz $P(t)' = \alpha \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right)P(t)$?

A continuación se muestra una tabla de las poblaciones de grullas trompeteras de 1940 a 2000. La población se recuperó desde su casi extinción tras el inicio de los esfuerzos de conservación. Los siguientes problemas consideran la aplicación de modelos de población para ajustar los datos. Supongamos una capacidad de carga de 10.000 grullas. Ajuste los datos asumiendo los años desde 1940 (por lo que su población inicial en el momento 0 sería 22 grullas).

Fuente: https://www.savingcranes.org/images/stories/site_images/conservation/whooping_crane/pdfs/historic_wc_numbers.pdf

Año (años desde el inicio de la conservación)	Población de grullas trompeteras
1940 (0) grandes.	22
1950 (10) grandes.	31
1960 (20) grandes.	36
1970 (30) grandes.	57
1980 (40) grandes.	91
1990 (50) grandes.	159
2000 (60) grandes.	256

203. Halle la ecuación y el parámetro r que mejor se ajustan a los datos de la ecuación logística.

204. Halle la ecuación y los parámetros r y T que mejor se ajustan a los datos para la ecuación logística del umbral.

205. Halle la ecuación y el parámetro α que mejor se ajustan a los datos de la ecuación de Gompertz.

206. Grafique las tres soluciones y los datos en el mismo gráfico. ¿Qué modelo parece ser más preciso?

207. Utilizando las tres ecuaciones halladas en los problemas anteriores, estime la población en 2010 (año 70 después de la conservación). La población real medida en ese momento era 437. ¿Qué modelo es más preciso?

4.5 Ecuaciones lineales de primer orden

Objetivos de aprendizaje

4.5.1 Escribir una ecuación diferencial lineal de primer orden en forma estándar.
4.5.2 Hallar un factor de integración y utilizarlo para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden.
4.5.3 Resolver problemas aplicados que impliquen ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Previamente, estudiamos una aplicación de una ecuación diferencial de primer orden que implicaba resolver la velocidad de un objeto. En particular, si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 ft/s, entonces se plantea un problema de valor inicial que describe la velocidad de la pelota después de t segundos viene dada por

$$\frac{dv}{dt} = -32, \quad v(0) = v_0.$$

Este modelo supone que la única fuerza que actúa sobre la pelota es la gravedad. Ahora añadimos al problema la posibilidad de que la resistencia del aire actúe sobre la pelota.

La resistencia del aire siempre actúa en la dirección opuesta al movimiento. Por lo tanto, si un objeto se eleva, la resistencia del aire actúa en dirección descendente. Si el objeto está cayendo, la resistencia del aire actúa en dirección ascendente (Figura 4.24). No existe una relación exacta entre la velocidad de un objeto y la resistencia del aire que actúa sobre él. Para objetos muy pequeños, la resistencia del aire es proporcional a la velocidad; es decir, la fuerza debida a la resistencia del aire es igual numéricamente a alguna constante k veces v. Para objetos más grandes (p. ej., del tamaño de una pelota de béisbol), dependiendo de la forma, la resistencia del aire puede ser aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad. De hecho, la resistencia del aire puede ser proporcional a $v^{1,5}$, o $v^{0,9}$, o alguna otra potencia de v.

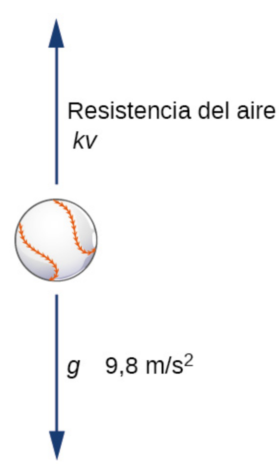


Figura 4.24 Fuerzas que actúan sobre una pelota de béisbol en movimiento: la gravedad actúa en dirección

descendente y la resistencia del aire actúa en dirección opuesta a la del movimiento.

Trabajaremos con la aproximación lineal para la resistencia del aire. Si asumimos $k > 0$, entonces la expresión para la fuerza F_A debido a la resistencia del aire está dada por $F_A = -kv$. Por tanto, la suma de las fuerzas que actúan sobre el objeto es igual a la suma de la fuerza gravitatoria y la fuerza debida a la resistencia del aire. Esto, a su vez, es igual a la masa del objeto multiplicada por su aceleración en el tiempo t (segunda ley de Newton). Esto nos da la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg.$$

Por último, imponemos una condición inicial $v(0) = v_0$, donde v_0 es la velocidad inicial medida en metros por segundo. Esto hace que $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$. El problema de valor inicial se convierta en

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg, \quad v(0) = v_0. \qquad (4.13)$$

La ecuación diferencial de este problema de valor inicial es un ejemplo de ecuación diferencial lineal de primer orden (recuerde que una ecuación diferencial es de primer orden si la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es 1) En esta sección, estudiamos las ecuaciones lineales de primer orden y examinamos un método para hallar una solución general a este tipo de ecuaciones, así como para resolver problemas de valor inicial que las involucran.

Definición

Una ecuación diferencial de primer orden es **lineal** si se puede escribir de la forma

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x), \qquad (4.14)$$

donde $a(x)$, $b(x)$, y $c(x)$ son funciones arbitrarias de x.

Recuerde que la función desconocida y depende de la variable x; es decir, x es la variable independiente y y es la variable dependiente. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son

$$\begin{aligned} \left(3x^2 - 4\right) y' + (x-3)\,y &= \operatorname{sen} x \\ (\operatorname{sen} x)\,y' - (\cos x)\,y &= \cot x \\ 4xy' + (3\ln x)\,y &= x^3 - 4x. \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden son

$$\begin{aligned} (y')^4 - (y')^3 &= (3x-2)(y+4) \\ 4y' + 3y^3 &= 4x - 5 \\ (y')^2 &= \operatorname{sen} y + \cos x. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son no lineales debido a términos como $\left(y'\right)^4$, y^3, etc. Debido a estos términos, es imposible poner estas ecuaciones en la misma forma que la Ecuación 4.14.

Forma estándar

Considere la ecuación diferencial

$$\left(3x^2 - 4\right) y' + (x-3)\,y = \operatorname{sen} x.$$

Nuestro objetivo principal en esta sección es derivar un método de solución para ecuaciones de esta forma. Es útil que el coeficiente de y' sea igual a 1. Para ello, dividimos ambos lados entre $3x^2 - 4$.

$$y' + \left(\frac{x-3}{3x^2-4}\right) y = \frac{\operatorname{sen} x}{3x^2-4}$$

Esto se llama la **forma estándar** de la ecuación diferencial. La utilizaremos más adelante cuando hallemos la solución de una ecuación diferencial lineal general de primer orden. Volviendo a la Ecuación 4.14, podemos dividir ambos lados de la ecuación entre $a(x)$. Esto nos lleva a la ecuación

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}. \qquad (4.15)$$

Ahora defina $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ como $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$. Entonces la Ecuación 4.14 se convierte en

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{4.16}$$

Podemos escribir cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden en esta forma, y esto se conoce como la forma estándar para una ecuación diferencial lineal de primer orden.

EJEMPLO 4.15

Escribir ecuaciones lineales de primer orden en forma estándar

Escriba cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en forma estándar. Identifique $p(x)$ como $q(x)$ para cada ecuación.

a. $y' = 3x - 4y$
b. $\frac{3xy'}{4y-3} = 2$ (aquí $x \neq 0$) grandes.
c. $y = 3y' - 4x^2 + 5$

Solución

a. Añadir $4y$ a ambos lados:

$$y' + 4y = 3x.$$

En esta ecuación, $p(x) = 4$ y $q(x) = 3x$.

b. Multiplique ambos lados por $4y - 3$, y luego reste $8y$ de cada lado:

$$\begin{aligned} \frac{3xy'}{4y-3} &= 2 \\ 3xy' &= 2(4y-3) \\ 3xy' &= 8y - 6 \\ 3xy' - 8y &= -6. \end{aligned}$$

Finalmente, divida ambos lados entre $3x$ para que el coeficiente de y' sea igual a 1:

$$y' - \frac{8}{3x}y = -\frac{2}{x}. \tag{4.17}$$

Esto se permite porque en el planteamiento original de este problema asumimos que $x \neq 0$. (Si $x = 0$ entonces la ecuación original se convierte en $0 = 2$, lo que es claramente una afirmación falsa).
En esta ecuación, $p(x) = -\frac{8}{3x}$ y $q(x) = -\frac{2}{3x}$.

c. Reste y de cada lado y sume $4x^2 - 5$:

$$3y' - y = 4x^2 - 5.$$

A continuación, divida ambos lados entre 3:

$$y' - \frac{1}{3}y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{3}.$$

En esta ecuación, $p(x) = -\frac{1}{3}$ y $q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{3}$.

4.15 Escriba la ecuación $\frac{(x+3)y'}{2x-3y-4} = 5$ en forma estándar e identifique $p(x)$ como $q(x)$.

Factores de integración

Ahora desarrollamos una técnica de solución para cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden. Comenzamos con la forma estándar de una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{4.18}$$

El primer término del lado izquierdo de la Ecuación 4.15 es la derivada de la función desconocida, y el segundo término es el producto de una función conocida por la función desconocida. Esto recuerda en cierto modo a la regla del producto de la sección Reglas de diferenciación (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/3-3-reglas-de-

diferenciacion). Si multiplicamos la Ecuación 4.16 por una función aún por determinar $\mu(x)$, entonces la ecuación se convierte en

$$\mu(x)\, y' + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, q(x). \tag{4.19}$$

El lado izquierdo de la Ecuación 4.18 se puede igualar perfectamente a la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\, g(x)] = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

Si se iguala término a término, se obtiene $y = f(x)$, $g(x) = \mu(x)$, y $g'(x) = \mu(x)\, p(x)$. Tomando la derivada de $g(x) = \mu(x)$ e igualándola al lado derecho de $g'(x) = \mu(x)\, p(x)$ nos lleva a

$$\mu'(x) = \mu(x)\, p(x).$$

Esta es una ecuación diferencial separable de primer orden para $\mu(x)$. Sabemos que $p(x)$ porque aparece en la ecuación diferencial que estamos resolviendo. Separando las variables e integrando se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= p(x) \\
\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx &= \int p(x)\, dx \\
\ln|\mu(x)| &= \int p(x)\, dx + C \\
e^{\ln|\mu(x)|} &= e^{\int p(x)\, dx + C} \\
|\mu(x)| &= C_1 e^{\int p(x)\, dx} \\
\mu(x) &= C_2 e^{\int p(x)\, dx}.
\end{aligned}$$

Aquí C_2 puede ser una constante arbitraria (positiva o negativa). Esto nos lleva a un método general para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden. Primero multiplicamos ambos lados de la Ecuación 4.16 por el **factor de integración** $\mu(x)$. Esto da

$$\mu(x)\, y' + \mu(x)\, p(x)\, y = \mu(x)\, q(x). \tag{4.20}$$

El lado izquierdo de la Ecuación 4.20 se puede reescribir como $\frac{d}{dx}(\mu(x)\, y)$.

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)\, y) = \mu(x)\, q(x). \tag{4.21}$$

A continuación, integre ambos lados de la Ecuación 4.21 con respecto a x.

$$\begin{aligned}
\int \frac{d}{dx}(\mu(x)\, y)\, dx &= \int \mu(x)\, q(x)\, dx \\
\mu(x)\, y &= \int \mu(x)\, q(x)\, dx.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Divida ambos lados de la Ecuación 4.22 entre $\mu(x)$:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\, q(x)\, dx + C\right]. \tag{4.23}$$

Dado que $\mu(x)$ se calculó previamente, ya hemos terminado. Una nota importante sobre la constante de integración C: Puede parecer que somos incoherentes en el uso de la constante de integración. Sin embargo, la integral que implica $p(x)$ es necesaria para hallar un factor de integración para la Ecuación 4.15. Solo se necesita un factor de integración para resolver la ecuación; por lo tanto, es seguro asignar un valor para C para esta integral. Elegimos $C = 0$. Cuando calculamos la integral dentro de los paréntesis en la Ecuación 4.21, es necesario mantener nuestras opciones abiertas para el valor de la constante de integración, porque nuestro objetivo es hallar una familia general de soluciones a la Ecuación 4.15. Este factor de integración garantiza precisamente eso.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

1. Escriba la ecuación en forma estándar e identifique $p(x)$ como $q(x)$.
2. Calcule el factor de integración $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$.
3. Multiplique ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$.
4. Integre ambos lados de la ecuación obtenida en el paso 3, y divida ambos lados entre $\mu(x)$.
5. Si hay una condición inicial, determine el valor de C.

EJEMPLO 4.16

Resolución de una ecuación lineal de primer orden

Halle una solución general para la ecuación diferencial $xy' + 3y = 4x^2 - 3x$. Asuma que $x > 0$.

Solución

1. Para escribir esta ecuación diferencial en forma estándar, divida ambos lados entre x:
$$y' + \frac{3}{x}y = 4x - 3.$$
Por lo tanto $p(x) = \frac{3}{x}$ y $q(x) = 4x - 3$.
2. El factor de integración es $\mu(x) = e^{\int (3/x)\,dx} = e^{3\ln x} = x^3$.
3. Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$ nos da
$$\begin{aligned} x^3y' + x^3\left(\frac{3}{x}\right)y &= x^3(4x - 3) \\ x^3y' + 3x^2y &= 4x^4 - 3x^3 \\ \frac{d}{dx}\left(x^3y\right) &= 4x^4 - 3x^3. \end{aligned}$$
4. Integre ambos lados de la ecuación.
$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}\left(x^3y\right)dx &= \int 4x^4 - 3x^3\,dx \\ x^3y &= \frac{4x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + C \\ y &= \frac{4x^2}{5} - \frac{3x}{4} + Cx^{-3}. \end{aligned}$$
5. No hay valor inicial, por lo que el problema está completo.

Análisis

Habrá notado la condición que se impuso a la ecuación diferencial; es decir, $x > 0$. Para cualquier valor distinto de cero de C, la solución general no está definida en $x = 0$. Además, cuando $x < 0$, el factor de integración cambia. El factor de integración viene dado por la Ecuación 4.19 como $f(x) = e^{\int p(x)dx}$. Para esta $p(x)$ obtenemos

$$e^{\int p(x)\,dx=} e^{\int (3/x)dx} = e^{3\ln|x|} = |x|^3,$$

dado que $x < 0$. El comportamiento de la solución general cambia en $x = 0$ en gran medida por el hecho de que $p(x)$ no se define allí.

4.16 Halle la solución general de la ecuación diferencial $(x - 2)y' + y = 3x^2 + 2x$. Asuma que $x > 2$.

Ahora utilizamos la misma estrategia para hallar la solución a un problema de valor inicial.

EJEMPLO 4.17

Un problema de valor inicial lineal de primer orden

Resuelva el problema de valor inicial

$$y' + 3y = 2x - 1, \quad y(0) = 3.$$

Solución

1. Esta ecuación diferencial ya está en forma estándar con $p(x) = 3$ y $q(x) = 2x - 1$.
2. El factor de integración es $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$.
3. Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$ da

$$\begin{aligned} e^{3x}y' + 3e^{3x}y &= (2x-1)e^{3x} \\ \frac{d}{dx}\left[ye^{3x}\right] &= (2x-1)e^{3x}. \end{aligned}$$

Integre ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}\left[ye^{3x}\right]dx &= \int (2x-1)e^{3x}dx \\ ye^{3x} &= \frac{e^{3x}}{3}(2x-1) - \int \frac{2}{3}e^{3x}dx \\ ye^{3x} &= \frac{e^{3x}(2x-1)}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C \\ y &= \frac{2x-1}{3} - \frac{2}{9} + Ce^{-3x} \\ y &= \frac{2x}{3} - \frac{5}{9} + Ce^{-3x}. \end{aligned}$$

4. Ahora sustituya $x = 0$ y $y = 3$ en la solución general y resuelva para C:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x - \frac{5}{9} + Ce^{-3x} \\ 3 &= \frac{2}{3}(0) - \frac{5}{9} + Ce^{-3(0)} \\ 3 &= -\frac{5}{9} + C \\ C &= \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9} + \frac{32}{9}e^{-3x}.$$

4.17 Resuelva el problema de valor inicial $y' - 2y = 4x + 3 \quad y(0) = -2.$

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Estudiamos dos aplicaciones diferentes de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La primera tiene que ver con la resistencia del aire en relación con los objetos que suben o bajan; la segunda, con un circuito eléctrico. Hay muchas otras aplicaciones, pero la mayoría se resuelve de forma similar.

Caída libre con resistencia del aire

Al principio de esta sección hablamos de la resistencia del aire. El siguiente ejemplo muestra cómo aplicar este concepto para una pelota en movimiento vertical. Hay otros factores que pueden afectar a la fuerza de resistencia del aire, como el tamaño y la forma del objeto, pero los ignoramos aquí.

EJEMPLO 4.18

Una pelota con resistencia del aire

Una pelota de ráquetbol es golpeada directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 2 m/s. La masa de una pelota de ráquetbol es aproximadamente $0{,}0427$ kg. La resistencia del aire actúa sobre la pelota con una fuerza igual numéricamente a $0{,}5v$, donde v representa la velocidad de la pelota en el tiempo t.

a. Calcule la velocidad de la pelota en función del tiempo.
b. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?
c. Si la pelota se golpea desde una altura inicial de 1 metro, ¿qué altura alcanzará?

Solución

a. La masa $m = 0{,}0427\ \text{kg}$, $k = 0{,}5$, y $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. La velocidad inicial es $v_0 = 2$ m/s. Por lo tanto, el problema de valor inicial es

$$0{,}0427\frac{dv}{dt} = -0{,}5v - 0{,}0427\,(9{,}8)\,, \quad v_0 = 2.$$

Dividiendo la ecuación diferencial entre $0{,}0427$ da

$$\frac{dv}{dt} = -11{,}7096v - 9{,}8, \quad v_0 = 2.$$

La ecuación diferencial es lineal. Usar la estrategia de resolución de problemas para ecuaciones diferenciales lineales:

Paso 1. Reescriba la ecuación diferencial como $\frac{dv}{dt} + 11{,}7096v = -9{,}8$. Esto da $p\,(t) = 11{,}7096$ y $q\,(t) = -9{,}8$

Paso 2. El factor de integración es $\mu\,(t) = e^{\int 11{,}7096dt} = e^{11{,}7096t}$.

Paso 3. Multiplique la ecuación diferencial por $\mu\,(t)$:

$$\begin{aligned} e^{11{,}7096t}\frac{dv}{dt} + 11{,}7096ve^{11{,}7096t} &= -9{,}8e^{11{,}7096t} \\ \frac{d}{dt}\left[ve^{11{,}7096t}\right] &= -9{,}8e^{11{,}7096t}. \end{aligned}$$

Paso 4. Integre ambos lados:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}\left[ve^{11{,}7096t}\right]dt &= \int -9{,}8e^{11{,}7096t}dt \\ ve^{11{,}7096t} &= \frac{-9{,}8}{11{,}7096}e^{11{,}7096t} + C \\ v\,(t) &= -0{,}8369 + Ce^{-11{,}7096t}. \end{aligned}$$

Paso 5. Resuelva para C utilizando la condición inicial $v_0 = v\,(0) = 2$:

$$\begin{aligned} v\,(t) &= -0{,}8369 + Ce^{-11{,}7096t} \\ v\,(0) &= -0{,}8369 + Ce^{-11{,}7096(0)} \\ 2 &= -0{,}8369 + C \\ C &= 2{,}8369. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es $v\,(t) = 2{,}8369e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369$.

b. La pelota alcanza su altura máxima cuando la velocidad es igual a cero. La razón es que cuando la velocidad es positiva, está subiendo, y cuando es negativa, está bajando. Por lo tanto, cuando es cero, no está subiendo ni bajando, y está en su altura máxima:

$$\begin{aligned} 2{,}8369e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369 &= 0 \\ 2{,}8369e^{-11{,}7096t} &= 0{,}8369 \\ e^{-11{,}7096t} &= \frac{0{,}8369}{2{,}8369} \approx 0{,}295 \\ \ln e^{-11{,}7096t} &= \ln 0{,}295 \approx -1{,}221 \\ -11{,}7096t &= -1{,}221 \\ t &\approx 0{,}104. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se necesita aproximadamente $0{,}104$ segundos para alcanzar la altura máxima.

c. Para hallar la altura de la pelota en función del tiempo, se utiliza el hecho de que la derivada de la posición es la velocidad, es decir, si $h(t)$ representa la altura en el tiempo t, entonces $h'\,(t) = v\,(t)$. Porque conocemos $v\,(t)$ y la

altura inicial, podemos formar un problema de valor inicial:

$$h'(t) = 2{,}8369e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369, \quad h(0) = 1.$$

Integrando ambos lados de la ecuación diferencial con respecto a t da

$$\begin{aligned} \int h'(t)\,dt &= \int 2{,}8369e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369dt \\ h(t) &= -\frac{2{,}8369}{11{,}7096}e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369t + C \\ h(t) &= -0{,}2423e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369t + C. \end{aligned}$$

Resuelva para C utilizando la condición inicial:

$$\begin{aligned} h(t) &= -0{,}2423e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369t + C \\ h(0) &= -0{,}2423e^{-11{,}7096(0)} - 0{,}8369(0) + C \\ 1 &= -0{,}2423 + C \\ C &= 1{,}2423. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$h(t) = -0{,}2423e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369t + 1{,}2423.$$

Después de $0{,}104$ segundos, la altura está dada por
$h(0{,}104) = -0{,}2423e^{-11{,}7096t} - 0{,}8369t + 1{,}2423 \approx 1{,}0836$ metros.

4.18 El peso de un centavo es $2{,}5$ gramos (Casa de la Moneda de Estados Unidos, “Coin Specifications”, consultado el 9 de abril de 2015, http://www.usmint.gov/about_the_mint/?action=coin_specifications) y la plataforma de observación superior del Empire State Building es de 369 metros sobre la calle. Como el centavo es un objeto pequeño y relativamente liso, la resistencia del aire que actúa sobre este es en realidad bastante pequeña. Suponemos que la resistencia del aire es igual numéricamente a $0{,}0025v$. Además, el centavo se deja caer sin que se le aplique una velocidad inicial.

a. Plantee un problema de valor inicial que represente el centavo que cae.
b. Resuelva el problema para $v(t)$.
c. Cuál es la velocidad límite del centavo (es decir, calcule el límite de la velocidad a medida que t se acerca al infinito)?

Circuitos eléctricos

Una fuente de fuerza electromotriz (p. ej., una batería o un generador) produce un flujo de corriente en un circuito cerrado, y esta corriente produce una caída de voltaje en cada resistor, inductor y condensador del circuito. La ley de las tensiones de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje en los resistores, inductores y condensadores es igual a la fuerza electromotriz total en un circuito cerrado. Tenemos los tres resultados siguientes:

1. La caída de voltaje a través de una resistencia está dada por
$$E_R = Ri,$$
donde R es una constante de proporcionalidad llamada *resistencia,* y i es la corriente.
2. La caída de voltaje en un inductor está dada por
$$E_L = Li',$$
donde L es una constante de proporcionalidad llamada *inductancia*, y i denota de nuevo la corriente.
3. La caída de voltaje en un condensador está dada por
$$E_C = \frac{1}{C}q,$$

donde C es una constante de proporcionalidad llamada *capacidad*, y q es la carga instantánea del condensador. La

relación entre i y q es $i = q'$.

Utilizamos unidades de voltios (V) para medir el voltaje E, amperios (A) para medir la corriente i, culombios (C) para medir la carga q, ohmios (Ω) para medir la resistencia R, henrios (H) para medir la inductancia L, y faradios (F) para medir la capacidad C. Considere el circuito en la Figura 4.25.

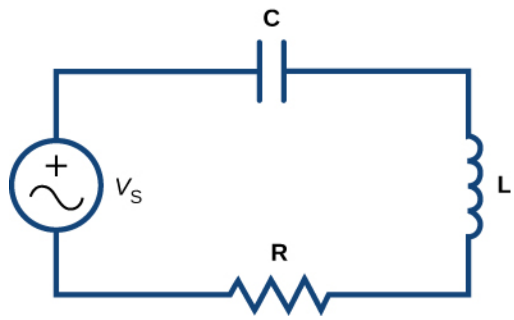


Figura 4.25 Un circuito eléctrico típico, que contiene un generador de tensión (V_S), condensador (C), inductor (L), y el resistor (R).

Aplicando la ley de ley de las tensiones de Kirchhoff a este circuito, suponemos que E denota la fuerza electromotriz suministrada por el generador de voltaje. Entonces

$$E_L + E_R + E_C = E.$$

Sustituyendo las expresiones para E_L, E_R, y E_C en esta ecuación, obtenemos

$$Li' + Ri + \frac{1}{C}q = E. \quad (4.24)$$

Si no hay ningún condensador en el circuito, la ecuación se convierte en

$$Li' + Ri = E. \quad (4.25)$$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden en i. El circuito se denomina un circuito LR.

A continuación, supongamos que no hay ningún inductor en el circuito, pero sí un condensador y un resistor, por lo que $L = 0$, $R \neq 0$, y $C \neq 0$. Entonces la Ecuación 4.23 puede reescribirse como

$$Rq' + \frac{1}{C}q = E, \quad (4.26)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Esto se denomina circuito *RC*. En cualquier caso, podemos plantear y resolver un problema de valores iniciales.

EJEMPLO 4.19

Calcular la corriente en un circuito eléctrico *RL*

Un circuito en serie tiene una fuerza electromotriz dada por $E = 50 \operatorname{sen} 20t$ V, un resistor de 5Ω, y un inductor de $0{,}4$ H. Si la corriente inicial es 0, calcule la corriente en el momento $t > 0$.

Solución

Tenemos un resistor y un inductor en el circuito, por lo que utilizamos la Ecuación 4.24. La caída de voltaje a través del resistor está dada por $E_R = Ri = 5i$. La caída de voltaje en el inductor está dada por $E_L = Li' = 0{,}4i'$. La fuerza electromotriz se convierte en el lado derecho de la Ecuación 4.24. Por lo tanto, la Ecuación 4.24 se convierte en

$$0{,}4i' + 5i = 50 \operatorname{sen} 20t.$$

Dividiendo ambos lados entre $0{,}4$ da la ecuación

$$i' + 12{,}5i = 125 \operatorname{sen} 20t.$$

Como la corriente inicial es 0, este resultado da una condición inicial de $i(0) = 0$. Podemos resolver este problema de valor inicial utilizando la estrategia de cinco pasos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden.

Paso 1. Reescriba la ecuación diferencial como $i' + 12{,}5i = 125 \operatorname{sen} 20t$. Esto da $p(t) = 12{,}5$ y $q(t) = 125 \operatorname{sen} 20t$.

Paso 2. El factor de integración es $\mu(t) = e^{\int 12{,}5dt} = e^{12{,}5t}$.

Paso 3. Multiplique la ecuación diferencial por $\mu(t)$:

$$\begin{aligned} e^{12{,}5t}i' + 12{,}5e^{12{,}5t}i &= 125e^{12{,}5t}\operatorname{sen}20t \\ \frac{d}{dt}\left[ie^{12{,}5t}\right] &= 125e^{12{,}5t}\operatorname{sen}20t. \end{aligned}$$

Paso 4. Integre ambos lados:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}\left[ie^{12{,}5t}\right] dt &= \int 125e^{12{,}5t}\operatorname{sen}20t\,dt \\ ie^{12{,}5t} &= \left(\frac{250\operatorname{sen}20t - 400\cos 20t}{89}\right)e^{12{,}5t} + C \\ i(t) &= \frac{250\operatorname{sen}20t - 400\cos 20t}{89} + Ce^{-12{,}5t}. \end{aligned}$$

Paso 5. Resuelva para C utilizando la condición inicial $v(0) = 2$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{250\operatorname{sen}20t - 400\cos 20t}{89} + Ce^{-12{,}5t} \\ i(0) &= \frac{250\operatorname{sen}20(0) - 400\cos 20(0)}{89} + Ce^{-12{,}5(0)} \\ 0 &= -\frac{400}{89} + C \\ C &= \frac{400}{89}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es
$i(t) = \frac{250\operatorname{sen}20t - 400\cos 20t + 400e^{-12{,}5t}}{89} = \frac{250\operatorname{sen}20t - 400\cos 20t}{89} + \frac{400e^{-12{,}5t}}{89}$.

El primer término puede reescribirse como una función coseno simple. Primero, multiplique por y divida entre $\sqrt{250^2 + 400^2} = 50\sqrt{89}$:

$$\begin{aligned} \frac{250\operatorname{sen}20t - 400\cos 20t}{89} &= \frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{250\operatorname{sen}20t - 400\cos 20t}{50\sqrt{89}}\right) \\ &= -\frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{8\cos 20t}{\sqrt{89}} - \frac{5\operatorname{sen}20t}{\sqrt{89}}\right). \end{aligned}$$

A continuación, defina φ para que sea un ángulo agudo tal que $\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{89}}$. Entonces $\operatorname{sen}\varphi = \frac{5}{\sqrt{89}}$ y

$$\begin{aligned} -\frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{8\cos 20t}{\sqrt{89}} - \frac{5\operatorname{sen}20t}{\sqrt{89}}\right) &= -\frac{50\sqrt{89}}{89}(\cos\varphi\cos 20t - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}20t) \\ &= -\frac{50\sqrt{89}}{89}\cos(20t + \varphi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución puede escribirse como

$$i(t) = -\frac{50\sqrt{89}}{89}\cos(20t + \varphi) + \frac{400e^{-12{,}5t}}{89}.$$

El segundo término se denomina término de *atenuación*, porque desaparece rápidamente a medida que t aumenta. El desplazamiento de fase está dado por φ, y la amplitud de la corriente en estado estacionario está dada por $\frac{50\sqrt{89}}{89}$. El gráfico de esta solución aparece en la Figura 4.26:

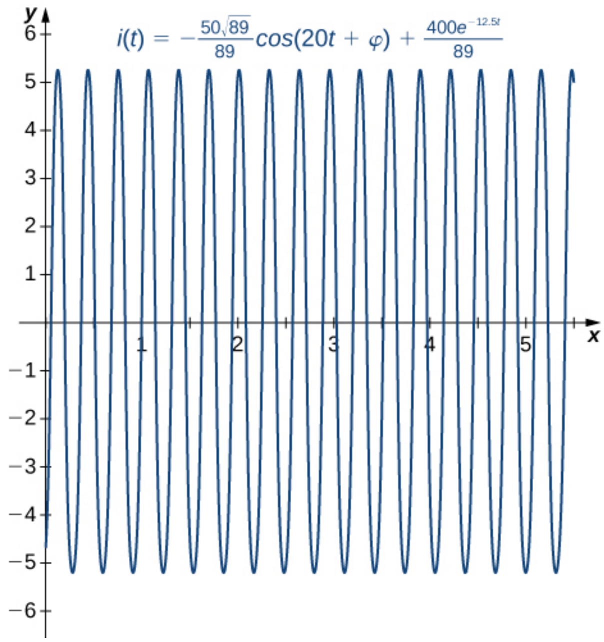


Figura 4.26

4.19 Un circuito en serie tiene una fuerza electromotriz dada por $E = 20 \operatorname{sen} 5t$ V, un condensador con capacidad $0{,}02$ F, y un resistor de $8\ \Omega$. Si la carga inicial es 4 C, calcule la carga en el tiempo $t > 0$.

SECCIÓN 4.5 EJERCICIOS

¿Las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales? Explique su razonamiento.

208. $\frac{dy}{dx} = x^2 y + \operatorname{sen} x$

209. $\frac{dy}{dt} = ty$

210. $\frac{dy}{dt} + y^2 = x$

211. $y' = x^3 + e^x$

212. $y' = y + e^y$

Escriba las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden en forma estándar.

213. $y' = x^3 y + \operatorname{sen} x$

214. $y' + 3y - \ln x = 0$

215. $-xy' = (3x + 2)\,y + xe^x$

216. $\frac{dy}{dt} = 4y + ty + \tan t$

217. $\frac{dy}{dt} = yx\,(x + 1)$ grandes.

¿Cuáles son los factores de integración de las siguientes ecuaciones diferenciales?

218. $y' = xy + 3$

219. $y' + e^x y = \operatorname{sen} x$

220. $y' = x \ln(x)\,y + 3x$

221. $\frac{dy}{dx} = \tanh(x)\,y + 1$

222. $\frac{dy}{dt} + 3ty = e^t y$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando factores de integración.

223. $y' = 3y + 2$

224. $y' = 2y - x^2$

225. $xy' = 3y - 6x^2$

226. $(x+2)\,y' = 3x + y$

227. $y' = 3x + xy$

228. $xy' = x + y$

229. $\operatorname{sen}(x)y' = y + 2x$

230. $y' = y + e^x$

231. $xy' = 3y + x^2$

232. $y' + \ln x = \frac{y}{x}$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Utilice su calculadora para dibujar una familia de soluciones. ¿Hay ciertas condiciones iniciales que cambian el comportamiento de la solución?

233. **[T]** $(x+2)y' = 2y - 1$

234. **[T]** $y' = 3e^{t/3} - 2y$

235. **[T]** $xy' + \frac{y}{2} = \operatorname{sen}(3t)$
grandes.

236. **[T]** $xy' = 2\frac{\cos x}{x} - 3y$

237. **[T]** $(x+1)y' = 3y + x^2 + 2x + 1$

238. **[T]** $\operatorname{sen}(x)y' + \cos(x)y = 2x$

239. **[T]** $\sqrt{x^2+1}y' = y + 2$

240. **[T]** $x^3y' + 2x^2y = x + 1$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial utilizando factores de integración.

241. $y' + y = x,\ y(0) = 3$

242. $y' = y + 2x^2,\ y(0) = 0$

243. $xy' = y - 3x^3,\ y(1) = 0$

244. $x^2y' = xy - \ln x,\ y(1) = 1$

245. $\left(1 + x^2\right)y' = y - 1,\ y(0) = 0$

246. $xy' = y + 2x\ln x,\ y(1) = 5$

247. $(2+x)y' = y + 2 + x,\ y(0) = 0$

248. $y' = xy + 2xe^x,\ y(0) = 2$

249. $\sqrt{x}y' = y + 2x,\ y(0) = 1$

250. $y' = 2y + xe^x,\ y(0) = -1$

251. Un objeto de masa m que cae puede alcanzar la velocidad límite cuando la fuerza de arrastre es proporcional a su velocidad, con la constante de proporcionalidad k. Plantee la ecuación diferencial y calcule la velocidad si la velocidad inicial es 0.

252. Si utilizamos su expresión del problema anterior, ¿cuál es la velocidad límite? (*Pista:* Examine el comportamiento límite; ¿la velocidad se acerca a un valor?)

253. **[T]** Si utilizamos su ecuación para la velocidad límite, resuelva la distancia caída. Cuánto tiempo tarda en caer 5.000 metros si la masa es 100 kilogramos, la aceleración debida a la gravedad es $9{,}8$ m/s^2 la constante de proporcionalidad es 4?

254. Una forma más precisa de describir la velocidad límite es que la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad, con una constante de proporcionalidad k. Plantee la ecuación diferencial y calcule la velocidad.

255. Si utilizamos su expresión del problema anterior, ¿cuál es la velocidad límite? (*Pista:* Examine el comportamiento límite: ¿la velocidad se aproxima a un valor?)

256. **[T]** Si utilizamos su ecuación para la velocidad límite, resuelva la distancia caída. Cuánto tiempo tarda en caer 5.000 metros si la masa es 100 kilogramos, la aceleración debida a la gravedad es $9,8 \text{ m/s}^2$ y la constante de proporcionalidad es 4? ¿Se tarda más o menos tiempo que su estimación inicial?

Para los siguientes problemas, determine cómo el parámetro a afecta a la solución.

257. Resuelva la ecuación genérica $y' = ax + y$. ¿Cómo la variación de a cambia el comportamiento?

258. Resuelva la ecuación genérica $y' = ay + x$. ¿Cómo la variación de a cambia el comportamiento?

259. Resuelva la ecuación genérica $y' = ax + xy$. ¿Cómo la variación de a cambia el comportamiento?

260. Resuelva la ecuación genérica $y' = x + axy$. ¿Cómo la variación de a cambia el comportamiento?

261. Resuelva $y' - y = e^{kt}$ con la condición inicial $y(0) = 0$. A medida que k se acerca a 1, ¿qué ocurre con su fórmula?

Revisión del capítulo

Términos clave

campo de direcciones (campo de pendiente) objeto matemático utilizado para representar gráficamente las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden; en cada punto de un campo de direcciones aparece un segmento de línea cuya pendiente es igual a la pendiente de la solución de la ecuación diferencial que pasa por ese punto

capacidad de carga la población máxima de un organismo que el ambiente puede mantener indefinidamente

curva de solución curva graficada en un campo de direcciones que corresponde a la solución del problema de valor inicial que pasa por un punto determinado del campo de direcciones

ecuación diferencial ecuación que implica una función $y = y(x)$ y una o varias de sus derivados

ecuación diferencial autónoma una ecuación en la que el lado derecho es una función de y sola

ecuación diferencial logística ecuación diferencial que incorpora la capacidad de carga K y tasa de crecimiento r en un modelo de población

ecuación diferencial separable cualquier ecuación que se pueda escribir en la forma $y' = f(x)\,g(y)$

factor de integración cualquier función $f(x)$ que se multiplica en ambos lados de una ecuación diferencial para que el lado que implica la función desconocida sea igual a la derivada de un producto de dos funciones

forma estándar forma de una ecuación diferencial lineal de primer orden que se obtiene al escribir la ecuación diferencial en la forma $y' + p(x)\,y = q(x)$

línea de fase representación visual del comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial autónoma sujeta a diversas condiciones iniciales

lineal descripción de una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse en la forma $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$

Método de Euler técnica numérica utilizada para aproximar soluciones a un problema de valor inicial

orden de una ecuación diferencial el mayor orden de cualquier derivada de la función desconocida que aparezca en la ecuación

población inicial población en el tiempo $t = 0$

problema de valor inicial ecuación diferencial junto con uno o varios valores iniciales

separación de variables un método utilizado para resolver una ecuación diferencial separable

solución asintóticamente estable $y = k$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier valor $c \in (k - \varepsilon, k + \varepsilon)$ la solución del problema de valor inicial $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = c$ se acerca a k como x se acerca al infinito

solución asintóticamente inestable $y = k$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier valor $c \in (k - \varepsilon, k + \varepsilon)$ la solución del problema de valor inicial $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = c$ nunca se acerca a k como x se acerca al infinito

solución asintóticamente semiestable $y = k$ si no es asintóticamente estable ni asintóticamente inestable

solución de equilibrio cualquier solución de la ecuación diferencial de la forma $y = c$, donde c es una constante

solución de una ecuación diferencial una función $y = f(x)$ que satisface una ecuación diferencial dada

solución general (o familia de soluciones) conjunto de soluciones de una ecuación diferencial dada

solución particular miembro de una familia de soluciones de una ecuación diferencial que satisface una determinada condición inicial

tamaño de paso el incremento h que se suma al valor x en cada paso del método de Euler

tasa de crecimiento la constante $r > 0$ en la función de crecimiento exponencial $P(t) = P_0 e^{rt}$

umbral de población población mínima necesaria para que una especie sobreviva

valor(es) inicial(es) valor o conjunto de valores que satisface una solución de una ecuación diferencial para un valor fijo de la variable independiente

velocidad inicial velocidad en el momento $t = 0$

Ecuaciones clave

Método de Euler	$x_n = x_0 + nh$ $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$, donde h es el tamaño del paso

Ecuación diferencial separable	$y' = f(x)g(y)$
Concentración de solución	$\frac{du}{dt} = \text{TASA DE FLUJO DE ENTRADA} - \text{TASA DE FLUJO DE SALIDA}$

Ley del enfriamiento de Newton	$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_s\right)$

Ecuación diferencial logística y problema de valor inicial	$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(0) = P_0$
Solución de la ecuación diferencial logística/problema de valor inicial	$P(t) = \frac{P_0 K e^{rt}}{(K - P_0) + P_0 e^{rt}}$
Modelo de umbral de población	$\frac{dP}{dt} = -rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{P}{T}\right)$

forma estándar	$y' + p(x)\,y = q(x)$
factor de integración	$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

Conceptos clave

4.1 Fundamentos de las ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial es una ecuación que implica una función $y = f(x)$ y una o varias de sus derivadas. Una solución es una función $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial cuando f y sus derivadas se sustituyen en la ecuación.
- El orden de una ecuación diferencial es el mayor orden de cualquier derivada de la función desconocida que aparece en la ecuación.
- Una ecuación diferencial acoplada a un valor inicial se denomina problema de valor inicial. Para resolver un problema de valor inicial, primero hay que hallar la solución general de la ecuación diferencial y luego determinar el valor de la constante. Los problemas de valor inicial tienen muchas aplicaciones en la ciencia y la ingeniería.

4.2 Campos de direcciones y métodos numéricos

- Un campo de direcciones es un objeto matemático utilizado para representar gráficamente las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden.
- El método de Euler es una técnica numérica que puede utilizarse para aproximar soluciones a una ecuación diferencial.

4.3 Ecuaciones separables

- Una ecuación diferencial separable es cualquier ecuación que puede escribirse en la forma $y' = f(x)\,g(y)$.
- El método de separación de variables se utiliza para hallar la solución general de una ecuación diferencial separable.

4.4 La ecuación logística

- Cuando se estudian las funciones de la población, diferentes supuestos (como el crecimiento exponencial, el crecimiento logístico o el umbral de población) conducen a diferentes tasas de crecimiento.
- La ecuación diferencial logística incorpora el concepto de capacidad de carga. Este valor es un valor límite de la población para un ambiente determinado.
- La ecuación diferencial logística puede resolverse para cualquier tasa de crecimiento positiva, población inicial y capacidad de carga.

4.5 Ecuaciones lineales de primer orden

- Cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden puede escribirse en la forma $y' + p(x)\,y = q(x)$.
- Podemos utilizar una estrategia de resolución de problemas en cinco pasos para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden que puede o no incluir un valor inicial.
- Las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden incluyen determinar el movimiento de un objeto que se eleva o cae con resistencia del aire y calcular la corriente en un circuito eléctrico.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

262. La ecuación diferencial $y' = 3x^2 y - \cos(x) y''$ es lineal.

263. La ecuación diferencial $y' = x - y$ es separable.

264. Se pueden resolver explícitamente todas las ecuaciones diferenciales de primer orden por separación o por el método de integración de factores.

265. Se puede determinar el comportamiento de todas las ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando campos de direcciones o el método de Euler.

Para los siguientes problemas, halle la solución general de las ecuaciones diferenciales.

266. $y' = x^2 + 3e^x - 2x$

267. $y' = 2^x + \cos^{-1} x$

268. $y' = y\left(x^2 + 1\right)$ grandes.

269. $y' = e^{-y} \operatorname{sen} x$

270. $y' = 3x - 2y$

271. $y' = y \ln y$

Para los siguientes problemas, halle la solución del problema de valor inicial.

272. $y' = 8x - \ln x - 3x^4,\ y(1) = 5$

273. $y' = 3x - \cos x + 2,\ y(0) = 4$

274. $xy' = y(x - 2),\ y(1) = 3$

275. $y' = 3y^2(x + \cos x),\ y(0) = -2$

276. $(x-1)y' = y - 2,\ y(0) = 0$

277. $y' = 3y - x + 6x^2,\ y(0) = -1$

Para los siguientes problemas, dibuje el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial y luego resuelva la ecuación diferencial. Dibuje una solución de ejemplo en el campo de direcciones.

278. $y' = 2y - y^2$

279. $y' = \frac{1}{x} + \ln x - y$, para $x > 0$

Para los siguientes problemas, utilice el método de Euler con $n = 5$ pasos sobre el intervalo $t = [0, 1]$. Luego resuelva el problema de valor inicial exactamente. ¿Qué tan cerca está su estimación del Método de Euler?

280. $y' = -4yx,\ y(0) = 1$

281. $y' = 3^x - 2y,\ y(0) = 0$

Para los siguientes problemas, plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales.

282. Un auto circula por una autopista, acelerando según $a = 5\,\text{sen}(\pi t)$, donde t representa el tiempo en minutos. Calcule la velocidad en cualquier tiempo t, suponiendo que el auto arranca con una velocidad inicial de 60 mph.

283. Se lanza una pelota de masa 2 kilogramos en el aire con una velocidad ascendente de 8 m/s. Calcule exactamente el tiempo que la pelota permanecerá en el aire, suponiendo que la gravedad está dada por $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

284. Se deja caer una pelota con una masa de 5 kilogramos por la ventana de un avión a una altura de 5.000 m. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo?

285. Se deja caer la misma pelota de masa 5 kilogramos por la misma ventana del avión a la misma altura, solo que esta vez se supone una fuerza de arrastre proporcional a la velocidad de la pelota, utilizando una constante de proporcionalidad de 3 y la pelota alcanza la velocidad límite. Calcule la distancia caída en función del tiempo. ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al suelo?

286. Un fármaco se administra a un paciente cada 24 horas y se elimina a una tasa proporcional a la cantidad de fármaco que queda en el cuerpo, con una constante de proporcionalidad $0{,}2$. Si el paciente necesita que haya un nivel de referencia de 5 mg en el torrente sanguíneo en todo momento, ¿cuál debe ser la dosis?

287. Un tanque de $1{,}000$litros contiene agua pura y una solución de $0{,}2$ kg de sal/L se bombea en el tanque a una tasa de 1 L/min y se drena a la misma tasa. Calcule la cantidad total de sal en el tanque en el tiempo t.

288. Se hierve agua para hacer té. Cuando se vierte el agua en la tetera, la temperatura es $100°\text{C}$. Después de 5 minutos en su habitación a $15°\text{C}$, la temperatura del té es $85°\text{C}$. Resuelva la ecuación para determinar las temperaturas del té en el tiempo t. ¿Cuánto tiempo hay que esperar hasta que el té esté a una temperatura que se pueda beber? $(72°\text{C}\ )$?

289. La población humana (en miles) de Nevada en 1950 fue aproximadamente 160. Si la capacidad de carga se estima en 10 millones de individuos, y suponiendo una tasa de crecimiento de $2\ \%$ por año, desarrolle un modelo de crecimiento logístico y calcule la población de Nevada en cualquier tiempo (utilice 1950 como tiempo = 0). ¿Qué población predice su modelo para 2000? ¿Qué tan cerca está su predicción del valor real de 1998257?

290. Repita el problema anterior, pero utilice el modelo de crecimiento de Gompertz. ¿Cuál es más preciso?

5

SECUENCIAS Y SERIES

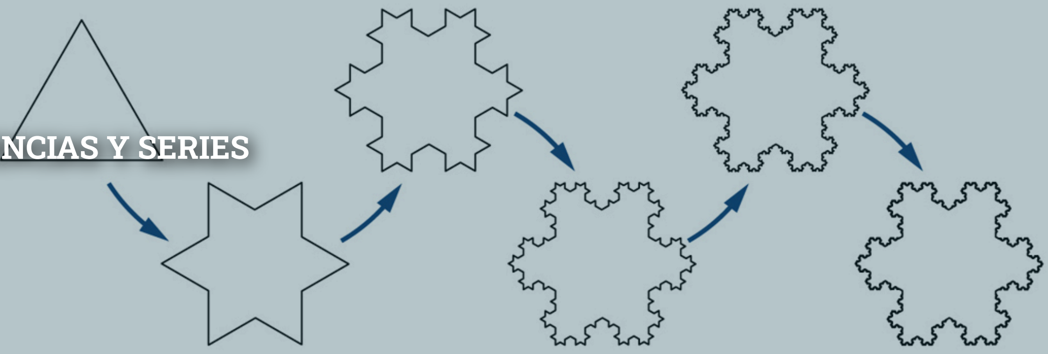


Figura 5.1 El copo de nieve de Koch se construye mediante un proceso iterativo. A partir de un triángulo equilátero, en cada paso del proceso se elimina el tercio central de cada segmento de línea y se sustituye por un triángulo equilátero que apunta hacia fuera.

Esquema del capítulo

Introducción

El copo de nieve de Koch se construye a partir de un número infinito de triángulos equiláteros no superpuestos. En consecuencia, podemos expresar su área como una suma de infinitos términos. ¿Cómo sumamos un número infinito de términos? ¿Puede ser finita una suma de un número infinito de términos? Para responder estas preguntas, debemos introducir el concepto de serie infinita, una suma con infinitos términos. Una vez que se han definido las herramientas necesarias, podremos calcular el área del copo de nieve de Koch (vea el Ejemplo 5.8).

El tema de las series infinitas puede parecer ajeno al cálculo diferencial e integral. De hecho, una serie infinita cuyos términos implican potencias de una variable es una herramienta poderosa que podemos utilizar para expresar funciones como "polinomios infinitos" Podemos utilizar las series infinitas para evaluar funciones complicadas, aproximar integrales definidas y crear nuevas funciones. Además, las series infinitas se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento físico, desde pequeños circuitos electrónicos hasta satélites en órbita terrestre.

5.1 Secuencias

Objetivos de aprendizaje

5.1.1 Hallar la fórmula del término general de una secuencia.
5.1.2 Calcular el límite de una secuencia si existe.
5.1.3 Determinar la convergencia o divergencia de una secuencia dada.

En esta sección, introducimos las secuencias y definimos lo que significa que una secuencia converja o diverja. Se muestra cómo calcular los límites de las secuencias que convergen, a menudo utilizando las propiedades de los límites de las funciones discutidas anteriormente. Cerramos esta sección con el teorema de convergencia monótona, una herramienta que podemos utilizar para demostrar que ciertos tipos de secuencias convergen.

Terminología de las secuencias

Para trabajar con este nuevo tema, necesitamos algunos términos y definiciones nuevos. En primer lugar, una secuencia infinita es una lista ordenada de números de la forma

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Cada uno de los números de la secuencia se llama término. El símbolo n se llama la variable de índice de la secuencia. Utilizamos la notación

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ o simplemente } \left\{ a_n \right\},$$

para denotar esta secuencia. Se utiliza una notación similar para los conjuntos, pero una secuencia es una lista ordenada, mientras que un conjunto no está ordenado. Porque un número determinado a_n existe para cada entero positivo n, también podemos definir una secuencia como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

Consideremos la lista infinita y ordenada

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots .$$

Se trata de una secuencia en la que el primer, segundo y tercer término están dados por $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, y $a_3 = 8$. Probablemente pueda ver que los términos de esta secuencia tienen el siguiente patrón:

$$a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2,\ a_3 = 2^3,\ a_4 = 2^4,\ \text{y } a_5 = 2^5.$$

Suponiendo que este patrón continúe, podemos escribir el enésimo término de la secuencia por la fórmula explícita $a_n = 2^n$. Utilizando esta notación, podemos escribir esta secuencia como

$$\{2^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ o } \left\{ 2^n \right\}.$$

También podemos describir esta secuencia de otra manera. Dado que cada término es el doble del término anterior, esta secuencia puede definirse en forma repetida expresando el $\text{ené}-\text{ésimo}$ término a_n en términos del término anterior a_{n-1}. En particular, podemos definir esta secuencia como la secuencia $\{a_n\}$ donde $a_1 = 2$ y para todo $n \geq 2$, cada término a_n se define por la **relación de recurrencia**$a_n = 2a_{n-1}$.

Definición

Una **secuencia infinita**$\{a_n\}$ es una lista ordenada de números de la forma

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

El subíndice n se llama la **variable de índice** de la secuencia. Cada número a_n es un **término** de la secuencia. A veces las secuencias se definen mediante **fórmulas explícitas**, en cuyo caso $a_n = f(n)$ para alguna función $f(n)$ definido sobre los enteros positivos. En otros casos, las secuencias se definen utilizando una **relación de recurrencia**. En una relación de recurrencia, un término (o más) de la secuencia se da explícitamente, y los términos subsiguientes se definen en términos de términos anteriores de la secuencia.

Tenga en cuenta que el índice no tiene que empezar en $n = 1$ pero podría empezar con otros enteros. Por ejemplo, una secuencia dada por la fórmula explícita $a_n = f(n)$ podría empezar en $n = 0$, en cuyo caso la secuencia sería

$$a_0, a_1, a_2, \ldots .$$

Del mismo modo, para una secuencia definida por una relación de recurrencia, el término a_0 puede darse explícitamente, y los términos a_n para $n \geq 1$ puede definirse en términos de a_{n-1}. Ya que una secuencia $\{a_n\}$ tiene exactamente un valor por cada entero positivo n, se puede describir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. En consecuencia, tiene sentido hablar del gráfico de una secuencia. El gráfico de una secuencia $\{a_n\}$ se compone de todos los puntos (n, a_n) para todos los enteros positivos n. La Figura 5.2 muestra el gráfico de $\{2^n\}$.

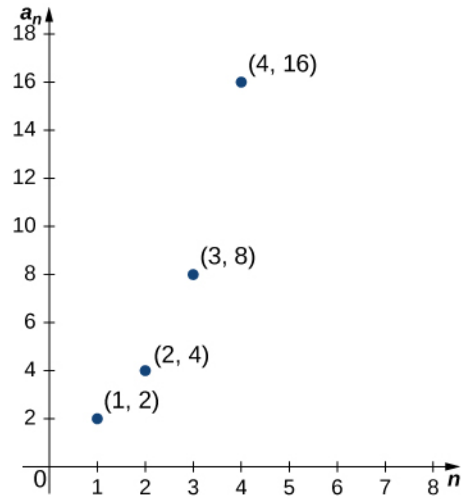


Figura 5.2 Los puntos trazados son un gráfico de la secuencia $\{2^n\}$.

Hay dos tipos de secuencias que se dan con frecuencia y que reciben nombres especiales: las secuencias aritméticas y las secuencias geométricas. En una **secuencia aritmética**, la *diferencia* entre cada par de términos consecutivos es la misma. Por ejemplo, consideremos la secuencia

$$3, 7, 11, 15, 19, \ldots .$$

Se puede ver que la diferencia entre cada par de términos consecutivos es 4. Suponiendo que este patrón continúe, esta secuencia es una secuencia aritmética. Se puede describir utilizando la relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_1 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 4 \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Tenga en cuenta que

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 + 4 \\ a_3 &= 3 + 4 + 4 = 3 + 2.4 \\ a_4 &= 3 + 4 + 4 + 4 = 3 + 3.4. \end{aligned}$$

Así, la secuencia también puede describirse mediante la fórmula explícita

$$\begin{aligned} a_n \quad \text{n} &= 3 + 4(n-1) \\ &= 4n - 1. \end{aligned}$$

En general, una secuencia aritmética es cualquier secuencia de la forma $a_n = cn + b$.

En una **secuencia geométrica**, el *cociente* de cada par de términos consecutivos es el mismo. Por ejemplo, consideremos la secuencia

$$2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots .$$

Vemos que el cociente de cualquier término con el término anterior es $-\frac{1}{3}$. Suponiendo que este patrón continúe, esta secuencia es una secuencia geométrica. Se puede definir de manera repetida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_n &= -\tfrac{1}{3}. a_{n-1} \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Como alternativa, ya que

$$a_2 = -\tfrac{1}{3}.2$$
$$a_3 = \left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)(2) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2.2$$
$$a_4 = \left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)(2) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^3.2,$$

vemos que la secuencia puede describirse utilizando la fórmula explícita

$$a_n = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

La secuencia $\{2^n\}$ que comentamos anteriormente es una secuencia geométrica, donde el cociente de cualquier término con el anterior es 2. En general, una secuencia geométrica es cualquier secuencia de la forma $a_n = cr^n$.

EJEMPLO 5.1

Hallar fórmulas explícitas

Para cada una de las siguientes secuencias, halle una fórmula explícita para el enéenésimo término de la secuencia.

a. $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$
b. $\frac{3}{4}, \frac{9}{7}, \frac{27}{10}, \frac{81}{13}, \frac{243}{16}, \ldots$

Solución

a. En primer lugar, hay que tener en cuenta que la secuencia va alternando de negativo a positivo. Los términos impares de la secuencia son negativos y los pares son positivos. Por lo tanto, el enésimo término incluye un factor de $(-1)^n$. A continuación, consideremos la secuencia de numeradores $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y la secuencia de denominadores $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Podemos ver que ambas secuencias son aritméticas. El simo término en la secuencia de numeradores es n, y el enésimo término en la secuencia de denominadores es $n + 1$. Por lo tanto, la secuencia puede describirse mediante la fórmula explícita

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n + 1}.$$

b. La secuencia de numeradores $3, 9, 27, 81, 243, \ldots$ es una secuencia geométrica. El numerador del enésimo término es 3^n La secuencia de denominadores $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$ es una secuencia aritmética. El denominador del enésimo término es $4 + 3(n-1) = 3n + 1$. Por lo tanto, podemos describir la secuencia mediante la fórmula explícita $a_n \text{ n} = \frac{3^n}{3n+1}$.

5.1 Halle una fórmula explícita para el enésimo término de la secuencia $\left\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \ldots\right\}$.

EJEMPLO 5.2

Definida por relaciones de recurrencia

Para cada una de las siguientes secuencias definidas de forma repetida, halle una fórmula explícita para la secuencia.

a. $a_1 = 2, a_n = -3a_{n-1}$ para $n \geq 2$
b. $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ para $n \geq 2$

Solución

a. Escribiendo los primeros términos, tenemos

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = -3a_1 = -3(2)$$
$$a_3 = -3a_2 = (-3)^2 2$$
$$a_4 = -3a_3 = (-3)^3 2.$$

En general,

$$a_n = 2(-3)^{n-1}.$$

b. Escriba los primeros términos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2} \\ a_2 &= a_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \\ a_3 &= a_2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8} \\ a_4 &= a_3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16}. \end{aligned}$$

A partir de este patrón, derivamos la fórmula explícita

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

☑ 5.2 Halle una fórmula explícita para la secuencia definida de forma repetida tal que $a_1 = -4$ y $a_n = a_{n-1} + 6$.

Límite de una secuencia

Una cuestión fundamental que se plantea respecto a las secuencias infinitas es el comportamiento de los términos a medida que n se hace más grande. Dado que una secuencia es una función definida sobre los enteros positivos, tiene sentido hablar del límite de los términos como $n \to \infty$. Por ejemplo, considere las siguientes cuatro secuencias y sus diferentes comportamientos como $n \to \infty$ (vea la Figura 5.3):

a. $\{1 + 3n\} = \{4, 7, 10, 13, \ldots\}$. Los términos $1 + 3n$ se vuelven arbitrariamente grandes a medida que $n \to \infty$. En este caso, decimos que $1 + 3n \to \infty$ a medida que $n \to \infty$.

b. $\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots\right\}$. Los términos $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$ a medida que $n \to \infty$.

c. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$. Los términos se alternan pero no se acercan a un único valor a medida que $n \to \infty$.

d. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Los términos se alternan también para esta secuencia, pero $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

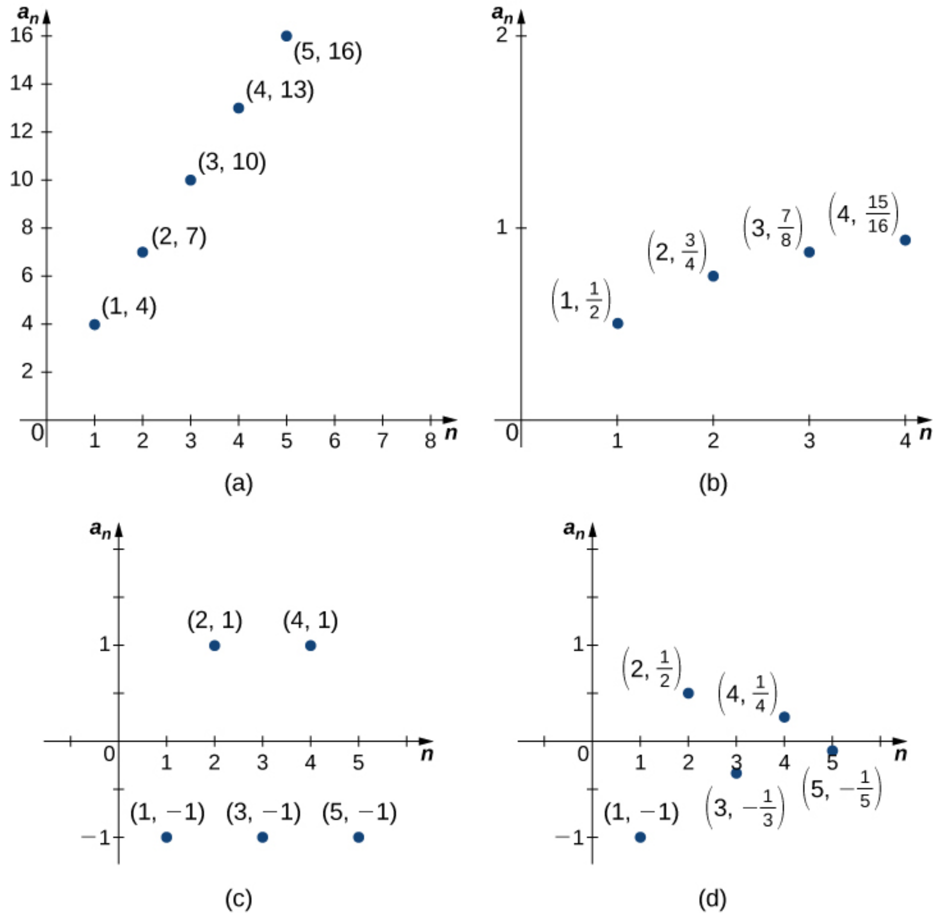


Figura 5.3 (a) Los términos de la secuencia se vuelven arbitrariamente grandes a medida que $n \to \infty$. (b) Los términos en la secuencia se aproximan a 1 a medida que $n \to \infty$. (c) Los términos de la secuencia alternan entre 1 y -1 como $n \to \infty$. d) Los términos de la secuencia alternan entre valores positivos y negativos pero se acercan a 0 a medida que $n \to \infty$.

A partir de estos ejemplos, vemos varias posibilidades de comportamiento de los términos de una secuencia a medida que $n \to \infty$. En dos de las secuencias, los términos se aproximan a un número finito a medida que $n \to \infty$. En las otras dos secuencias, los términos no lo hacen. Si los términos de una secuencia se acercan a un número finito L como $n \to \infty$, decimos que la secuencia es una secuencia convergente y el número real L es el límite de la secuencia. Aquí podemos dar una definición informal.

Definición

Dada una secuencia $\{a_n\}$, si los términos a_n se acercan arbitrariamente a un número finito L como n se hace lo suficientemente grande, decimos $\{a_n\}$ es una **secuencia convergente** y L es el **límite de la secuencia**. En este caso, escribimos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Si una secuencia $\{a_n\}$ no es convergente, decimos que es una **secuencia divergente**.

En la Figura 5.3, vemos que los términos de la secuencia $\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ se están acercando arbitrariamente a 1 a medida que n se hace muy grande. Concluimos que $\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ es una secuencia convergente y su límite es 1. En cambio, en la Figura 5.3, vemos que los términos de la secuencia $1 + 3n$ no se acercan a un número finito a medida que n se hace más

grande. Decimos que $\{1+3n\}$ es una secuencia divergente.

En la definición informal del límite de una secuencia, utilizamos los términos "arbitrariamente cercano" y "suficientemente grande" Aunque estas frases ayudan a ilustrar el significado de una secuencia convergente, son algo vagas. Para ser más precisos, presentamos ahora la definición más formal de límite para una secuencia y mostramos estas ideas gráficamente en la Figura 5.4.

Definición

Una secuencia $\{a_n\}$ converge a un número real L si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número entero N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ si $n \geq N$. El número L es el límite de la secuencia y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ or } a_n \to L.$$

En este caso, decimos que la secuencia $\{a_n\}$ es una secuencia convergente. Si una sucesión no converge, es una secuencia divergente, y decimos que el límite no existe.

Observamos que la convergencia o divergencia de una secuencia $\{a_n\}$ solo depende de lo que ocurra con los términos a_n a medida que $n \to \infty$. Por lo tanto, si un número finito de términos $b_1, b_2, \ldots, b_N$ se colocan antes de a_1 para crear una nueva secuencia

$$b_1, b_2, \ldots, b_N, a_1, a_2, \ldots,$$

esta nueva secuencia convergerá si $\{a_n\}$ converge y diverge si $\{a_n\}$ diverge. Además, si la secuencia $\{a_n\}$ converge a L, esta nueva secuencia también convergerá a L.

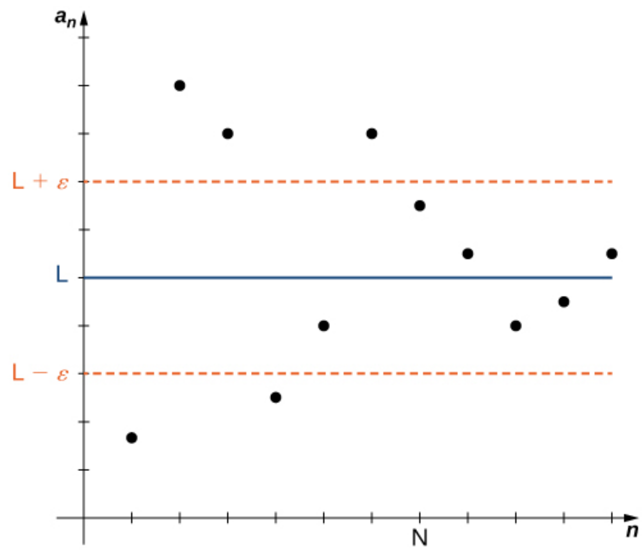


Figura 5.4 A medida que n aumenta, los términos a_n se acercan a L. Para los valores de $n \geq N$, la distancia entre cada punto (n, a_n) y la línea $y = L$ es menor que ε.

Como se ha definido anteriormente, si una secuencia no converge, se dice que es una secuencia divergente. Por ejemplo, las secuencias $\{1+3n\}$ y $\{(-1)^n\}$ que se muestra en la Figura 5.4 divergen. Sin embargo, diferentes secuencias pueden divergir de diferentes maneras. La secuencia $\{(-1)^n\}$ diverge porque los términos se alternan entre 1 y -1, pero no se acercan a un valor a medida que $n \to \infty$. Por otro lado, la secuencia $\{1+3n\}$ diverge porque los términos $1+3n \to \infty$ a medida que $n \to \infty$. Decimos que la secuencia $\{1+3n\}$ diverge al infinito y la escribimos $\lim_{n\to\infty}(1+3n) = \infty$. Es importante reconocer que esta notación no implica que el límite de la secuencia $\{1+3n\}$ existe. La secuencia es, de hecho, divergente. Escribir que el límite es el infinito solo pretende dar más información sobre por qué la secuencia es divergente. Una secuencia también puede divergir hasta el infinito negativo. Por ejemplo, la secuencia $\{-5n+2\}$ diverge al infinito negativo porque $-5n+2 \to -\infty$ a medida que $n \to -\infty$. La escribimos como

$$\lim_{n\to\infty} (-5n + 2) = \to -\infty.$$

Como una secuencia es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, podemos utilizar las propiedades de los límites de las funciones para determinar si una secuencia converge. Por ejemplo, consideremos una secuencia $\{a_n\}$ y una función correspondiente f definidas en todos los números reales positivos tales que $f(n) = a_n$ para todos los enteros $n \geq 1$. Dado que el dominio de la secuencia es un subconjunto del dominio de f, si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, entonces la secuencia converge y tiene el mismo límite. Por ejemplo, consideremos la secuencia $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y la función correspondiente $f(x) = \frac{1}{x}$. Dado que la función f definida en todos los números reales $x > 0$ satisface $f(x) = \frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$, la secuencia $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ debe satisfacer $\frac{1}{n} \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

Teorema 5.1

Límite de una secuencia definida por una función

Considere una secuencia $\{a_n\}$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq 1$. Si existe un número real L tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

entonces $\{a_n\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Podemos utilizar este teorema para evaluar $\lim_{n\to\infty} r^n$ para $0 \leq r \leq 1$. Por ejemplo, consideremos la secuencia $\{(1/2)^n\}$ y la función exponencial correspondiente $f(x) = (1/2)^x$. Dado que $\lim_{x\to\infty} (1/2)^x = 0$, concluimos que la secuencia $\{(1/2)^n\}$ converge y su límite es 0. Del mismo modo, para cualquier número real r tal que $0 \leq r < 1$, $\lim_{x\to\infty} r^x = 0$, y, por tanto, la secuencia $\{r^n\}$ converge. Por otro lado, si $r = 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} r^x = 1$, y por tanto el límite de la secuencia $\{1^n\}$ es 1. Si $r > 1$, $\lim_{x\to\infty} r^x = \infty$, y por lo tanto no podemos aplicar este teorema. Sin embargo, en este caso, al igual que la función r^x crece sin límites a medida que $n \to \infty$, los términos r^n en la secuencia se vuelven arbitrariamente grandes a medida que $n \to \infty$, y concluimos que la secuencia $\{r^n\}$ diverge al infinito si $r > 1$.

Resumimos estos resultados con respecto a la secuencia geométrica $\{r^n\}$:

$$r^n \to 0 \; si \; 0 < r < 1$$
$$r^n \to 1 \; si \; r = 1$$
$$r^n \to \infty \; si \; r > 1.$$

Más adelante en esta sección se considera el caso en que $r < 0$.

Consideramos ahora secuencias un poco más complicadas. Por ejemplo, consideremos la secuencia $\{(2/3)^n + (1/4)^n\}$. Los términos de esta secuencia son más complicados que los de otras secuencias que hemos discutido, pero afortunadamente el límite de esta secuencia está determinado por los límites de las dos secuencias $\{(2/3)^n\}$ y $\{(1/4)^n\}$. Como describimos en las siguientes leyes de límites algebraicos, dado que $\{(2/3)^n\}$ y $\{1/4)^n\}$ ambas convergen a 0, la secuencia $\{(2/3)^n + (1/4)^n\}$ converge a $0 + 0 = 0$. Así como pudimos evaluar un límite que implica una combinación algebraica de funciones f y g mirando los límites de f y g (vea Introducción a los límites (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/2-introduccion)), podemos evaluar el límite de una secuencia cuyos términos son combinaciones algebraicas de a_n y b_n evaluando los límites de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Teorema 5.2

Leyes de límites algebraicos

Secuencias dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ y cualquier número real c, si existen constantes A y B tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, entonces

i. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = cA$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

iv. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) . \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = A. B$

v. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$, siempre que $B \neq 0$ y cada $b_n \neq 0$.

Prueba

Demostramos la parte iii.

Supongamos que $\epsilon > 0$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, existe un número entero positivo constante N_1 tal que $\left|a_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N_1$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, existe una constante N_2 tal que $|b_n - B| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N_2$. Supongamos que N es el mayor de N_1 y N_2. Por lo tanto, para todo $n \geq N$,

$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

□

Las leyes de límites algebraicos nos permiten evaluar los límites de muchas secuencias. Por ejemplo, consideremos la secuencia $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$. Como se ha mostrado anteriormente, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. Del mismo modo, para cualquier número entero positivo k, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

En el siguiente ejemplo, hacemos uso de este hecho junto con las leyes de límites para evaluar los límites de otras secuencias.

EJEMPLO 5.3

Determinar convergencia y calcular límites

Para cada una de las siguientes secuencias, determine si la secuencia converge o no. Si converge, calcule su límite.

a. $\left\{5 - \frac{3}{n^2}\right\}$

b. $\left\{\frac{3n^4 - 7n^2 + 5}{6 - 4n^4}\right\}$

c. $\left\{\frac{2^n}{n^2}\right\}$

d. $\left\{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right\}$

Solución

a. Sabemos que $1/n \to 0$. Utilizando este hecho, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) . \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left(5-\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 - 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 5 - 3.0 = 5.$$

La secuencia converge y su límite es 5.

b. Factorizando n^4 fuera del numerador y del denominador y utilizando las leyes de límites anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-7n^2+5}{6-4n^4} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{7}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{\frac{6}{n^4}-4} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{7}{n^2}+\frac{5}{n^4}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n^4}-4\right)} \\ &= \frac{\left(\lim_{n\to\infty}(3)-\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^4}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^4}-\lim_{n\to\infty}(4)\right)} \\ &= \frac{\left(\lim_{n\to\infty}(3)-7.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+5.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\right)}{\left(6.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}-\lim_{n\to\infty}(4)\right)} \\ &= \frac{3-7.0+5.0}{6.0-4} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

La secuencia converge y su límite es $-3/4$.

c. Considere la función correspondiente $f(x) = 2^x/x^2$ definida en todos los números reales $x > 0$. Dado que $2^x \to \infty$ y $x^2 \to \infty$ cuando $x \to \infty$, aplique la regla de L'Hôpital y escriba

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} && \text{Tome las derivadas del numerador y del denominador.} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x (\ln 2)^2}{2} && \text{Vuelva a tomar las derivadas.} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Concluimos que la secuencia diverge.

d. Considere la función $f(x) = \left(1+\frac{4}{x}\right)^x$ definida en todos los números reales $x > 0$. Esta función tiene la forma indeterminada 1^∞ cuando $x \to \infty$. Supongamos que

$$y = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x.$$

Ahora tomando el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\ln(y) = \ln\left[\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x\right].$$

Dado que la función $f(x) = \ln x$ es continua en su dominio, podemos intercambiar el límite y el logaritmo natural. Por lo tanto,

$$\ln(y) = \lim_{x\to\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{4}{x}\right)^x\right].$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, escribimos

$$\lim_{x\to\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{4}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right).$$

Como el lado derecho de esta ecuación tiene la forma indeterminada $\infty \cdot 0$, reescríbala como una fracción para aplicar la regla de L'Hôpital. Escriba

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + 4/x)}{1/x}.$$

Como el lado derecho está ahora en la forma indeterminada $0/0$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Concluimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + 4/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{1 + 4/x} = 4.$$

Por lo tanto, $\ln(y) = 4$ en tanto que $y = e^4$. Por lo tanto, dado que $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x = e^4$, podemos concluir que la secuencia $\left\{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n\right\}$ converge a e^4.

5.3 Considere la secuencia $\left\{\left(5n^2 + 1\right)/e^n\right\}$. Determine si la secuencia converge o no. Si converge, calcule su límite.

Recordemos que si f es una función continua en un valor L, entonces $f(x) \to f(L)$ cuando $x \to L$. Esta idea se aplica también a las secuencias. Supongamos que una secuencia $a_n \to L$, y una función f es continua en L. Entonces $f(a_n) \to f(L)$. Esta propiedad nos permite a menudo hallar límites para secuencias complicadas. Por ejemplo, consideremos la secuencia $\sqrt{5 - \frac{3}{n^2}}$. Del Ejemplo 5.3a. conocemos la secuencia $5 - \frac{3}{n^2} \to 5$. Dado que $\sqrt{x}$ es una función continua en $x = 5$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{5 - \frac{3}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{3}{n^2}\right)} = \sqrt{5}.$$

Teorema 5.3

Funciones continuas definidas en secuencias convergentes

Considere una secuencia $\{a_n\}$ y supongamos que existe un número real L tal que la secuencia $\{a_n\}$ converge a L. Supongamos que f es una función continua en L. Entonces existe un número entero N tal que f se define en todos los valores a_n para $n \geq N$, y la secuencia $\{f(a_n)\}$ converge a $f(L)$ (Figura 5.5).

Prueba

Supongamos que $\epsilon > 0$. Dado que f es continua en L, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(L)| < \varepsilon$ si $|x - L| < \delta$. Ya que la secuencia $\{a_n\}$ converge a L, existe N tal que $|a_n - L| < \delta$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, para todo $n \geq N$, $|a_n - L| < \delta$, lo que implica que $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$. Concluimos que la secuencia $\{f(a_n)\}$ converge a $f(L)$.

□

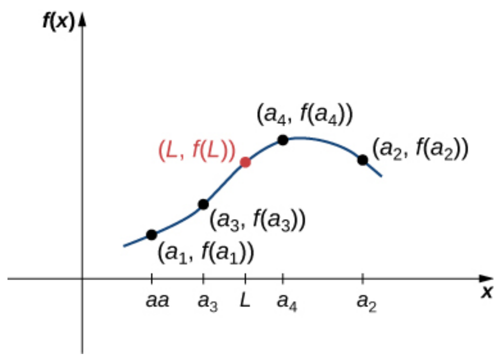


Figura 5.5 Debido a que f es una función continua a medida que las entradas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se acercan a L, las salidas $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ se acercan a $f(L)$.

EJEMPLO 5.4

Límites de funciones continuas definidas en secuencias convergentes

Determinar si la secuencia $\{\cos(3/n^2)\}$ converge. Si converge, calcule su límite.

Solución

Dado que la secuencia $\{3/n^2\}$ converge a 0 y $\cos x$ es continua en $x = 0$, podemos concluir que la secuencia $\{\cos(3/n^2)\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{3}{n^2}\right) = \cos(0) = 1.$$

5.4 Determine si la secuencia $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{3n+5}}\right\}$ converge. Si converge, calcule su límite.

Otro teorema que involucra límites de secuencias es una extensión del teorema del emparedado para límites que se discutió en Introducción a los límites (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/2-introduccion).

Teorema 5.4

Teorema del emparedado para secuencias

Considere las secuencias $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, y $\{c_n\}$. Supongamos que existe un número entero N tal que

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ para todo } n \geq N.$$

Si existe un número real L tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L = \lim_{n \to \infty} c_n,$$

entonces $\{b_n\}$ converge y $\lim_{n \to \infty} b_n = L$ (Figura 5.6).

Prueba

Supongamos que $\varepsilon > 0$. Ya que la secuencia $\{a_n\}$ converge a L, existe un número entero N_1 tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N_1$. Del mismo modo, dado que $\{c_n\}$ converge a L, existe un número entero N_2 tal que $|c_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N_2$. Por supuesto, existe un número entero N tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq N$. Supongamos que M es el mayor de N_1, N_2, y N. Debemos demostrar que $|b_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq M$. Para todo $n \geq M$,

$$-\varepsilon < -|a_n - L| \leq a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $-\varepsilon < b_n - L < \varepsilon$, y concluimos que $|b_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq M$, y concluimos que la secuencia $\{b_n\}$ converge a L.

□

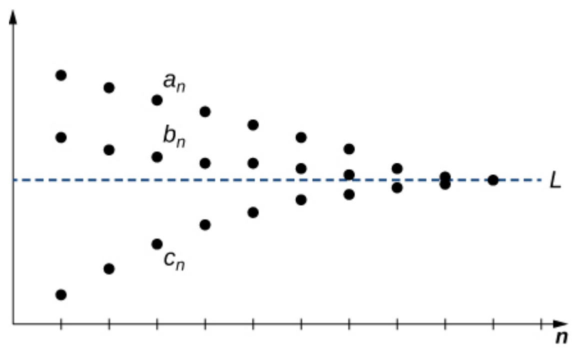


Figura 5.6 Cada término b_n satisface $a_n \leq b_n \leq c_n$ y las secuencias $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ convergen al mismo límite, por lo que la secuencia $\{b_n\}$ debe converger también al mismo límite.

EJEMPLO 5.5

Utilizar el teorema del emparedado

Utilice el teorema del emparedado para calcular el límite de cada una de las siguientes secuencias.

a. $\left\{\frac{\cos n}{n^2}\right\}$
b. $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

Solución

a. Dado que $-1 \leq \cos n \leq 1$ para todos los enteros n, tenemos

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Dado que $-1/n^2 \to 0$ y $1/n^2 \to 0$, concluimos que $\cos n/n^2 \to 0$ también.

b. Dado que

$$-\frac{1}{2^n} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2^n}$$

para todos los enteros positivos n, $-1/2^n \to 0$ y $1/2^n \to 0$, podemos concluir que $(-1/2)^n \to 0$.

5.5 Calcule $\lim_{n \to \infty} \frac{2n - \operatorname{sen} n}{n}$.

Utilizando la idea del Ejemplo 5.5b. concluimos que $r^n \to 0$ para cualquier número real r tal que $-1 < r < 0$. Si $r < -1$, la secuencia $\{r^n\}$ diverge porque los términos oscilan y se vuelven arbitrariamente más grandes en magnitud. Si $r = -1$, la secuencia $\{r^n\} = \{(-1)^n\}$ diverge, como ya se ha comentado. A continuación, un resumen de las propiedades de las secuencias geométricas.

$$r^n \to 0 \text{ si } |r| < 1 \tag{5.1}$$

$$r^n \to 1 \text{ si } r = 1 \tag{5.2}$$

$$r^n \to \infty \text{ si } r > 1 \tag{5.3}$$

$$\left\{r^n\right\} \text{ diverge si } r \leq -1 \tag{5.4}$$

Secuencias delimitadas

Ahora nos centraremos en uno de los teoremas más importantes sobre las secuencias: el teorema de convergencia monótona. Antes de enunciar el teorema, debemos introducir algo de terminología y motivación. Empezamos por definir lo que significa que una secuencia esté delimitada.

Definición

Una secuencia $\{a_n\}$ está **delimitada por encima** si existe un número real M tal que

$$a_n \leq M$$

para todos los enteros positivos n.

Una secuencia $\{a_n\}$ está **delimitada por debajo** si existe un número real M tal que

$$M \leq a_n$$

para todos los enteros positivos n.

Una secuencia $\{a_n\}$ es una **secuencia delimitada** si está delimitada por encima y por debajo.

Si una secuencia no está delimitada, es una **secuencia no delimitada**.

Por ejemplo, la secuencia $\{1/n\}$ está delimitada por encima porque $1/n \leq 1$ para todos los enteros positivos n. También está delimitada por debajo porque $1/n \geq 0$ para todos los enteros positivos n. Por lo tanto, $\{1/n\}$ es una secuencia delimitada. Por otro lado, consideremos la secuencia $\{2^n\}$. Dado que $2^n \geq 2$ para todo $n \geq 1$, la secuencia está delimitada por debajo. Sin embargo, la secuencia no está delimitada por encima. Por lo tanto, $\{2^n\}$ es una secuencia no delimitada.

Ahora discutimos la relación entre la delimitación y la convergencia. Supongamos que una secuencia $\{a_n\}$ no está delimitada. Entonces no está delimitada por encima, o no está delimitada por debajo, o por ninguna de las dos partes. En cualquier caso, hay términos a_n que son arbitrariamente grandes en magnitud a medida que n se hace más grande. Como resultado, la secuencia $\{a_n\}$ no puede converger. Por lo tanto, estar delimitada es una condición necesaria para que una secuencia converja.

Teorema 5.5

Las secuencias convergentes están delimitadas
Si una secuencia $\{a_n\}$ converge, entonces está delimitada.

Observe que el hecho de que una secuencia esté delimitada no es condición suficiente para que una secuencia converja. Por ejemplo, la secuencia $\{(-1)^n\}$ está delimitada, pero la secuencia diverge porque la secuencia oscila entre 1 y -1 y nunca se acerca a un número finito. Ahora discutimos una condición suficiente (pero no necesaria) para que una secuencia delimitada converja.

Consideremos una secuencia delimitada $\{a_n\}$. Supongamos que la secuencia $\{a_n\}$ es creciente. Es decir, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots$. Como la secuencia es creciente, los términos no son oscilantes. Por lo tanto, hay dos posibilidades. La secuencia podría divergir hasta el infinito, o podría converger. Sin embargo, dado que la secuencia está delimitada, está delimitada por encima y la secuencia no puede divergir al infinito. Concluimos que $\{a_n\}$ converge. Por ejemplo,

consideremos la secuencia

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}.$$

Como esta secuencia es creciente y delimitada por encima, converge. A continuación, consideremos la secuencia

$$\left\{2, 0, 3, 0, 4, 0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Aunque la secuencia no es creciente para todos los valores de n, vemos que $-1/2 < -1/3 < -1/4 < \cdots$. Por lo tanto, a partir del octavo término, $a_8 = -1/2$, la secuencia es creciente. En este caso, decimos que la secuencia es *eventualmente* creciente. Como la secuencia está delimitada por encima, converge. También es cierto que si una secuencia es decreciente (o eventualmente decreciente) y delimitada por debajo, también converge.

Definición

Una secuencia $\{a_n\}$ es creciente para todo $n \geq n_0$ si

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Una secuencia $\{a_n\}$ es decreciente para todo $n \geq n_0$ si

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Una secuencia $\{a_n\}$ es una **secuencia monótona** para todo $n \geq n_0$ si es creciente para todo $n \geq n_0$ o decreciente para todo $n \geq n_0$.

Ahora tenemos las definiciones necesarias para enunciar el teorema de convergencia monótona, que da una condición suficiente para la convergencia de una secuencia.

Teorema 5.6

Teorema de convergencia monótona
Si $\{a_n\}$ es una secuencia delimitada y existe un número entero positivo n_0 tal que $\{a_n\}$ es monótona para todo $n \geq n_0$, entonces $\{a_n\}$ converge.

La demostración de este teorema está fuera del alcance de este texto. En su lugar, proporcionamos un gráfico para mostrar intuitivamente por qué este teorema tiene sentido (Figura 5.7).

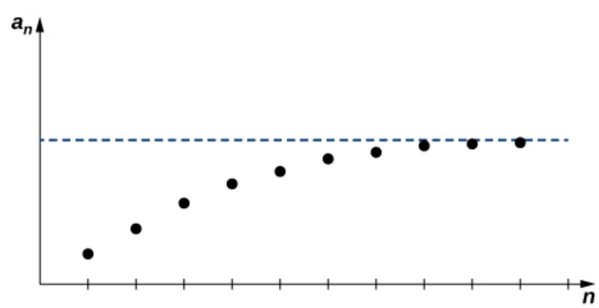


Figura 5.7 Dado que la secuencia $\{a_n\}$ es creciente y delimitada por encima, debe converger.

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo se puede utilizar el teorema de convergencia monótona para demostrar la convergencia de una secuencia.

EJEMPLO 5.6

Uso del teorema de convergencia monótona
Para cada una de las siguientes secuencias, utilice el teorema de convergencia monótona para demostrar que la secuencia converge y calcule su límite.

a. $\left\{\frac{4^n}{n!}\right\}$

b. $\{a_n\}$ definidas de forma repetida tal que

$$a_1 = 2 \text{ y } a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} \text{ para todo } n \geq 2.$$

Solución

a. Escribiendo los primeros términos, vemos que

$$\left\{\frac{4^n}{n!}\right\} = \left\{4, 8, \frac{32}{3}, \frac{32}{3}, \frac{128}{15}, \ldots\right\}.$$

Al principio, los términos aumentan. Sin embargo, a partir del tercer término, los términos disminuyen. De hecho, los términos disminuyen para todo $n \geq 3$. Podemos demostrarlo de la siguiente manera.

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{4}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n!} = \frac{4}{n+1} \cdot a_n \leq a_n \; if \; n \geq 3.$$

Por lo tanto, la secuencia es decreciente para todo $n \geq 3$. Además, la secuencia está delimitada por 0 porque $4^n/n! \geq 0$ para todos los enteros positivos n. Por lo tanto, por el teorema de convergencia monótona, la secuencia converge.

Para calcular el límite, utilizamos el hecho de que la secuencia converge y suponemos que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ahora, tenga en cuenta esta importante observación. Considere $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$. Dado que

$$\{a_{n+1}\} = \{a_{2,} a_3, a_4, \ldots\},$$

la única diferencia entre las secuencias $\{a_{n+1}\}$ y $\{a_n\}$ es que $\{a_{n+1}\}$ omite el primer término. Dado que un número finito de términos no afecta a la convergencia de una secuencia,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Combinando este hecho con la ecuación

$$a_{n+1} = \frac{4}{n+1} a_n$$

y tomando el límite de ambos lados de la ecuación

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} a_n,$$

podemos concluir que

$$L = 0. \, L = 0.$$

b. Escribiendo los primeros términos,

$$\left\{2, \frac{5}{4}, \frac{41}{40}, \frac{3281}{3280}, \ldots\right\}.$$

podemos conjeturar que la secuencia es decreciente y está delimitada por debajo por 1. Para demostrar que la secuencia está delimitada por debajo de 1, podemos demostrar que

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} \geq 1.$$

Para demostrarlo, primero hay que reescribir

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}.$$

Dado que $a_1 > 0$ y a_2 se define como una suma de términos positivos, $a_2 > 0$. Del mismo modo, todos los términos $a_n > 0$. Por lo tanto,

$$\frac{a_n^2 + 1}{2a_n} \geq 1$$

si y solo si

$$a_n^2 + 1 \geq 2a_n.$$

Reescribiendo la inecuación $a_n^2 + 1 \geq 2a_n$ como $a_n^2 - 2a_n + 1 \geq 0$, y utilizando el hecho de que

$$a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geq 0$$

porque el cuadrado de cualquier número real es no negativo, podemos concluir que

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} \geq 1.$$

Para demostrar que la secuencia es decreciente, debemos demostrar que $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq 1$. Dado que $1 \leq a_n^2$, se deduce que

$$a_n^2 + 1 \leq 2a_n^2.$$

Dividiendo ambos lados entre $2a_n$, obtenemos

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} \leq a_n.$$

Utilizando la definición de a_{n+1}, concluimos que

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} \leq a_n.$$

Dado que $\{a_n\}$ está delimitada por debajo y es decreciente, por el teorema de convergencia monótona, converge. Para calcular el límite, supongamos que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Entonces, utilizando la relación de recurrencia y el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}\right),$$

y por lo tanto

$$L = \frac{L}{2} + \frac{1}{2L}.$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $2L$, llegamos a la ecuación

$$2L^2 = L^2 + 1.$$

Si resolvemos esta ecuación para L, concluimos que $L^2 = 1$, lo que implica que $L = \pm 1$. Como todos los términos son positivos, el límite $L = 1$.

5.6 Considere la secuencia $\{a_n\}$ definida de forma repetida de manera que $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1}/2$. Utilice el teorema de convergencia monótona para demostrar que esta secuencia converge y calcule su límite.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Serie de Fibonacci

La serie de Fibonacci está definida de forma repetida por la secuencia $\{F_n\}$ donde $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ y para $n \geq 2,$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Aquí veremos las propiedades de la serie de Fibonacci.

1. Escriba los veinte primeros números de la serie de Fibonacci.
2. Halle una fórmula cerrada para la secuencia de Fibonacci mediante los siguientes pasos.
   a. Considere la secuencia definida de forma repetida $\{x_n\}$ donde $x_o = c$ y $x_{n+1} = ax_n$. Demuestre que esta secuencia puede describirse mediante la fórmula cerrada $x_n = ca^n$ para todo $n \geq 0$.
   b. Utilizando el resultado de la parte a. como motivación, halle una solución de la ecuación
   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
   de la forma $F_n = c\lambda^n$. Determine cuáles dos valores para λ permitirán que F_n satisfaga esta ecuación.
   c. Considere las dos soluciones de la parte b.: λ_1 y λ_2. Supongamos que $F_n = c_1 \lambda_1{}^n + c_2 \lambda_2{}^n$. Utilice las condiciones iniciales F_0 y F_1 para determinar los valores de las constantes c_1 y c_2 y escriba la fórmula cerrada F_n.
3. Utilice la respuesta en 2 c. para demostrar que
$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

El número $\phi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ se conoce como el numero áureo (Figura 5.8 y Figura 5.9)



Figura 5.8 Las semillas de un girasol presentan patrones en espiral que se curvan hacia la izquierda y hacia la derecha. El número de espirales en cada dirección es siempre un número de Fibonacci (créditos: modificación del trabajo de Esdras Calderan, Wikimedia Commons).

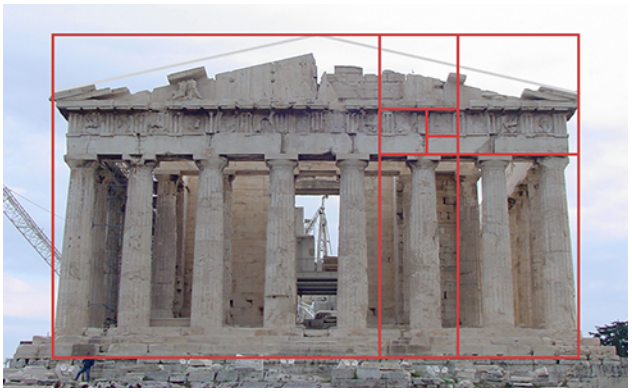


Figura 5.9 El número áureo aparece en muchos ejemplos famosos de arte y arquitectura. El antiguo templo

griego conocido como el Partenón fue diseñado con estas proporciones, y la proporción aparece de nuevo en muchos de los detalles más pequeños (créditos: modificación del trabajo de TravelingOtter, Flickr).

SECCIÓN 5.1 EJERCICIOS

Halle los seis primeros términos de cada una de las siguientes secuencias, empezando por $n = 1$.

1. $a_n = 1 + (-1)^n$ para $n \geq 1$

2. $a_n = n^2 - 1$ para $n \geq 1$

3. $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 2$

4. $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ para $n \geq 1$

5. Halle una fórmula explícita para a_n donde $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 2$.

6. Halle una fórmula a_n para el enésimo término de la secuencia aritmética cuyo primer término es $a_1 = 1$ tal que $a_{n+1} - a_n = 17$ para $n \geq 1$.

7. Halle una fórmula a_n para el enésimo término de la secuencia aritmética cuyo primer término es $a_1 = -3$ tal que $a_{n+1} - a_n = 4$ para $n \geq 1$.

8. Halle una fórmula a_n para el enésimo término de la secuencia geométrica cuyo primer término es $a_1 = 1$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 10$ para $n \geq 1$.

9. Halle una fórmula a_n para el enésimo término de la secuencia geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/10$ para $n \geq 1$.

10. Halle una fórmula explícita para el enésimo término de la secuencia cuyos primeros términos son $\{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, \ldots\}$. (*Pista:* Primero añada uno a cada término).

11. Halle una fórmula explícita para el enésimo término de la secuencia que satisface $a_1 = 0$ y $a_n = 2a_{n-1} + 1$ para $n \geq 2$.

Halle una fórmula para el término general a_n *de cada una de las siguientes secuencias.*

12. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$ (*Pista:* Halle el valor donde $\operatorname{sen} x$ toma estos valores)

13. $\{1, -1/3, 1/5, -1/7, \ldots\}$

Calcule una función $f(n)$ *que identifique el* ené–ésimo *término* a_n *de las siguientes secuencias definidas de forma repetida, como* $a_n = f(n)$.

14. $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = -a_n$ para $n \geq 1$

15. $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2a_n$ para $n \geq 1$

16. $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (n + 1)\, a_n$ para $n \geq 1$

17. $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = (n + 1)\, a_n/2$ para $n \geq 1$

18. $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n/2^n$ para $n \geq 1$

Grafique los primeros N términos de cada secuencia. Indique si la evidencia gráfica sugiere que la secuencia converge o diverge.

19. **[T]** $a_1 = 1, a_2 = 2,$ y para $n \geq 2,$ $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$; $N = 30$

20. **[T]** $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ y para $n \geq 4,$ $a_n = \frac{1}{3}\left(a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}\right)$, $N = 30$

21. **[T]** $a_1 = 1, a_2 = 2,$ y para $n \geq 3, a_n = \sqrt{a_{n-1}\,a_{n-2}}$; $N = 30$

22. **[T]** $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3,$ y para $n \geq 4,$ $a_n = \sqrt{a_{n-1}\,a_{n-2}\,a_{n-3}}$; $N = 30$

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1,$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1,$ y $0 < -b_n < a_n$ para todo n. Evalúe cada uno de los siguientes límites, o afirme que el límite no existe, o afirme que no hay suficiente información para determinar si el límite existe.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} (3a_n - 4b_n)$ grandes.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}a_n\right)$ grandes.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$

Calcule el límite de cada una de las siguientes secuencias, utilizando la regla de L'Hôpital cuando sea adecuado.

27. $\frac{n^2}{2^n}$

28. $\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$

29. $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

30. $n^{1/n}$ (*Pista:* $n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$)

Para cada una de las siguientes secuencias, cuyos ené−ésimos *se indican, especifique si la secuencia está delimitada y si es eventualmente monótona, creciente o decreciente.*

31. $n/2^n,\ n \geq 2$

32. $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ grandes.

33. $\operatorname{sen} n$

34. $\cos\left(n^2\right)$ grandes.

35. $n^{1/n},\ n \geq 3$

36. $n^{-1/n},\ n \geq 3$

37. $\tan n$

38. Determine si la secuencia definida de la siguiente forma tiene un límite. Si lo tiene, calcule el límite.

$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}},$ $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ etc.

39. Determine si la secuencia definida de la siguiente forma tiene un límite. Si lo tiene, calcule el límite.

$a_1 = 3, a_n = \sqrt{2a_{n-1}},$ $n = 2, 3, \ldots.$

Utilice el teorema del emparedado para calcular el límite de cada una de las siguientes secuencias.

40. $n \operatorname{sen}(1/n)$ grandes.

41. $\frac{\cos(1/n)-1}{1/n}$

42. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

43. $a_n = \operatorname{sen} n \operatorname{sen}(1/n)$
grandes.

Para las siguientes secuencias, grafique los primeros 25 términos de la secuencia y diga si la evidencia gráfico sugiere que la secuencia converge o diverge.

44. **[T]** $a_n = \operatorname{sen} n$

45. **[T]** $a_n = \cos n$

Determine el límite de la secuencia o demuestre que la secuencia diverge. Si converge, calcule su límite.

46. $a_n = \tan^{-1}(n^2)$ grandes.

47. $a_n = (2n)^{1/n} - n^{1/n}$

48. $a_n = \frac{\ln(n^2)}{\ln(2n)}$ grandes.

49. $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

50. $a_n = \ln\left(\frac{n+2}{n^2-3}\right)$ grandes.

51. $a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n}$

52. $a_n = \frac{(1.000)^n}{n!}$

53. $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

El método de Newton busca aproximar una solución $f(x) = 0$ que parte de una aproximación inicial x_0 y define sucesivamente una secuencia $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Para la elección dada de f y x_0, escriba la fórmula para x_{n+1}. Si la secuencia parece converger, escriba una fórmula exacta para la solución x, luego identifique el límite x con una precisión de cuatro decimales y el n más pequeño n tal que x_n coincida con x hasta cuatro decimales.

54. **[T]** $f(x) = x^2 - 2, x_0 = 1$

55. **[T]** $f(x) = (x-1)^2 - 2, x_0 = 2$

56. **[T]** $f(x) = e^x - 2, x_0 = 1$

57. **[T]** $f(x) = \ln x - 1, x_0 = 2$

58. **[T]** Supongamos que comienza con un litro de vinagre y remueve repetidamente $0{,}1$ L, sustituye con agua, mezcla y repite.

a. Halle una fórmula para la concentración después de n pasos.
b. ¿Después de cuántos pasos la mezcla contiene menos de $10\ \%$ de vinagre?

59. **[T]** Un lago contiene inicialmente 2000 peces. Supongamos que en ausencia de depredadores u otras causas de eliminación, la población de peces aumenta en $6\ \%$ cada mes. Sin embargo, teniendo en cuenta todas las causas, 150 peces se pierden cada mes.

a. Explique por qué la población de peces después de n meses está modelada por $P_n = 1{,}06P_{n-1} - 150$ con $P_0 = 2000$.
b. ¿Cuántos peces habrá en el estanque después de un año?

60. **[T]** Una cuenta bancaria gana $5\ \%$ de intereses compuestos mensualmente. Supongamos que se deposita inicialmente $\$1.000$ en la cuenta, pero que se retiran $\$10$ cada mes.

a. Demuestre que el saldo de la cuenta después de n meses es $A_n = (1 + 0{,}05/12)\,A_{n-1} - 10$; $A_0 = 1.000$ dólares.
b. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 1 año?
c. ¿El saldo aumenta o disminuye?
d. Supongamos que en vez de $\$10$ dólares, una cantidad fija de d dólares se retira cada mes. Halle un valor de d de manera que el saldo de la cuenta después de cada mes siga siendo $\$1.000$ dólares.
e. ¿Qué pasa si d es mayor que este saldo?

61. **[T]** Un estudiante pide un préstamo universitario de $\$10.000$ a una tasa anual equivalente de $6\ \%$, compuesto mensualmente.

a. Si el estudiante realiza pagos de $\$100$ al mes, ¿cuánto debe el estudiante después de 12 meses?
b. ¿Después de cuántos meses se pagará el préstamo?

62. **[T]** Considere una serie que combina el crecimiento geométrico y la disminución aritmética. Supongamos que $a_1 = 1$. Establezca $a > 1$ y $0 < b < a$. Establezca $a_{n+1} = a.\, a_n - b$. Halle una fórmula para a_{n+1} en términos de a^n, a, y b y una relación entre a y b tal que a_n converge.

63. **[T]** La representación binaria $x = 0.\, b_1 b_2 b_3 \ldots$ de un número x entre 0 y 1 puede definirse de la siguiente forma. Supongamos que $b_1 = 0$ si $x < 1/2$ y $b_1 = 1$ si $1/2 \le x < 1$. Supongamos que $x_1 = 2x - b_1$. Supongamos que $b_2 = 0$ si $x_1 < 1/2$ y $b_2 = 1$ si $1/2 \le x < 1$. Supongamos que $x_2 = 2x_1 - b_2$ y en general, $x_n = 2x_{n-1} - b_n$ y $b_{n-1} = 0$ si $x_n < 1/2$ y $b_{n-1} = 1$ si $1/2 \le x_n < 1$. Calcule la expansión binaria de $1/3$.

64. **[T]** Para calcular una aproximación para π, establezca $a_0 = \sqrt{2 + 1}$, $a_1 = \sqrt{2 + a_0}$, y, en general, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Por último, establezca $p_n = 3{,}2^n \sqrt{2 - a_n}$. Halle los diez primeros términos de p_n y compare los valores con π.

En los dos ejercicios siguientes, suponga que tiene acceso a un programa de computadora o un recurso en internet que puede generar una lista de ceros y unos de la longitud que desee. Los generadores de números pseudoaleatorios (Pseudorandom number generator, PRNG) desempeñan un papel importante en la simulación del ruido aleatorio en los sistemas físicos, ya que crean secuencias de ceros y unos que parecen el resultado de lanzar una moneda repetidamente. Uno de los tipos más simples de PRNG define de forma repetida una secuencia de aspecto aleatorio de N enteros $a_1, a_2, \ldots, a_N$ fijando dos enteros especiales K y M y suponiendo que a_{n+1} es el resto después de dividir $K. a_n$ en M, crea entonces una secuencia de bits de ceros y unos cuyo ené–ésimo término b_n es igual a uno si a_n es impar e igual a cero si a_n es par. Si los bits b_n son pseudoaleatorios, entonces el comportamiento de su promedio $(b_1 + b_2 + \cdots + b_N)/N$ debe ser similar al comportamiento de los promedios de los bits realmente generados al azar.

65. **[T]** A partir de $K = 16.807$ y $M = 2.147.483.647$, utilizando diez valores iniciales diferentes de a_1, calcule secuencias de bits b_n hasta $n = 1.000$, y compare sus promedios con diez secuencias de este tipo generadas por un generador de bits aleatorio.

66. **[T]** Halle los primeros 1.000 dígitos de π utilizando un programa de computadora o un recurso en Internet. Cree una secuencia de bits b_n suponiendo que $b_n = 1$ si el enésimo dígito de π es impar y $b_n = 0$ si el enésimo dígito de π es par. Calcule el valor promedio de b_n y el valor promedio de $d_n = |b_{n+1} - b_n|$, $n = 1, \ldots, 999$. ¿La secuencia b_n parece aleatoria? ¿Las diferencias entre los elementos sucesivos de b_n parece aleatoria?

5.2 Serie infinita

Objetivos de aprendizaje

- **5.2.1** Explicar el significado de la suma de una serie infinita.
- **5.2.2** Calcular la suma de una serie geométrica.
- **5.2.3** Evaluar una serie telescópica.

Hemos visto que una secuencia es un conjunto ordenado de términos. Si se suman estos términos, se obtiene una serie. En esta sección definimos una serie infinita y mostramos cómo las series están relacionadas con las secuencias. También definimos lo que significa que una serie converja o diverja. Introducimos uno de los tipos más importantes de series: las series geométricas. En el próximo capítulo utilizaremos las series geométricas para escribir ciertas funciones como polinomios con un número infinito de términos. Este proceso es importante porque nos permite evaluar, diferenciar e integrar funciones complicadas utilizando polinomios que son más fáciles de manejar. También discutimos la serie armónica, posiblemente la serie divergente más interesante porque simplemente no converge.

Sumas y series

Una serie infinita es una suma de infinitos términos y se escribe de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

¿Pero qué significa esto? No podemos sumar un número infinito de términos de la misma manera que podemos sumar un número finito de términos. En cambio, el valor de una serie infinita se define en términos del *límite* de las sumas parciales. Una suma parcial de una serie infinita es una suma finita de la forma

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k.$$

Para ver cómo utilizamos las sumas parciales para evaluar series infinitas, considere el siguiente ejemplo. Supongamos que el petróleo se filtra en un lago de tal manera que 1.000 galones entran en el lago la primera semana. Durante la segunda semana, 500 galones adicionales de petróleo entran en el lago. La tercera semana, 250 más galones entra en el lago. Supongamos que este patrón se mantiene de forma que cada semana entra en el lago la mitad de petróleo que la semana anterior. Si esto continúa para siempre, ¿qué podemos decir de la cantidad de petróleo en el lago? ¿Seguirá aumentando la cantidad de petróleo de forma arbitraria o es posible que se acerque a una cantidad finita? Para responder esta pregunta, observamos la cantidad de petróleo en el lago después de k semanas. Suponiendo que S_k denota la cantidad de petróleo en el lago (medido en miles de galones) tras k semanas, vemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 0{,}5 = 1 + \tfrac{1}{2} \\ S_3 &= 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \\ S_4 &= 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \\ S_5 &= 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}. \end{aligned}$$

Observando este patrón, vemos que la cantidad de petróleo en el lago (en miles de galones) tras k semanas es

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Nos interesa lo que ocurre a medida que $k \to \infty$. Simbólicamente, la cantidad de petróleo en el lago a medida que $k \to \infty$ está dada por la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Al mismo tiempo, a medida que $k \to \infty$, la cantidad de petróleo en el lago puede calcularse evaluando $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$. Por lo tanto, el comportamiento de la serie infinita se puede determinar observando el comportamiento de la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$. Si la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ converge, decimos que la serie infinita converge, y su suma está dada por $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$. Si la secuencia $\{S_k\}$ diverge, decimos que la serie infinita diverge. Ahora nos centramos en determinar el límite de esta secuencia $\{S_k\}$.

En primer lugar, simplificando algunas de estas sumas parciales, vemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \\ S_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4} \\ S_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} \\ S_5 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{31}{16}. \end{aligned}$$

Trazando algunos de estos valores en la Figura 5.10, parece que la secuencia $\{S_k\}$ podría acercarse a 2.

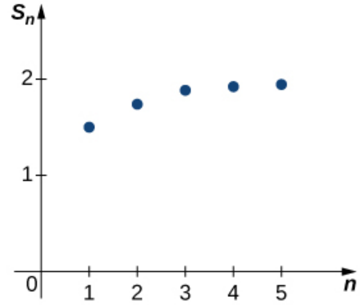


Figura 5.10 El gráfico muestra la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$. Parece que la secuencia se acerca al valor 2.

Busquemos pruebas más convincentes. En la siguiente tabla, enumeramos los valores de S_k para varios valores de k.

k	5	10	15	20
S_k	1,9375	1,998	1,999939	1,999998

Estos datos aportan más pruebas que sugieren que la secuencia $\{S_k\}$ converge a 2. Más adelante proporcionaremos un argumento analítico que puede utilizarse para demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = 2$. Por ahora, nos basamos en los datos numéricos y gráficos para convencernos de que la secuencia de sumas parciales converge realmente a 2. Como esta secuencia de sumas parciales converge a 2, decimos que la serie infinita converge a 2 y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

Volviendo a la pregunta sobre el petróleo en el lago, como esta serie infinita converge a 2, concluimos que la cantidad de petróleo en el lago se acercará arbitrariamente a 2000 galones a medida que el tiempo es lo suficientemente grande.

Esta serie es un ejemplo de serie geométrica. Más adelante hablaremos de las series geométricas con más detalle. En primer lugar, resumimos lo que significa que una serie infinita converja.

Definición

Una **serie infinita** es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Para cada número entero positivo k, la suma

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

se llama $k$enésimo **suma parcial** de la serie infinita. Las sumas parciales forman una secuencia $\{S_k\}$. Si la secuencia de sumas parciales converge a un número real S, la serie infinita converge. Si podemos describir la **convergencia de una serie** a S, llamamos S la suma de la serie, y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Si la secuencia de sumas parciales diverge, tenemos la **divergencia de una serie**.

Tenga en cuenta que el índice de una serie no tiene por qué empezar por $n = 1$ sino que puede comenzar con cualquier valor. Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

también puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \text{ o } \sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}.$$

A menudo es conveniente que el índice comience en 1, por lo que si por alguna razón comienza en un valor diferente, podemos cambiar el índice haciendo un cambio de variables. Por ejemplo, consideremos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Introduciendo la variable $m = n – 1$, por lo que $n = m + 1$, podemos reescribir la serie como

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^2}.$$

EJEMPLO 5.7

Evaluación de límites de secuencias de sumas parciales

Para cada una de las siguientes series, utilice la secuencia de sumas parciales para determinar si la serie converge o diverge.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Solución

a. La secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ satisface

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2} \\ S_2 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3} \\ S_3 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4} \\ S_4 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{4}{5}. \end{aligned}$$

Observe que cada término añadido es mayor que $1/2$. Como resultado, vemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2} \\ S_2 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ S_3 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 3\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ S_4 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{4}{5} > \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 4\left(\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

De este patrón podemos ver que $S_k > k\left(\frac{1}{2}\right)$ para cada número entero k. Por lo tanto, $\{S_k\}$ no está delimitada y, en consecuencia, es divergente. Por lo tanto, la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)$ diverge.

b. La secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ satisface

$$\begin{aligned} S_1 &= -1 \\ S_2 &= -1 + 1 = 0 \\ S_3 &= -1 + 1 - 1 = -1 \\ S_4 &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

De este patrón podemos ver que la secuencia de sumas parciales es

$$\{S_k\} = \{-1, 0, -1, 0, \ldots\}.$$

Como esta secuencia diverge, la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverge.

c. La secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ satisface

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ S_3 &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \\ S_4 &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5} \\ S_5 &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

A partir de este patrón, podemos ver que la $k-\text{ésimo}$ suma parcial está dada por la fórmula explícita

$$S_k = \frac{k}{k+1}.$$

Dado que $k/(k+1) \to 1$, concluimos que la secuencia de sumas parciales converge, y por tanto la serie infinita converge a 1. Tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

5.7 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)/n$ converge o diverge.

La serie armónica

Una serie útil de conocer es la **serie armónica**. La serie armónica se define como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots. \tag{5.5}$$

Esta serie es interesante porque diverge, pero diverge muy lentamente. Con esto queremos decir que los términos de la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ se acercan al infinito, pero lo hacen muy lentamente. Demostraremos que la serie diverge, pero primero ilustramos el crecimiento lento de los términos de la secuencia $\{S_k\}$ en la siguiente tabla.

k	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
S_k	2,92897	5,18738	7,48547	9,78761	12,09015	14,39273

Incluso después de $1.000.000$ de términos, la suma parcial sigue siendo relativamente pequeña. De esta tabla no se desprende que esta serie sea realmente divergente. Sin embargo, podemos demostrar analíticamente que la secuencia de sumas parciales diverge, y por tanto la serie diverge.

Para demostrar que la secuencia de sumas parciales diverge, mostramos que la secuencia de sumas parciales no es

limitada. Comenzamos escribiendo las primeras sumas parciales:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} \\ S_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \\ S_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Observe que para los dos últimos términos de S_4,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$S_4 > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Utilizando la misma idea para S_8, vemos que

$$\begin{aligned} S_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

A partir de este patrón, vemos que $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 1/2$, $S_4 > 1 + 2(1/2)$, y $S_8 > 1 + 3(1/2)$. De forma más general, se puede demostrar que $S_{2^j} > 1 + j(1/2)$ para todo $j > 1$. Dado que $1 + j(1/2) \to \infty$, concluimos que la secuencia $\{S_k\}$ no está delimitada y, por tanto, es divergente. En la sección anterior, afirmamos que las secuencias convergentes están delimitadas. Por lo tanto, dado que $\{S_k\}$ no está delimitada, es divergente. Así, la serie armónica diverge.

Propiedades algebraicas de las series convergentes

Dado que la suma de una serie infinita convergente se define como límite de una secuencia, las propiedades algebraicas de las series que se enumeran a continuación se derivan directamente de las propiedades algebraicas de las secuencias.

Teorema 5.7

Propiedades algebraicas de las series convergentes

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes. Entonces se cumplen las siguientes propiedades algebraicas.

i. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. (Regla de la suma)

ii. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. (Regla de la diferencia)

iii. Para cualquier número real c, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (Regla del múltiplo constante)

EJEMPLO 5.8

Uso de las propiedades algebraicas de las series convergentes

Evalúe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n(n+1)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right].$$

Solución

Ya hemos demostrado que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2.$$

Como ambas series convergen, podemos aplicar las Propiedades algebraicas de las series convergentes para evaluar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n(n+1)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right].$$

Utilizando la regla de la suma, escriba

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n(n+1)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Entonces, utilizando la regla del múltiplo constante y las sumas anteriores, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} &= 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= 3(1)+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}(2)=3+2(2)=7.\end{aligned}$$

5.8 Evalúe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^{n-1}}$.

Serie geométrica

Una **serie geométrica** es cualquier serie que podamos escribir en la forma

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}. \quad (5.6)$$

Como el cociente entre cada término de esta serie y el término anterior es r, el número r se razón. Nos referimos a a como el término inicial porque es el primer término de la serie. Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

es una serie geométrica con término inicial $a=1$ y cociente $r=1/2$.

En general, ¿cuándo converge una serie geométrica? Consideremos la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

cuando $a > 0$. Su secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ está dada por

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1}.$$

Considere el caso cuando $r = 1$. En ese caso,

$$S_k = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{k-1} = ak.$$

Dado que $a > 0$, sabemos que $ak \to \infty$ como $k \to \infty$. Por lo tanto, la secuencia de sumas parciales no está delimitada y, por lo tanto, diverge. En consecuencia, la serie infinita diverge para $r = 1$. Para $r \neq 1$, para hallar el límite de $\{S_k\}$, multiplique la Ecuación 5.6 por $1 - r$. Haciendo esto, vemos que

$$\begin{aligned}(1-r)S_k &= a(1-r)\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{k-1}\right)\\ &= a[(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{k-1}) - (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k)]\\ &= a\left(1 - r^k\right).\end{aligned}$$

Todos los demás términos se anulan.

Por lo tanto,

$$S_k = \frac{a\left(1 - r^k\right)}{1 - r} \text{ para } r \neq 1.$$

De nuestra discusión en la sección anterior, sabemos que la secuencia geométrica $r^k \to 0$ si $|r| < 1$ y que r^k diverge si $|r| > 1$ o $r = \pm 1$. Por lo tanto, para $|r| < 1$, $S_k \to a/(1-r)$ y tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ si } |r| < 1.$$

Si $|r| \geq 1$, S_k diverge, y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{diverge si } |r| \geq 1.$$

Definición

Una serie geométrica es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots.$$

Si $|r| < 1$, la serie converge, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ para } |r| < 1. \quad (5.7)$$

Si $|r| \geq 1$, la serie diverge.

Las series geométricas aparecen a veces con formas un poco diferentes. Por ejemplo, a veces el índice comienza en un valor distinto de $n = 1$ o el exponente implica una expresión lineal para n que no sea $n – 1$. Mientras podamos reescribir

la serie en la forma dada por la Ecuación 5.5, es una serie geométrica. Por ejemplo, consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}.$$

Para ver que se trata de una serie geométrica, escribimos los primeros términos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} &= \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 + \cdots \\ &= \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{4}{9}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \cdots.\end{aligned}$$

Vemos que el término inicial es $a = 4/9$ y la razón es $r = 2/3$. Por lo tanto, la serie se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Dado que $r = 2/3 < 1$, esta serie converge, y su suma está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/9}{1-2/3} = \frac{4}{3}.$$

EJEMPLO 5.9

Determinación de la convergencia o divergencia de una serie geométrica

Determine si cada una de las siguientes series geométricas converge o diverge, y si converge, calcule su suma.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^{n-1}}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n}$

Solución

a. Escribiendo los primeros términos de la serie, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^{n-1}} &= \frac{(-3)^2}{4^0} + \frac{(-3)^3}{4} + \frac{(-3)^4}{4^2} + \cdots \\ &= (-3)^2 + (-3)^2\cdot\left(\tfrac{-3}{4}\right) + (-3)^2\cdot\left(\tfrac{-3}{4}\right)^2 + \cdots \\ &= 9 + 9\cdot\left(\tfrac{-3}{4}\right) + 9\cdot\left(\tfrac{-3}{4}\right)^2 + \cdots.\end{aligned}$$

El término inicial $a = -3$ y el cociente $r = -3/4$. Dado que $|r| = 3/4 < 1$, la serie converge a

$$\frac{9}{1-(-3/4)} = \frac{9}{7/4} = \frac{36}{7}.$$

b. Escribiendo esta serie como

$$e^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^2\right)^{n-1}$$

podemos ver que se trata de una serie geométrica donde $r = e^2 > 1$. Por lo tanto, la serie diverge.

5.9 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1}$ converge o diverge. Si converge, calcule su suma.

Ahora nos centramos en una bonita aplicación de las series geométricas. Mostramos cómo pueden utilizarse para escribir decimales repetidos como fracciones de enteros.

EJEMPLO 5.10

Escribir decimales repetidos como fracciones de enteros

Utilice una serie geométrica para escribir $3{,}\overline{26}$ como fracción de enteros.

Solución

Dado que $3{,}\overline{26} = 3{,}262626\ldots$, primero escribimos

$$\begin{aligned} 3{,}262626\ldots &= 3 + \frac{26}{100} + \frac{26}{10.000} + \frac{26}{1.000.000} + \cdots \\ &= 3 + \frac{26}{10^2} + \frac{26}{10^4} + \frac{26}{10^6} + \cdots. \end{aligned}$$

Ignorando el término 3, el resto de esta expresión es una serie geométrica con término inicial $a = 26/10^2$ y cociente $r = 1/10^2$. Por lo tanto, la suma de esta serie es

$$\frac{26/10^2}{1 - (1/10^2)} = \frac{26/10^2}{99/10^2} = \frac{26}{99}.$$

Por lo tanto,

$$3{,}262626\ldots = 3 + \frac{26}{99} = \frac{323}{99}.$$

5.10 Escriba $5{,}2\overline{7}$ como fracción de enteros.

EJEMPLO 5.11

Inicio del capítulo: Halle el área del copo de nieve Koch

Defina una secuencia de figuras $\{F_n\}$ de forma repetida de la siguiente forma (Figura 5.11). Supongamos que F_0 es un triángulo equilátero con lados de longitud 1. Para $n \geq 1$, supongamos que F_n es la curva creada al eliminar el tercio medio de cada lado de F_{n-1} y sustituyéndolo por un triángulo equilátero apuntando hacia fuera. La figura delimitante a medida que $n \to \infty$ se conoce como el copo de nieve de Koch.

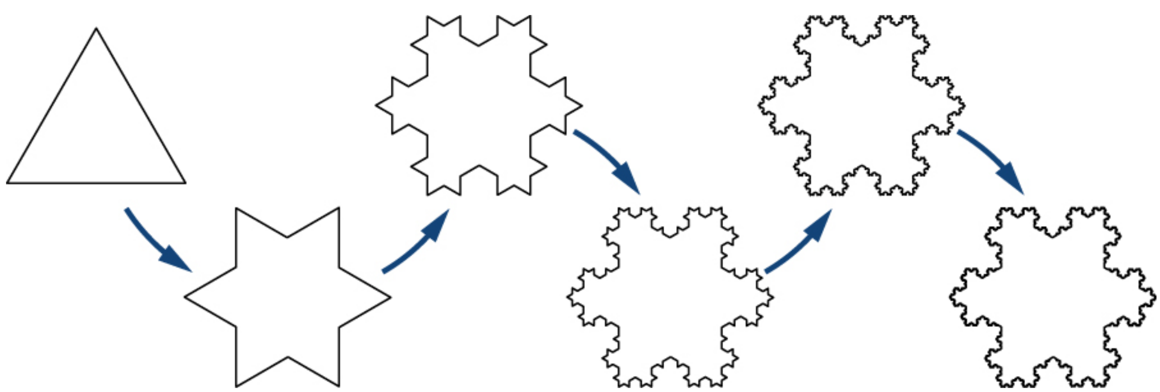


Figura 5.11 Las cuatro primeras figuras, F_0, F_1, F_2, y F_3, en la construcción del copo de nieve de Koch.

a. Halle la longitud L_n del perímetro de F_n. Evalúe $\lim_{n\to\infty} L_n$ para hallar la longitud del perímetro del copo de nieve de Koch.

b. Halle el área A_n de la figura F_n. Evalúe $\lim_{n\to\infty} A_n$ para hallar el área del copo de nieve de Koch.

Solución

a. Supongamos que N_n denota el número de lados de la figura F_n. Dado que F_0 es un triángulo, $N_0 = 3$. Supongamos que l_n denota la longitud de cada lado de F_n. Dado que F_0 es un triángulo equilátero con lados de longitud $l_0 = 1$, ahora tenemos que determinar N_1 y l_1. Dado que F_1 se crea eliminando el tercio medio de cada lado y sustituyendo ese segmento de línea por dos segmentos de línea, para cada lado de F_0, obtenemos cuatro lados en F_1. Por lo tanto, el número de lados para F_1 es

$$N_1 = 4.3.$$

Como la longitud de cada uno de estos nuevos segmentos de línea es $1/3$ de la longitud de los segmentos de línea en F_0, la longitud de los segmentos de línea para F_1 está dada por

$$l_1 = \frac{1}{3}.1 = \frac{1}{3}.$$

Del mismo modo, para F_2, ya que el tercio medio de cada lado de F_1 se elimina y se sustituye por dos segmentos de línea, el número de lados en F_2 está dada por

$$N_2 = 4N_1 = 4(4.3) = 4^2.3.$$

Como la longitud de cada uno de estos lados es $1/3$ de la longitud de los lados de F_1, la longitud de cada lado de la figura F_2 está dada por

$$l_2 = \frac{1}{3}.l_1 = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

En términos más generales, ya que F_n se crea eliminando el tercio medio de cada lado de F_{n-1} y sustituyendo ese segmento de línea por dos segmentos de línea de longitud $\frac{1}{3}l_{n-1}$ en forma de triángulo equilátero, sabemos que $N_n = 4N_{n-1}$ y $l_n = \frac{l_{n-1}}{3}$. Por lo tanto, el número de lados de la figura F_n es

$$N_n = 4^n.3$$

y la longitud de cada lado es

$$l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Por lo tanto, para calcular el perímetro de F_n, multiplicamos el número de lados N_n y la longitud de cada lado l_n. Concluimos que el perímetro de F_n está dada por

$$L_n = N_n.l_n \text{ n} = 3.\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Por lo tanto, la longitud del perímetro del copo de nieve de Koch es

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \infty.$$

b. Supongamos que T_n denota el área de cada nuevo triángulo creado al formar F_n. Para $n = 0$, T_0 es el área del triángulo equilátero original. Por lo tanto, $T_0 = A_0 = \sqrt{3}/4$. Para $n \geq 1$, ya que las longitudes de los lados del triángulo nuevo son $1/3$ de la longitud de los lados de F_{n-1}, tenemos

$$T_n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 T_{n-1} = \frac{1}{9}.T_{n-1}.$$

Por lo tanto, $T_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n.\frac{\sqrt{3}}{4}$. Como se forma un triángulo nuevo en cada lado de F_{n-1},

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + N_{n-1} . T_n \\ &= A_{n-1} + \left(3.4^{n-1}\right) . \left(\tfrac{1}{9}\right)^n . \tfrac{\sqrt{3}}{4} \\ &= A_{n-1} + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right)^n . \tfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Escribiendo los primeros términos A_0, A_1, A_2, vemos que

$$\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{\sqrt{3}}{4} \\ A_1 &= A_0 + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right) . \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right) . \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right)\right] \\ A_2 &= A_1 + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 . \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right)\right] + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 . \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right) + \tfrac{3}{4} . \left(\tfrac{4}{9}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

De manera más general,

$$A_n \text{ n} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right].$$

Factorizando 4/9 de cada término dentro del paréntesis interior, reescribimos nuestra expresión como

$$A_n \text{ n} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right].$$

La expresión $1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ es una suma geométrica. Como se ha mostrado anteriormente, esta suma satisface

$$1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{1 - (4/9)^n}{1 - (4/9)}.$$

Sustituyendo esta expresión en la expresión anterior y simplificando, concluimos que

$$\begin{aligned} A_n \quad \text{n} &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1-(4/9)^n}{1-(4/9)}\right)\right] \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[\tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{4}{9}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del copo de nieve de Koch es

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Análisis

El copo de nieve de Koch es interesante porque tiene un área finita, pero un perímetro infinito. Aunque al principio esto pueda parecer imposible, recuerde que hemos visto ejemplos similares anteriormente en el texto. Por ejemplo, consideremos la región delimitada por la curva $y = 1/x^2$ y el eje x en el intervalo $[1, \infty)$. Dado que la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

converge, el área de esta región es finita, aunque el perímetro sea infinito.

Serie telescópica

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Discutimos esta serie en el Ejemplo 5.7, mostrando que la serie converge escribiendo las primeras sumas parciales $S_1, S_2, \ldots, S_6$ y observando que todas son de la forma $S_k = \frac{k}{k+1}$. Aquí utilizamos una técnica diferente para demostrar que esta serie converge. Utilizando fracciones parciales, podemos escribir

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto, la serie se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots.$$

Escribiendo los primeros términos de la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$, vemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} \\ S_2 &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3} \\ S_3 &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

En general,

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Observamos que los términos intermedios se anulan entre sí, dejando solo los primeros y últimos términos. En cierto sentido, la serie se colapsa como un catalejo con tubos que desaparecen entre sí para acortar el telescopio. Por esta razón, llamamos serie telescópica a una serie que tiene esta propiedad. Para esta serie, dado que $S_k = 1 - 1/(k+1)$ y $1/(k+1) \to 0$ a medida que $k \to \infty$, la secuencia de sumas parciales converge a 1, y por tanto la serie converge a 1.

Definición

Una **serie telescópica** es una serie en la que la mayoría de los términos se cancelan en cada una de las sumas parciales, dejando solo algunos de los primeros términos y algunos de los últimos.

Por ejemplo, cualquier serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n - b_{n+1}\right] = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots$$

es una serie telescópica. Podemos ver esto escribiendo algunas de las sumas parciales. En particular, vemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= b_1 - b_2 \\ S_2 &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = b_1 - b_3 \\ S_3 &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) = b_1 - b_4. \end{aligned}$$

En general, la k–ésima suma parcial de esta serie es

$$S_k = b_1 - b_{k+1}.$$

Como la k–ésima suma parcial puede simplificarse a la diferencia de estos dos términos, la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ convergerá si y solo si la secuencia $\{b_{k+1}\}$ converge. Además, si la secuencia b_{k+1} converge a algún número finito B, entonces la secuencia de sumas parciales converge a $b_1 - B$, y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}[b_n - b_{n+1}] = b_1 - B.$$

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo utilizar estas ideas para analizar una serie telescópica de esta forma.

EJEMPLO 5.12

Evaluación de una serie telescópica

Determine si la serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

converge o diverge. Si converge, calcule su suma.

Solución

Al escribir los términos de la secuencia de sumas parciales, podemos ver que

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ S_2 &= \left(\cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) = \cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ S_3 &= \left(\cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \\ &= \cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

En general,

$$S_k = \cos(1) - \cos\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

Dado que $1/(k+1) \to 0$ a medida que $k \to \infty$ y $\cos x$ es una función continua, $\cos(1/(k+1)) \to \cos(0) = 1$. Por lo tanto, concluimos que $S_k \to \cos(1) - 1$. La serie telescópica converge y la suma está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = \cos(1) - 1.$$

5.11 Determine si $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right]$ converge o diverge. Si converge, calcule su suma.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Constante de Euler

Hemos demostrado que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. Aquí investigamos el comportamiento de las sumas parciales S_k como $k \to \infty$. En particular, mostramos que se comportan como la función logarítmica natural demostrando que existe una constante γ tal que

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} - \ln k \to \gamma \text{ a medida que } k \to \infty.$$

Esta constante γ se conoce como la constante de Euler.

1. Supongamos que $T_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \ln k$. Evalúe T_k para varios valores de k.
2. Para T_k tal y como se define en la parte 1. demuestre que la secuencia $\{T_k\}$ converge mediante los siguientes pasos
   a. Demuestre que la secuencia $\{T_k\}$ es monótona decreciente. (*Pista:* Demuestre que $\ln(1 + 1/k > 1/(k+1)))$
   b. Demuestre que la secuencia $\{T_k\}$ está delimitada por debajo de cero. (*Pista:* Exprese $\ln k$ como integral definida).
   c. Utilice el teorema de convergencia monótona para concluir que la secuencia $\{T_k\}$ converge. El límite γ es la constante de Euler.
3. Ahora cuán lejos está T_k de γ para un número entero dado k. Demuestre que para $k \geq 1$, $0 < T_k - \gamma \leq 1/k$ mediante los siguientes pasos
   a. Demuestre que $\ln(k+1) - \ln k < 1/k$.
   b. Utilice el resultado de la parte a. para demostrar que para cualquier número entero k,
   $$T_k - T_{k+1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
   c. Para cualquier número entero k y j tal que $j > k$, exprese $T_k - T_j$ como una suma telescópica escribiendo
   $$T_k - T_j = \left(T_k - T_{k+1}\right) + \left(T_{k+1} - T_{k+2}\right) + \left(T_{k+2} - T_{k+3}\right) + \cdots + \left(T_{j-1} - T_j\right).$$
   Utilice el resultado de la parte b. combinado con esta suma telescópica para concluir que
   $$T_k - T_j < \frac{1}{k} - \frac{1}{j}.$$
   d. Aplique el límite a ambos lados de la inecuación de la parte c. para concluir que
   $$T_k - \gamma \leq \frac{1}{k}.$$
   e. Estime γ con una exactitud de $0{,}001$.

SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS

Utilizando la notación sigma, escriba las siguientes expresiones como series infinitas.

67. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

68. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

69. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

70. $\text{sen}\, 1 + \text{sen}\, 1/2 + \text{sen}\, 1/3 + \text{sen}\, 1/4 + \cdots$

Calcule las cuatro primeras sumas parciales $S_1, \ldots, S_4$ para la serie que tiene el ené−ésimo término a_n empezando por $n = 1$ de la siguiente forma.

71. $a_n = n$

72. $a_n = 1/n$

73. $a_n = \text{sen}\,(n\pi/2)$ grandes.

74. $a_n = (-1)^n$

En los siguientes ejercicios, calcule el término general a_n de la serie con la suma parcial dada S_n. Si la secuencia de sumas parciales converge, halle su límite S.

75. $S_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 2$

76. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1$

77. $S_n = \sqrt{n}, n \geq 2$

78. $S_n = 2 - (n+2)/2^n, n \geq 1$

Para cada una de las siguientes series, utilice la secuencia de sumas parciales para determinar si la serie converge o diverge.

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (-1)^n\right)$ grandes.

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (*Pista:* Utilice una descomposición en fracciones parciales como la de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.) grandes.

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ (*Pista:* Siga el razonamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.)

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, *que* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1$, *que* $a_1 = 2$, *y* $b_1 = -3$. *Calcule la suma de las series indicadas.*

83. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ grandes.

84. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n)$ grandes.

85. $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - b_n)$ grandes.

86. $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n+1} - 4b_{n+1})$

Indique si la serie dada converge y explique por qué.

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1.000}$ (*Pista:* Reescriba utilizando un cambio de índice).

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 10^{80}}$ (*Pista:* Reescriba utilizando un cambio de índice).

89. $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1.000} + \cdots$

90. $1 + \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} + \frac{e^3}{\pi^3} + \cdots$

91. $1 + \frac{\pi}{e^2} + \frac{\pi^2}{e^4} + \frac{\pi^3}{e^6} + \frac{\pi^4}{e^8} + \cdots$

92. $1 - \sqrt{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} - \sqrt{\frac{\pi^3}{27}} + \cdots$

Para a_n como sigue, escriba la suma como una serie geométrica de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$. Indique si la serie converge y, si lo hace, halle el valor de $\sum a_n$.

93. $a_1 = -1$ y $a_n/a_{n+1} = -5$ para $n \geq 1$.

94. $a_1 = 2$ y $a_n/a_{n+1} = 1/2$ para $n \geq 1$.

95. $a_1 = 10$ y $a_n/a_{n+1} = 10$ para $n \geq 1$.

96. $a_1 = 1/10$ y $a_n/a_{n+1} = -10$ para $n \geq 1$.

Utilice la identidad $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ para expresar la función como una serie geométrica en el término indicado.

97. $\frac{x}{1+x}$ en x

98. $\frac{\sqrt{x}}{1-x^{3/2}}$ en $\sqrt{x}$

99. $\frac{1}{1+\text{sen}^2 x}$ en $\text{sen}\, x$

100. $\sec^2 x$ en $\text{sen}\, x$

Evalúe la siguiente serie telescópica o indique si la serie diverge.

101. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1/n} - 2^{1/(n+1)}$ grandes.

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13}} - \frac{1}{(n+1)^{13}}$

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)$ grandes.

104. $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen}\, n - \text{sen}\,(n+1))$

Exprese la siguiente serie como una suma telescópica y evalúe su enésima suma parcial.

105. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ grandes.

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\left(n^2+n\right)^2}$ (*Pista:* Factorice el denominador y utilice fracciones parciales).

107. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n \ln (n+1)}$ grandes.

108. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^{n+1}}$ (*Pista:* Mire $1/(n2^n)$.)

Una serie telescópica general es aquella en la que todos los términos, excepto los primeros, se anulan tras sumar un número determinado de términos sucesivos.

109. Supongamos que $a_n = f(n) - 2f(n+1) + f(n+2)$, en la que $f(n) \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

110. $a_n = f(n) - f(n+1) - f(n+2) + f(n+3)$, en la que $f(n) \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

111. Supongamos que $a_n = c_0 f(n) + c_1 f(n+1) + c_2 f(n+2) + c_3 f(n+3) + c_4 f(n+4)$, donde $f(n) \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Halle una condición sobre los coeficientes $c_0, \ldots, c_4$ que la convierten en una serie telescópica general.

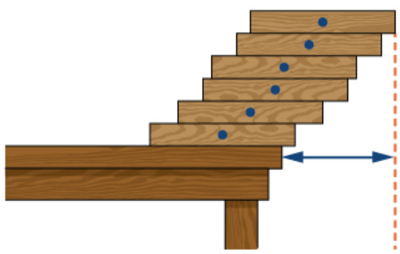
112. Evalúe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (*Pista:* $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$)

113. Evalúe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^3 - n}$.

114. Halle una fórmula para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+N)}$ donde N es un número entero positivo.

115. **[T]** Defina una secuencia $t_k = \sum_{n=1}^{k-1} (1/k) - \ln k$. Utilice el gráfico de $1/x$ para verificar que t_k es creciente. Grafique t_k para $k = 1 \ldots 100$ y afirme si parece que la secuencia converge.

116. **[T]** Supongamos que N bloques rectangulares iguales y uniformes se apilan uno encima de otro, dejando que sobresalga un poco. La ley de Arquímedes de la palanca implica que la pila de N bloques es estable siempre que el centro de masa de los $(N-1)$ bloques superiores se encuentre en el borde del bloque inferior. Supongamos que x denota la posición del borde del bloque inferior, y piense en su posición como relativa al centro del bloque que le sigue. Esto implica que $(N-1)x = \left(\frac{1}{2} - x\right)$ o $x = 1/(2N)$. Utilice esta expresión para calcular el saliente máximo (la posición del borde del bloque superior sobre el borde del bloque inferior). Vea la siguiente figura.



Cada una de las siguientes series infinitas converge al múltiplo dado de π o $1/\pi$.

En cada caso, halle el valor mínimo de N tal que la N−ésima suma parcial de la serie se aproxime exactamente al lado izquierdo con el número de decimales dado, e indique el valor aproximado deseado. Hasta 15 decimales, $\pi = 3{,}141592653589793....$

117. **[T]** $\pi = -3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n n!^2}{(2n)!}$, error $< 0{,}0001$

118. **[T]** $\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$, error $< 10^{-4}$

119. **[T]** $\frac{9.801}{2\pi} = \frac{4}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1.103 + 26.390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$, error $< 10^{-12}$

120. **[T]** $\frac{1}{12\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$, error $< 10^{-15}$

121. **[T]** Una moneda justa es aquella que tiene probabilidad $1/2$ de salir cara cuando se lanza.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una moneda justa salga cruz? n veces seguidas?
b. Calcule la probabilidad de que una moneda salga cara por primera vez en el último lanzamiento de un número par de lanzamientos.

122. **[T]** Calcule la probabilidad de que una moneda justa se lance un múltiplo de tres veces antes de salir cara.

123. **[T]** Calcule la probabilidad de que una moneda justa salga cara por segunda vez después de un número par de lanzamientos.

124. **[T]** Calcule una serie que exprese la probabilidad de que una moneda justa salga cara por segunda vez en un múltiplo de tres lanzamientos.

125. **[T]** El número esperado de veces que una moneda justa saldrá cara se define como la suma sobre $n = 1, 2, \ldots$ de n veces la probabilidad de que la moneda salga cara exactamente n veces seguidas, o $n/2^{n+1}$. Calcule el número esperado de veces consecutivas que una moneda justa saldrá cara.

126. **[T]** Una persona deposita $\$10$ dólares al principio de cada trimestre en una cuenta bancaria que gana $4\ \%$ de interés anual compuesto trimestralmente (cuatro veces al año).

a. Demuestre que los intereses acumulados después de n trimestres son $\$10\left(\frac{1{,}01^{n+1}-1}{0{,}01} - n\right)$.
b. Halle los ocho primeros términos de la secuencia.
c. ¿Cuántos intereses se han acumulado después de 2 años?

127. **[T]** Supongamos que la cantidad de un medicamento en el sistema de un paciente disminuye en un factor multiplicativo $r < 1$ cada hora. Supongamos que se administra una nueva dosis cada N horas. Halle una expresión que indique la cantidad $A(n)$ en el sistema del paciente después de n horas para cada n en cuanto a la dosis d y el cociente r. (*Pista:* Escriba $n = mN + k$, donde $0 \leq k < N$, y sume los valores de las diferentes dosis administradas).

128. **[T]** Un determinado fármaco es eficaz para un paciente promedio solo si hay al menos 1 mg por kg en el sistema del paciente, mientras que solo es seguro si hay como máximo 2 mg por kg en el sistema de un paciente promedio. Supongamos que la cantidad en el sistema del paciente disminuye en un factor multiplicativo de $0{,}9$ cada hora después de la administración de una dosis. Halle el intervalo máximo N de horas entre dosis, y el rango de dosis correspondiente d (en mg/kg) para este N que permitirá que el uso del medicamento sea seguro y eficaz a largo plazo.

129. Supongamos que $a_n \geq 0$ es una secuencia de números. Explique por qué la secuencia de sumas parciales de a_n es creciente.

130. **[T]** Supongamos que a_n es una secuencia de números positivos y la secuencia S_n de sumas parciales de a_n está delimitada por encima.

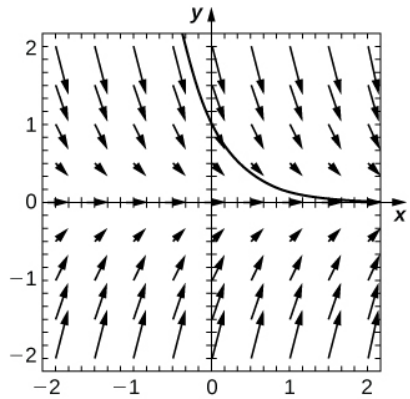
Explique por qué $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ¿Sigue siendo cierta la conclusión si eliminamos la hipótesis $a_n \geq 0$?

131. **[T]** Supongamos que $a_1 = S_1 = 1$ y que, para números dados $S > 1$ y $0 < k < 1$, se define $a_{n+1} = k(S - S_n)$ y $S_{n+1} = a_{n+1} + S_n$. ¿ S_n converge? Si es así, ¿a qué? (*Pista:* Primero argumente que $S_n < S$ para todo n y S_n es creciente).

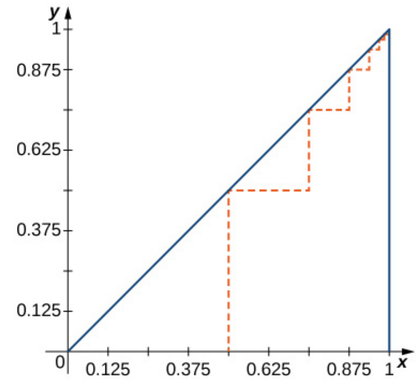
132. **[T]** Una versión del crecimiento de von Bertalanffy puede utilizarse para estimar la edad de un individuo en una especie homogénea a partir de su longitud si el incremento anual en el año $n + 1$ satisface $a_{n+1} = k(S - S_n)$, con S_n como la longitud en el año n, S como longitud límite, y k como constante de crecimiento relativo. Si $S_1 = 3$, $S = 9$, y $k = 1/2$, estime numéricamente el valor más pequeño de n tal que $S_n \geq 8$. Observe que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. Calcule el n correspondiente cuando $k = 1/4$.

133. **[T]** Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de términos positivos. Explique por qué $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0$.

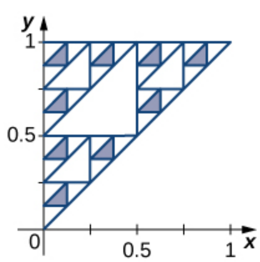
134. **[T]** Calcule la longitud de la trayectoria en zigzag de la siguiente figura.



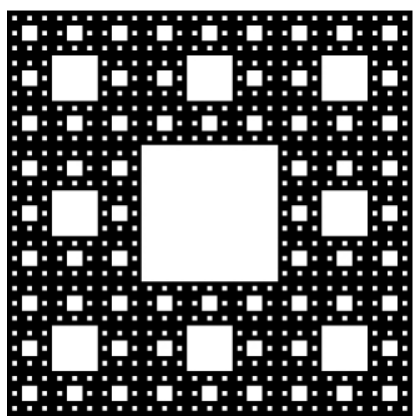
135. **[T]** Calcule la longitud total de la trayectoria discontinua en la siguiente figura



136. **[T]** El triángulo de Sierpinski se obtiene a partir de un triángulo suprimiendo el cuarto triángulo central como se indica en el primer paso, suprimiendo los cuartos triángulos centrales de los tres triángulos congruentes restantes en el segundo paso, y en general suprimiendo los cuartos triángulo centrales de los triángulos restantes en cada paso sucesivo. Suponiendo que el triángulo original se muestra en la figura, halle las áreas de las partes restantes del triángulo original después de N pasos y calcule la longitud total de todos los triángulos limítrofes después de N pasos.



137. **[T]** La alfombra de Sierpinski se obtiene dividiendo el cuadrado unitario en nueve subcuadrados iguales, eliminando el cuadrado del medio y haciendo lo mismo en cada etapa con los subcuadrados restantes. La figura muestra el conjunto restante después de cuatro iteraciones. Calcule el área total eliminada después de N etapas y calcule la longitud el perímetro total del conjunto restante después de N etapas.



5.3 Las pruebas de divergencia e integral

Objetivos de aprendizaje

5.3.1 Utilizar la prueba de divergencia para determinar si una serie converge o diverge.
5.3.2 Utilizar la prueba de la integral para determinar la convergencia de una serie.
5.3.3 Estimar el valor de una serie encontrando los límites de su término restante.

En el apartado anterior, determinamos la convergencia o divergencia de varias series calculando explícitamente el límite de la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$. En la práctica, calcular explícitamente este límite puede ser difícil o imposible. Por suerte, existen varias pruebas que nos permiten determinar la convergencia o divergencia de muchos tipos de series. En esta sección, discutimos dos de estas pruebas: la prueba de divergencia y la prueba de la integral. En el resto de este capítulo examinaremos otras pruebas y luego resumiremos cómo y cuándo utilizarlas.

Prueba de divergencia

Para que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja, la ené−ésimo término a_n debe satisfacer $a_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

Por lo tanto, a partir de las propiedades del límite algebraico de las secuencias,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0.$$

Por lo tanto, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, el ené−ésimo término $a_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Una consecuencia importante de este hecho es la siguiente afirmación:

$$\text{Si } a_n \nrightarrow 0 \text{ a medida que } n \to \infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.} \tag{5.8}$$

Esta prueba se conoce como **prueba de divergencia** porque proporciona una forma de demostrar que una serie diverge.

Teorema 5.8

Prueba de divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = c \neq 0$ o $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Es importante señalar que la inversa de este teorema no es cierta. Es decir, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no podemos hacer ninguna conclusión sobre la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por ejemplo, $\lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$, pero la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. En esta sección y en las restantes de este capítulo, mostramos muchos más ejemplos de este tipo de series. En consecuencia, aunque podemos utilizar la prueba de divergencia para demostrar que una serie diverge, no podemos utilizarla para demostrar que una serie converge. En concreto, si $a_n \to 0$, la prueba de divergencia no es concluyente.

EJEMPLO 5.13

Utilización de la prueba de divergencia

Para cada una de las siguientes series, aplique la prueba de divergencia. Si la prueba de divergencia demuestra que la serie es divergente, indíquelo. En caso contrario, indique que la prueba de divergencia no es concluyente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$
b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$
c. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$

Solución

a. Dado que $n/(3n-1) \to 1/3 \neq 0$, por la prueba de divergencia, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$$

diverge.

b. Dado que $1/n^3 \to 0$, la prueba de divergencia no es concluyente.

c. Dado que $e^{1/n^2} \to 1 \neq 0$, por la prueba de divergencia, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$$

diverge.

5.12 ¿Qué nos dice la prueba de divergencia sobre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n^2)$?

Prueba de la integral

En la sección anterior, demostramos que la serie armónica diverge observando la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ y demostrando que $S_{2k} > 1 + k/2$ para todos los enteros positivos k. En esta sección utilizamos una técnica diferente para demostrar la divergencia de la serie armónica. Esta técnica es importante porque se utiliza para demostrar la divergencia o convergencia de muchas otras series. Esta prueba, llamada **prueba de la integral**, compara una suma infinita con una integral impropia. Es importante señalar que esta prueba solo puede aplicarse cuando consideramos una serie cuyos términos son todos positivos.

Para ilustrar cómo funciona la prueba de la integral, utilice la serie armónica como ejemplo. En la Figura 5.12, representamos la serie armónica dibujando una secuencia de rectángulos con áreas $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ junto con la función $f(x) = 1/x$. En el gráfico vemos que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \int_1^{k+1} \frac{1}{x} dx.$$

Por lo tanto, para cada k, la $k-$ésima suma parcial S_k satisface

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > \int_1^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(1) = \ln(k+1).$$

Dado que $\lim\limits_{k\to\infty} \ln(k+1) = \infty$, vemos que la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ no está delimitada. Por lo tanto, $\{S_k\}$ diverge y, en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ también diverge.

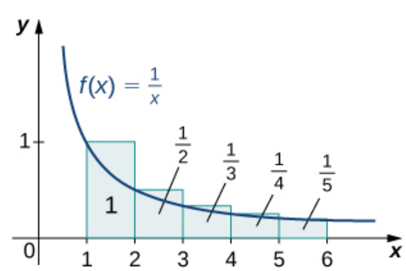


Figura 5.12 La suma de las áreas de los rectángulos es mayor que el área entre la curva $f(x) = 1/x$ y el eje x para

$x \geq 1$. Como el área delimitada por la curva es infinita (calculada por una integral impropia), la suma de las áreas de los rectángulos también es infinita.

Ahora consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Mostramos cómo se puede utilizar una integral para demostrar que esta serie converge. En la Figura 5.13, dibujamos una secuencia de rectángulos con áreas $1, 1/2^2, 1/3^2, \ldots$ junto con la función $f(x) = 1/x^2$. En el gráfico vemos que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 1 + \int_1^k \frac{1}{x^2} dx.$$

Por lo tanto, para cada k, la $k-\text{ésima}$ suma parcial S_k satisface

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^k \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{x}\bigg|_1^k = 1 - \frac{1}{k} + 1 = 2 - \frac{1}{k} < 2.$$

Concluimos que la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ está delimitada. También vemos que $\{S_k\}$ es una secuencia creciente:

$$S_k = S_{k-1} + \frac{1}{k^2} \text{ para } k \geq 2.$$

Dado que $\{S_k\}$ es creciente y está delimitada, por el teorema de convergencia monótona, converge. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge.

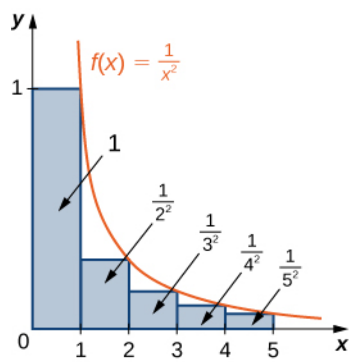


Figura 5.13 La suma de las áreas de los rectángulos es menor que la suma del área del primer rectángulo y el área entre la curva $f(x) = 1/x^2$ y el eje x para $x \geq 1$. Como el área delimitada por la curva es finita, la suma de las áreas de los rectángulos también lo es.

Podemos extender esta idea para demostrar la convergencia o divergencia de muchas series diferentes. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie con términos positivos a_n tal que existe una función continua, positiva y decreciente f donde $f(n) = a_n$ para todos los enteros positivos. Entonces, como en la Figura 5.14(a), para cualquier número entero k, la $k-\text{ésima}$ suma parcial S_k satisface

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k < a_1 + \int_1^k f(x)dx < a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Por lo tanto, si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ está delimitada. Dado que $\{S_k\}$ es una secuencia creciente, si además es una secuencia delimitada, entonces por el teorema de convergencia monótona, converge. Concluimos que si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Por otra parte, a partir de la Figura 5.14(b), para cualquier número entero k, la $k-\text{ésima}$ suma parcial S_k satisface

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k > \int_1^{k+1} f(x)dx.$$

Si $\lim\limits_{k \to \infty} \int_1^{k+1} f(x)dx = \infty$, entonces $\{S_k\}$ es una secuencia no delimitada y por lo tanto diverge. Como resultado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge. Concluimos que si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

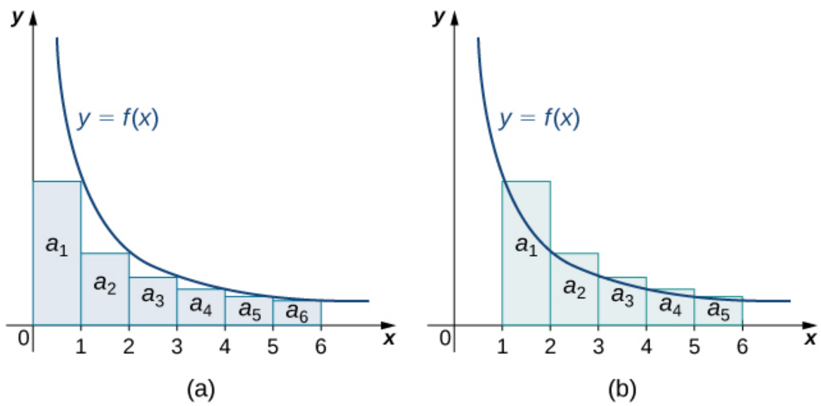


Figura 5.14 (a) Si podemos inscribir rectángulos dentro de una región delimitada por una curva $y = f(x)$ y la intersección en eje x, y el área delimitada por esas curvas para $x \geq 1$ es finita, entonces la suma de las áreas de los rectángulos también es finita. (b) Si un conjunto de rectángulos circunscribe la región delimitada por $y = f(x)$ y la intersección en eje x para $x \geq 1$ y la región tiene un área infinita, entonces la suma de las áreas de los rectángulos también es infinita.

Teorema 5.9

Prueba de la integral

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie con términos positivos a_n. Supongamos que existe una función f y un número entero positivo N de manera que se cumplan las tres condiciones siguientes:

i. f es continua,
ii. f es decreciente y
iii. $f(n) = a_n$ para todos los enteros $n \geq N$.
Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{y} \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

ambas convergen o ambas divergen (vea la Figura 5.14).

Si bien la convergencia de $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ implica la convergencia de las series relacionadas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, no implica que el valor de la integral y de la serie sea el mismo. Pueden ser diferentes, y a menudo lo son. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \left(\frac{1}{e}\right)^3 + \cdots$$

es una serie geométrica con término inicial $a = 1/e$ y cociente $r = 1/e$, que converge a

$$\frac{1/e}{1-(1/e)} = \frac{1/e}{(e-1)/e} = \frac{1}{e-1}.$$

Sin embargo, la integral relacionada $\int_1^\infty (1/e)^x\,dx$ satisface

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{e}\right)^x dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+e^{-1}\right] = \frac{1}{e}.$$

EJEMPLO 5.14

Uso de la prueba de la integral

Para cada una de las siguientes series, utilice la prueba integral para determinar si la serie converge o diverge. Supongamos que se cumplen todas las condiciones de la prueba de la integral.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{2n-1}$

Solución

a. Compare

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ \text{y}\ \int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx.$$

Tenemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Así, la integral $\int_1^\infty 1/x^3\,dx$ converge, y por lo tanto también lo hace la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

b. Compare

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\ \text{y}\ \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx.$$

Dado que

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \lim_{b\to\infty}\sqrt{2x-1}\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{2b-1}-1\right] = \infty,\end{aligned}$$

la integral $\int_1^{\infty} 1/\sqrt{2x-1}\,dx$ diverge, y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

diverge.

5.13 Utilice la prueba integral para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2+1}$ converge o diverge.

La serie *p*

La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ son ambos ejemplos de un tipo de serie llamada serie *p*.

Definición

Para cualquier número real p, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

se llama serie ***p***.

Sabemos que la serie *p* converge si $p = 2$ y diverge si $p = 1$. ¿Qué pasa con otros valores de p? En general, es difícil, si no imposible, calcular el valor exacto de la mayoría de las series p. Sin embargo, podemos utilizar las pruebas presentadas hasta ahora para demostrar si una serie p converge o diverge.

Si $p < 0$, entonces $1/n^p \to \infty$, y si $p = 0$, entonces $1/n^p \to 1$. Por lo tanto, por la prueba de divergencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p \text{ diverge si } p \leq 0.$$

Si $p > 0$, entonces $f(x) = 1/x^p$ es una función positiva, continua y decreciente. Por lo tanto, para $p > 0$, utilizamos la prueba integral, comparando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ y } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Ya hemos considerado el caso cuando $p = 1$. Aquí consideramos el caso cuando $p > 0, p \neq 1$. Para este caso,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p} \left[b^{1-p} - 1\right].$$

Dado que

$$b^{1-p} \to 0 \text{ si } p > 1 \text{ y } b^{1-p} \to \infty \text{ si } p < 1,$$

concluimos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \text{ si } p > 1 \\ \infty \text{ si } p \leq 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p < 1$.

En resumen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}. \quad (5.9)$$

EJEMPLO 5.15

Pruebas de convergencia de las series *p*

Para cada una de las siguientes series, determine si converge o diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$

Solución

a. Se trata de una serie *p* con $p = 4 > 1$, para que la serie converja.
b. Dado que $p = 2/3 < 1$, la serie diverge.

5.14 ¿La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ converge o diverge?

Estimar el valor de una serie

Supongamos que sabemos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y queremos estimar la suma de esa serie. Ciertamente podemos aproximar esa suma utilizando cualquier suma finita $\sum_{n=1}^{N} a_n$ donde N es cualquier número entero positivo. La cuestión que abordamos aquí es, para una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ¿qué tan buena es la aproximación $\sum_{n=1}^{N} a_n$? Más concretamente, si suponemos que

$$R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$$

es el resto cuando la suma de una serie infinita se aproxima por la Nsimo suma parcial, ¿qué tan grande es R_N? Para algunos tipos de series, podemos utilizar las ideas de la prueba de la integral para estimar R_N.

Teorema 5.10

Estimación del resto de la prueba de la integral

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente con términos positivos. Supongamos que existe una función f que satisface las tres condiciones siguientes:

i. f es continua,
ii. f es decreciente y
iii. $f(n) = a_n$ para todos los enteros $n \geq 1$.

Supongamos que S_N es la *enésima* suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Para todos los enteros positivos N,

$$S_N + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < S_N + \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

En otras palabras, el resto $R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ satisface la siguiente estimación:

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx < R_N < \int_{N}^{\infty} f(x)dx. \tag{5.10}$$

Es lo que se conoce como **estimación del resto**.

Ilustramos la Estimación del resto de la prueba de la integral en la Figura 5.15. En particular, al representar el resto $R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots$ como la suma de las áreas de los rectángulos, vemos que el área de esos rectángulos está delimitada por encima por $\int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$ y delimitada por debajo por $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$. En otras palabras,

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots > \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

y

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Concluimos que

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_N < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N + R_N,$$

donde S_N es la enésimo suma parcial, concluimos que

$$S_N + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < S_N + \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

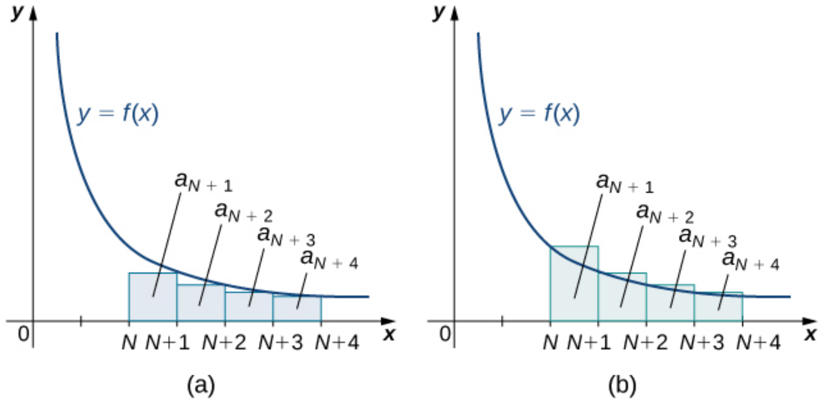


Figura 5.15 Dada una función continua, positiva y decreciente f y una secuencia de términos positivos a_n tal que $a_n = f(n)$ para todos los enteros positivos n, (a) las áreas $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots < \int_N^\infty f(x)\,dx$, o (b) las áreas $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots > \int_{N+1}^\infty f(x)\,dx$. Por lo tanto, la integral es una sobreestimación o una subestimación del error.

EJEMPLO 5.16

Estimar el valor de una serie

Considere la serie $\sum_{n=1}^\infty 1/n^3$.

a. Calcule $S_{10} = \sum_{n=1}^{10} 1/n^3$ y estime el error.

b. Determine el menor valor de N necesario para que S_N estime $\sum_{n=1}^\infty 1/n^3$ con una precisión de $0{,}001$.

Solución

a. Utilizando una herramienta de cálculo, tenemos

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1{,}19753.$$

Por la estimación del resto, sabemos que

$$R_N < \int_N^\infty \frac{1}{x^3}dx.$$

Tenemos

$$\int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{10}^b \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_N^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2N^2}\right] = \frac{1}{2N^2}.$$

Por lo tanto, el error es $R_{10} < 1/2(10)^2 = 0{,}005$.

b. Calcule N tal que $R_N < 0{,}001$. En la parte a. demostramos que $R_N < 1/2N^2$. Por lo tanto, el resto $R_N < 0{,}001$ siempre y cuando $1/2N^2 < 0{,}001$. Es decir, necesitamos $2N^2 > 1.000$. Resolviendo esta inecuación para N, vemos que necesitamos $N > 22{,}36$. Para asegurarnos de que el resto está dentro de la cantidad deseada, tenemos que redondear al entero más cercano. Por lo tanto, el valor mínimo necesario es $N = 23$.

5.15 Para $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$, calcule S_5 y estime el error R_5.

SECCIÓN 5.3 EJERCICIOS

Para cada una de las siguientes series, si se aplica la prueba de divergencia, indique que $\lim_{n\to\infty} a_n$ *no existe o halle* $\lim_{n\to\infty} a_n$*. Si la prueba de divergencia no aplica, explique por qué.*

138. $a_n = \frac{n}{n+2}$

139. $a_n = \frac{n}{5n^2-3}$

140. $a_n = \frac{n}{\sqrt{3n^2+2n+1}}$

141. $a_n = \frac{(2n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$

142. $a_n = \frac{(2n+1)^{2n}}{\left(3n^2+1\right)^n}$

143. $a_n = \frac{2^n}{3^{n/2}}$

144. $a_n = \frac{2^n+3^n}{10^{n/2}}$

145. $a_n = e^{-2/n}$

146. $a_n = \cos n$

147. $a_n = \tan n$

148. $a_n = \frac{1-\cos^2(1/n)}{\operatorname{sen}^2(2/n)}$ grandes.

149. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$

150. $a_n = \frac{\ln n}{n}$

151. $a_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$

Indique si la serie p converge.

152. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

153. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

154. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

155. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$

156. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e}{n^{\pi}}$

157. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\pi}}{n^{2e}}$

Utilice la prueba de la integral para determinar si las siguientes sumas convergen.

158. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$

159. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$

160. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

161. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

162. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

163. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{1+n^4}$

164. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

Exprese las siguientes sumas como series p y determine si cada una converge.

165. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\ln n}$ (*Pista:* $2^{-\ln n} = 1/n^{\ln 2}$).

166. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\ln n}$ (*Pista:* $3^{-\ln n} = 1/n^{\ln 3}$).

167. $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-2\ln n}$

168. $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-2\ln n}$

Utilice la estimación $R_N \leq \int_N^{\infty} f(t)dt$ para calcular un límite para el resto $R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$ donde $a_n = f(n)$.

169. $\sum_{n=1}^{1.000} \frac{1}{n^2}$

170. $\sum_{n=1}^{1.000} \frac{1}{n^3}$

171. $\sum_{n=1}^{1.000} \frac{1}{1+n^2}$

172. $\sum_{n=1}^{100} n/2^n$

[T] *Halle el valor mínimo de N tal que la estimación del resto $\int_{N+1}^{\infty} f < R_N < \int_N^{\infty} f$ garantice que $\sum_{n=1}^{N} a_n$ estima $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con una precisión dentro del error dado.*

173. $a_n = \frac{1}{n^2}$, error $< 10^{-4}$

174. $a_n = \frac{1}{n^{1,1}}$, error $< 10^{-4}$

175. $a_n = \frac{1}{n^{1,01}}$, error $< 10^{-4}$

176. $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$, error $< 10^{-3}$

177. $a_n = \frac{1}{1+n^2}$, error $< 10^{-3}$

En los siguientes ejercicios, halle un valor de N tal que R_N sea menor que el error deseado. Calcule la suma correspondiente $\sum_{n=1}^{N} a_n$ y compárela con la estimación dada de la serie infinita.

178. $a_n = \frac{1}{n^{11}}$, error $< 10^{-4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}} = 1{,}000494\ldots$

179. $a_n = \frac{1}{e^n}$, error $< 10^{-5}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e-1} = 0{,}581976\ldots$

180. $a_n = \frac{1}{e^{n^2}}$, error $< 10^{-5}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n/e^{n^2} = 0{,}40488139857\ldots$

181. $a_n = 1/n^4$, error $< 10^{-4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90 = 1{,}08232...$

182. $a_n = 1/n^6$, error $< 10^{-6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^6/945 = 1{,}01734306...$,

183. Calcule el límite a medida que $n \to \infty$ de $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$. (*Pista:* Compare con $\int_n^{2n} \frac{1}{t}dt$.). grandes.

184. Calcule el límite a medida que $n \to \infty$ de $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}$

Los siguientes ejercicios pretenden dar una idea de las aplicaciones en las que surgen las sumas parciales de las series armónicas.

185. En ciertas aplicaciones de la probabilidad, como el llamado estimador de Watterson para predecir las tasas de mutación en genética de poblaciones, es importante tener una estimación precisa del número $H_k = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$. Recordemos que $T_k = H_k - \ln k$ es decreciente. Calcule $T = \lim_{k \to \infty} T_k$ con cuatro decimales. (*Pista:* $\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$).

186. **[T]** El muestreo completo con reemplazo, a veces llamado *problema del recolector de cupones* se plantea de la siguiente manera: Suponga que tiene N artículos únicos en una papelera. En cada paso, se elige un artículo al azar, se identifica y se devuelve a la papelera. El problema pregunta cuál es el número esperado de pasos $E(N)$ que se necesita para sacar cada artículo único al menos una vez. Resulta que $E(N) = N$. $H_N = N\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right)$. Calcule $E(N)$ para $N = 10, 20, \text{ y } 50$.

187. **[T]** La forma más sencilla de barajar las cartas es tomar la carta superior e insertarla en un lugar aleatorio del mazo, lo que se llama inserción aleatoria superior, y luego repetir. Consideraremos que un mazo se baraja aleatoriamente una vez que se han realizado suficientes inserciones aleatorias en la parte superior como para que la carta que estaba originalmente en la parte inferior haya llegado a la parte superior y haya sido insertada aleatoriamente. Si el mazo tiene n cartas, entonces la probabilidad de que la inserción esté por debajo de la carta inicialmente en la parte inferior (llamémosla carta B) es $1/n$. Así, el número esperado de inserciones aleatorias superiores antes de que B ya no esté en el fondo es n. Una vez que una carta esté por debajo de B, hay dos lugares debajo de B y la probabilidad de que una carta insertada al azar quede por debajo de B es $2/n$. El número esperado de inserciones aleatorias superiores antes de que esto ocurra es $n/2$. Las dos cartas debajo de B están ahora en orden aleatorio. Siguiendo así, halle una fórmula para el número esperado de inserciones aleatorias superiores necesarias para considerar que el mazo se barajea al azar.

188. Supongamos que un scooter puede viajar 100 km con el depósito lleno. Suponiendo que el combustible se puede transferir de un scooter a otro, pero solo se puede llevar en el depósito, presente un procedimiento que permita a uno de los scooters viajar $100H_N$ km, donde $H_N = 1 + 1/2 + \cdots + 1/N$.

189. Demuestre que para que la estimación del resto se aplique en $[N, \infty)$ es suficiente que $f(x)$ sea decreciente en $[N, \infty)$, pero f no tiene por qué ser decreciente en $[1, \infty)$.

190. **[T]** Utilice la estimación del resto y la integración por partes para aproximar $\sum_{n=1}^{\infty} n/e^n$ con un error menor que $0{,}0001$.

191. ¿$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge si p es lo suficientemente grande? Si es así, ¿para cuáles p?

192. **[T]** Supongamos que una computadora puede sumar un millón de términos por segundo de la serie divergente $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Utilice la prueba de la integral para aproximar cuántos segundos tardará en sumar suficientes términos para que la suma parcial supere 100.

193. **[T]** Una computadora rápida puede sumar un millón de términos por segundo de la serie divergente $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n}$. Utilice la prueba de la integral para aproximar cuántos segundos tardará en sumar suficientes términos para que la suma parcial supere 100.

5.4 Pruebas de comparación

Objetivos de aprendizaje

5.4.1 Utilizar la prueba de comparación para comprobar la convergencia de una serie.
5.4.2 Utilizar la prueba de comparación de límites para determinar la convergencia de una serie.

Hemos visto que la prueba de la integral nos permite determinar la convergencia o divergencia de una serie comparándola con una integral impropia relacionada. En esta sección, mostramos cómo utilizar las pruebas de comparación para determinar la convergencia o divergencia de una serie comparándola con una serie cuya convergencia o divergencia se conoce. Normalmente, estas pruebas se utilizan para determinar la convergencia de las series que son similares a las series geométricas o a las series *p*.

Prueba de comparación

En las dos secciones anteriores, hemos hablado de dos grandes clases de series: las series geométricas y las series *p*. Sabemos exactamente cuándo estas series convergen y cuándo divergen. Aquí mostramos cómo utilizar la convergencia o divergencia de estas series para demostrar la convergencia o divergencia de otras series, utilizando un método llamado **prueba de comparación**.

Por ejemplo, consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Esta serie es similar a la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Como los términos de cada una de las series son positivos, la secuencia de sumas parciales de cada serie es monótona creciente. Además, como

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

para todos los enteros positivos n, la k−ésima suma parcial S_k de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ satisface

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+1} < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(Vea la Figura 5.16(a) y la Tabla 5.1). Como la serie de la derecha converge, la secuencia $\{S_k\}$ está delimitada por encima. Concluimos que $\{S_k\}$ es una secuencia monótona creciente que está delimitada por encima. Por lo tanto, por el teorema de convergencia monótona, $\{S_k\}$ converge, y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

converge.

Del mismo modo, consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}.$$

Esta serie se parece a la serie divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

La secuencia de sumas parciales de cada serie es monótona creciente y

$$\frac{1}{n-1/2} > \frac{1}{n} > 0$$

para cada número entero positivo n. Por lo tanto, la k−ésima suma parcial S_k de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}$ satisface

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n-1/2} > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}.$$

(Vea la Figura 5.16(b) y la Tabla 5.2). Dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge al infinito, la secuencia de sumas parciales $\sum_{n=1}^{k} 1/n$ no está delimitada. En consecuencia, $\{S_k\}$ es una secuencia no delimitada, y por lo tanto diverge. Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}$$

diverge.

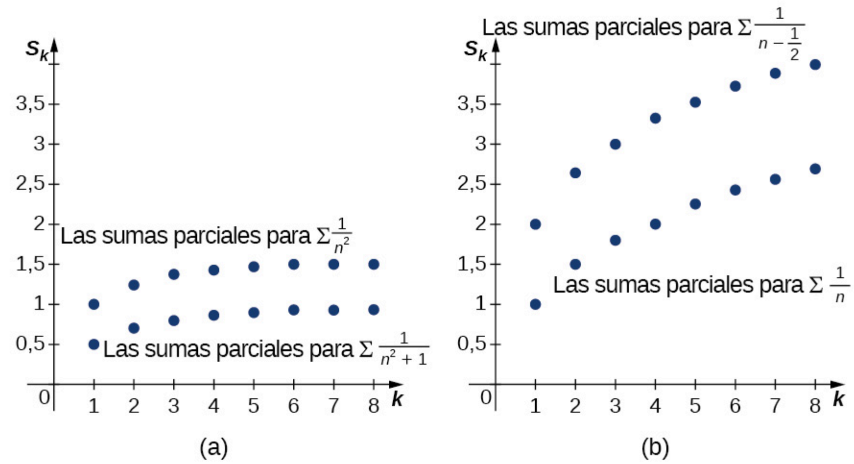


Figura 5.16 (a) Cada una de las sumas parciales de la serie dada es menor que la correspondiente suma parcial de la serie . (b) Cada una de las sumas parciales de la serie dada es mayor que la correspondiente suma parcial de la serie armónica divergente.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+1}$	0,5	0,7	0,8	0,8588	0,8973	0,9243	0,9443	0,9597
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$	1	1,25	1,3611	1,4236	1,4636	1,4914	1,5118	1,5274

Tabla 5.1 Comparación de una serie con una serie *p* (*p* = 2)

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n-1/2}$	2	2,6667	3,0667	3,3524	3,5746	3,7564	3,9103	4,0436
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$	1	1,5	1,8333	2,0933	2,2833	2,45	2,5929	2,7179

Tabla 5.2 Comparación de una serie con la serie armónica

Teorema 5.11

Prueba de comparación

i. Supongamos que existe un número entero N tal que $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \ge N$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii. Supongamos que existe un número entero N tal que $a_n \ge b_n \ge 0$ para todo $n \ge N$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Prueba

Demostramos la parte i. La prueba de la parte ii. es el contrapositivo de la parte i. Supongamos que $\{S_k\}$ es la secuencia

de sumas parciales asociadas a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y supongamos que $L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Dado que los términos $a_n \geq 0$,

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = S_{k+1}.$$

Por tanto, la secuencia de sumas parciales es creciente. Además, como $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$, entonces

$$\sum_{n=N}^{k} a_n \leq \sum_{n=N}^{k} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L.$$

Por lo tanto, para todo $k \geq 1$,

$$S_k = \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}\right) + \sum_{n=N}^{k} a_n \leq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}\right) + L.$$

Dado que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}$ es un número finito, concluimos que la secuencia $\{S_k\}$ está delimitada por encima. Por lo tanto, $\{S_k\}$ es una secuencia creciente que está delimitada por encima. Por el teorema de convergencia monótona, concluimos que $\{S_k\}$ converge, y por tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

□

Para utilizar la prueba de comparación para determinar la convergencia o divergencia de una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, es necesario hallar una serie adecuada con la que compararla. Dado que conocemos las propiedades de convergencia de las series geométricas y de las series *p*, estas series se utilizan a menudo. Si existe un número entero N tal que para todo $n \geq N$, cada término a_n es menor que cada término correspondiente de una serie convergente conocida, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Del mismo modo, si existe un número entero N tal que para todo $n \geq N$, cada término a_n es mayor que cada término correspondiente de una serie divergente conocida, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

EJEMPLO 5.17

Uso de la prueba de comparación

Para cada una de las siguientes series, utilice la prueba de comparación para determinar si la serie converge o diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n+1}$
b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$
c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Solución

a. Compare con $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ Dado que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es una serie *p* con $p = 3$, converge. Además,

$$\frac{1}{n^3 + 3n + 1} < \frac{1}{n^3}$$

para cada número entero positivo n. Por lo tanto, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n+1}$ converge.

b. Compare con $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica con $r = 1/2$ y $|1/2| < 1$, converge.

También,

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

para cada número entero positivo n. Por lo tanto, vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge.

c. Compare con $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dado que

$$\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$$

para cada número entero $n \geq 2$ y $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n$ diverge, tenemos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

5.16 Utilice la prueba de comparación para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n+1}$ converge o diverge.

Prueba de comparación de límites

La prueba de comparación funciona bien si podemos hallar una serie comparable que satisfaga la hipótesis de la prueba. Sin embargo, a veces puede ser difícil hallar una serie adecuada. Considere la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Es natural comparar esta serie con la serie convergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sin embargo, esta serie no satisface la hipótesis necesaria para utilizar la prueba de comparación porque

$$\frac{1}{n^2 - 1} > \frac{1}{n^2}$$

para todos los enteros $n \geq 2$. Aunque podríamos buscar otra serie con la que comparar $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^2 - 1)$, en cambio, mostramos cómo podemos utilizar la **prueba de comparación de límites** para comparar

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \text{ y } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Examinemos la idea detrás de la prueba de comparación de límites. Consideremos dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. con términos positivos a_n y b_n y evaluemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0,$$

entonces, para n suficientemente grande, $a_n \approx Lb_n$. Por lo tanto, o ambas series convergen o ambas series divergen. Para la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^2-1)$ y $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2$, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n^2-1)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1.$$

Dado que $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2$ converge, concluimos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

converge.

La prueba de comparación de límites puede utilizarse en otros dos casos. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

En este caso, $\{a_n/b_n\}$ es una secuencia delimitada. Como resultado, existe una constante M tal que $a_n \le Mb_n$. Por lo tanto, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por otro lado, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

En este caso, $\{a_n/b_n\}$ es una secuencia no delimitada. Por lo tanto, para cada constante M existe un número entero N tal que $a_n \ge Mb_n$ para todo $n \ge N$. Por lo tanto, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

Teorema 5.12

Prueba de comparación de límites

Supongamos que $a_n,\ b_n \ge 0$ para todo $n \ge 1$.

i. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L \ne 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ambas convergen o ambas divergen.

ii. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

iii. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Observe que si $a_n/b_n \to 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, la prueba de comparación de límites no proporciona ninguna información. Del mismo modo, si $a_n/b_n \to \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la prueba tampoco proporciona información. Por ejemplo, consideremos las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Estas series son ambas series $p$con $p = 1/2$ y $p = 2$, respectivamente. Dado que $p = 1/2 < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ diverge. Por otra parte, dado que $p = 2 > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge. Sin embargo, supongamos que intentamos aplicar la prueba de comparación de límites, utilizando la serie p

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ como nuestra serie de comparación. En primer lugar, vemos que

$$\frac{1/\sqrt{n}}{1/n^3} = \frac{n^3}{\sqrt{n}} = n^{5/2} \to \infty \text{ a medida que } n \to \infty.$$

Del mismo modo, vemos que

$$\frac{1/n^2}{1/n^3} = n \to \infty \text{ a medida que } n \to \infty.$$

Por lo tanto, si $a_n/b_n \to \infty$ cuando $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, no obtenemos ninguna información sobre la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

EJEMPLO 5.18

Uso de la prueba de comparación de límites

Para cada una de las siguientes series, utilice la prueba de comparación de límites para determinar si la serie converge o diverge. Si la prueba no aplica, indíquelo.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

Solución

a. Compare esta serie con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(\sqrt{n}+1)}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/\sqrt{n}} = 1.$$

Por la prueba de comparación de límites, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverge.

b. Compare esta serie con $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)/3^n}{2^n/3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)/3^n}{2^n/3^n} = 1.$$

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$ converge.

c. Dado que $\ln n < n$, compare con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n^2}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Para evaluar $\lim_{n\to\infty} \ln n/n$, evalúe el límite a medida que $x \to \infty$ de la función de valor real $\ln(x)/x$. Estos dos límites son iguales, y hacer este cambio nos permite utilizar la regla de L'Hôpital. Obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \ln n/n = 0$, y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n^2}{1/n} = 0.$$

Dado que el límite es 0 pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la prueba de comparación de límites no proporciona ninguna información.

Compare con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ en su lugar. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

Dado que el límite es ∞ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la prueba sigue sin proporcionar ninguna información.

Así que ahora probamos una serie entre las dos que ya hemos probado. Si elegimos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n^2}{1/n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot \frac{n^{3/2}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Como en el caso anterior, para evaluar $\lim_{n\to\infty} \ln n/\sqrt{n}$, evalúe el límite a medida que $x \to \infty$ de la función de valor real $\ln x/\sqrt{x}$. Usando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Dado que el límite es 0 y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

☑ 5.17 Utilice la prueba de comparación de límites para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+2}$ converge o diverge.

SECCIÓN 5.4 EJERCICIOS

Utilice la prueba de comparación para determinar si las siguientes series convergen.

194. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ grandes.

195. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n = \frac{1}{n(n+1/2)}$

196. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ grandes.

197. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

198. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)^2}$

199. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

200. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

201. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}$

202. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}$

203. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\left(\sqrt{n}\right)^3}$

204. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1,2}-1}{n^{2,3}+1}$

205. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

206. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n^4+n^2}}$

Utilice la prueba de comparación de límites para determinar si cada una de las siguientes series converge o diverge.

207. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$

208. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{0,6}}\right)^2$

209. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$

210. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ grandes.

211. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 3^n}$

212. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n \operatorname{sen} n}$

213. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(1,1)n} - 3^n}$

214. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(1,01)n} - 3^n}$

215. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

216. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{1+1/n} n^{1+1/n}}$

217. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

218. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ grandes.

219. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} n\right)$

220. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n.n}$ (*Pista:* $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e.$) grandes.

221. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-1/n}\right)$ (*Pista:* $1/e \approx (1 - 1/n)^n$, así que $1 - e^{-1/n} \approx 1/n.$)

222. ¿ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ converge si p es lo suficientemente grande? Si es así, ¿para cuáles p?

223. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\ln n)}{n}\right)^p$ converge si p es lo suficientemente grande? Si es así, ¿para cuáles p?

224. ¿Para cuáles p la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{pn}/3^n$ converge?

225. ¿Para cuáles $p > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$ converge?

226. ¿Para cuáles $r > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n^2}}{2^n}$ converge?

227. ¿Para cuáles $r > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{r^{n^2}}$ converge?

228. Halle todos los valores de p y q tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n!)^q}$ converge.

229. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(nr/2)}{n}$ converge o diverge? Explique.

230. Explique por qué, para cada n, al menos uno de $\{|\text{sen}\, n|, |\text{sen}\,(n+1)|, ..., |\text{sen}\, n+6|\}$ es mayor que $1/2$. Utilice esta relación para comprobar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{sen}\, n|}{\sqrt{n}}$.

231. Supongamos que $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b^2{}_n$ convergen. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)$.

232. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\ln \ln n}$ converge? (*Pista:* Escriba $2^{\ln \ln n}$ como potencia de $\ln n$.)

233. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$ converge? (*Pista:* Utilice $n = e^{\ln(n)}$ para comparar con una serie .) grandes.

234. ¿ $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln \ln n}$ converge? (*Pista:* Compare a_n a $1/n$.)

235. Demuestre que si $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ converge. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ converge, ¿$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge necesariamente?

236. Supongamos que $a_n > 0$ para todo n y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Supongamos que b_n es una secuencia arbitraria de ceros y unos. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge necesariamente?

237. Supongamos que $a_n > 0$ para todo n y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Supongamos que b_n es una secuencia arbitraria de ceros y unos con infinitos términos iguales a uno. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ necesariamente diverge?

238. Complete los detalles del siguiente argumento: Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge a una suma finita s, entonces $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$ y $s - \frac{1}{2}s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$. ¿Por qué esto lleva a una contradicción?

239. Demuestre que si $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2(a_n)$ converge.

240. Supongamos que $a_n/b_n \to 0$ en la prueba de comparación, donde $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, Demuestre que si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

241. Supongamos que b_n es una secuencia infinita de ceros y unos. ¿Cuál es el mayor valor posible de $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/2^n$?

242. Supongamos que d_n es una secuencia infinita de dígitos, es decir d_n toma valores en $\{0, 1, \ldots, 9\}$. ¿Cuál es el mayor valor posible de $x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n/10^n$ que converge?

243. Explique por qué, si $x > 1/2$, entonces x no se puede escribir $x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} (b_n = 0 \text{ o } 1,\ b_1 = 0)$.

244. **[T]** Evelyn tiene una balanza perfecta, un número ilimitado de pesos de $1 - \text{kg}$ y una de $1/2 - \text{kg},\ 1/4 - \text{kg},\ 1/8 - \text{kg},$ y así sucesivamente. Desea pesar un meteorito de origen no especificado con una precisión arbitraria. Suponiendo que la escala sea lo suficientemente grande, ¿puede hacerlo? ¿Qué tiene que ver esto con las series infinitas?

245. **[T]** Robert quiere saber su masa corporal con una precisión arbitraria. Tiene una balanza grande que funciona perfectamente, una colección ilimitada de pesos de $1 - \text{kg}$ y nueve de $0{,}1 - \text{kg},$ $0{,}01 - \text{kg},\ 0{,}001 - \text{kg},$ y así sucesivamente. Suponiendo que la escala sea lo suficientemente grande, ¿puede hacerlo? ¿Qué tiene que ver esto con las series infinitas?

246. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ es la mitad de la serie armónica y, por esto, diverge. Se obtiene a partir de la serie armónica eliminando todos los términos en los que n es impar. Supongamos que $m > 1$ es fijo. Demuestre, de forma más general, que la eliminación de todos los términos $1/n$ donde $n = mk$ para algún número entero k también da como resultado una serie divergente.

247. A la vista del ejercicio anterior, puede sorprender que una subserie de la serie armónica en la que se suprime aproximadamente uno de cada cinco términos pueda converger. Una *serie armónica agotada* es una serie obtenida a partir de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eliminando cualquier término $1/n$ si una cifra determinada, por ejemplo 9, aparece en la expansión decimal de n. Argumente que esta serie armónica agotada converge respondiendo a las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos números enteros n tienen d dígitos?
b. ¿Cuántos números enteros con $\text{dígitos} d$ $h(d)$. no contienen 9 como uno o más de sus dígitos?
c. ¿Cuál es el menor número con $\text{dígitos} d$ $m(d)$?
d. Explique por qué la serie armónica suprimida está delimitada por $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{m(d)}$.
e. Demuestre que $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{m(d)}$ converge.

248. Supongamos que una secuencia de números $a_n > 0$ tiene la propiedad de que $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} S_n$, donde $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. ¿Puede determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge? (*Pista:* S_n es monótona).

249. Supongamos que una secuencia de números $a_n > 0$ tiene la propiedad de que $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} S_n$, donde

$S_n = a_1 + \cdots + a_n$. ¿Puede determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

(*Pista:*
$S_2 = a_2 + a_1 = a_2 + S_1 = a_2 + 1 = 1 + 1/4 = (1 + 1/4) S_1$,
$S_3 = \frac{1}{3^2} S_2 + S_2 = (1 + 1/9) S_2 = (1 + 1/9)(1 + 1/4) S_1$,
etc. Mire $\ln(S_n)$, y utilice $\ln(1 + t) \le t, t > 0.$)

5.5 Series alternadas

Objetivos de aprendizaje

5.5.1 Utilizar la prueba de series alternadas para comprobar la convergencia de una serie alterna.
5.5.2 Estimar la suma de una serie alternada.
5.5.3 Explicar el significado de convergencia absoluta y convergencia condicional.

Hasta ahora en este capítulo, hemos hablado principalmente de series con términos positivos. En esta sección introducimos las series alternadas, es decir, aquellas series cuyos términos alternan su signo. En un capítulo posterior mostraremos que estas series surgen a menudo cuando se estudian las series de potencias. Después de definir las series alternadas, introducimos la prueba de las series alternadas para determinar si una serie de este tipo converge.

La prueba de las series alternadas

Una serie cuyos términos alternan entre valores positivos y negativos es una **serie alternada**. Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots \tag{5.11}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{5.12}$$

son ambas series alternadas.

Definición

Toda serie cuyos términos alternan entre valores positivos y negativos se denomina serie alternada. Una serie alternada puede escribirse de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \tag{5.13}$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots \tag{5.14}$$

Donde $b_n > 0$ para todos los enteros positivos *n*.

La serie (1), que se muestra en la Ecuación 5.11, es una serie geométrica. Dado que $|r| = |-1/2| < 1$, la serie converge. La serie (2), que se muestra en la Ecuación 5.12, se denomina serie armónica alternada. Demostraremos que mientras la serie armónica diverge, la serie armónica alternada converge.

Para demostrarlo, observamos la secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ (Figura 5.17).

Prueba

Considere los términos impares S_{2k+1} para $k \geq 0$. Dado que $1/(2k+1) < 1/2k$,

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} < S_{2k-1}.$$

Por lo tanto, $\{S_{2k+1}\}$ es una secuencia decreciente. También,

$$S_{2k+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1} > 0.$$

Por lo tanto, $\{S_{2k+1}\}$ está delimitada por debajo. Dado que $\{S_{2k+1}\}$ es una secuencia decreciente que está delimitada por debajo, por el teorema de convergencia monótona, $\{S_{2k+1}\}$ converge. Del mismo modo, los términos pares $\{S_{2k}\}$ forman una secuencia creciente que está delimitada por encima porque

$$S_{2k} = S_{2k-2} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} > S_{2k-2}$$

y

$$S_{2k} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2k} < 1.$$

Por lo tanto, por el teorema de convergencia monótona, la secuencia $\{S_{2k}\}$ también converge. Dado que

$$S_{2k+1} = S_{2k} + \frac{1}{2k+1},$$

sabemos que

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

Suponiendo que $S = \lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$ y utilizando el hecho de que $1/(2k+1) \to 0$, concluimos que $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$. Dado que los términos pares e impares de la secuencia de sumas parciales convergen al mismo límite S, se puede demostrar que la secuencia de sumas parciales converge a S, y por tanto la serie armónica alternada converge a S.

También se puede demostrar que $S = \ln 2$, y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2).$$

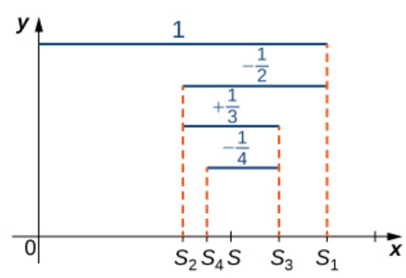


Figura 5.17 Para la serie armónica alternada, los términos impares S_{2k+1} en la secuencia de sumas parciales son decrecientes y están delimitados por debajo. Los términos pares S_{2k} son crecientes y están delimitados por encima.

□

De forma más general, cualquier serie alternada de la forma (3) (Ecuación 5.13) o (4) (Ecuación 5.14) converge siempre que $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$ y $b_n \to 0$ (Figura 5.18). La prueba es similar a la de la serie armónica alternada.

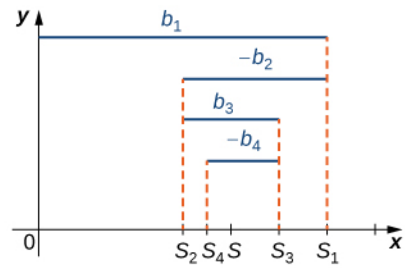


Figura 5.18 Para una serie alternada $b_1 - b_2 + b_3 - \cdots$ en la que $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$, los términos impares S_{2k+1} en la secuencia de sumas parciales son decrecientes y están delimitados por debajo. Los términos pares S_{2k} son crecientes y están delimitados por encima.

Teorema 5.13

Prueba de series alternadas

Una serie alternada de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \text{ o } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

converge si

i. $0 < b_{n+1} \leq b_n$ para todo $n \geq 1$ y
ii. $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0.$

Esto se conoce como la **prueba de series alternadas**.

Observamos que este teorema es cierto de forma más general siempre que exista algún número entero N tal que $0 < b_{n+1} \leq b_n$ para todo $n \geq N$.

EJEMPLO 5.19

Convergencia de las series alternadas

Para cada una de las siguientes series alternadas, determine si la serie converge o diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^2$
b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n/(n+1)$

Solución

a. Dado que
$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{n^2} \to 0,$$
la serie converge.

b. Dado que $n/(n+1) \nrightarrow 0$ a medida que $n \to \infty$, no podemos aplicar la prueba de series alternadas. En su lugar, utilizamos la prueba del *enésimo* término para la divergencia. Dado que
$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1} \neq 0,$$
la serie diverge.

5.18 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n/2^n$ converge o diverge.

Resto de una serie alternada

Es difícil calcular de manera explícita la suma de la mayoría de las series alternadas, por lo que normalmente la suma se aproxima utilizando una suma parcial. Al hacerlo, nos interesa la cantidad de error en nuestra aproximación. Considere una serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

que satisface las hipótesis de la prueba de series alternadas. Supongamos que S denota la suma de esta serie y $\{S_k\}$ sea la secuencia correspondiente de sumas parciales. En la Figura 5.18 vemos que para cualquier número entero $N \geq 1$, el resto R_N satisface

$$|R_N| = |S - S_N| \leq |S_{N+1} - S_N| = b_{n+1}.$$

Teorema 5.14

Resto de series alternadas
Consideremos una serie alternada de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \text{o} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n$$

que satisface las hipótesis de la prueba de series alternadas. Supongamos que S denota la suma de la serie y S_N denota la $\text{ené}-\text{ésima}$ suma parcial. Para cualquier número entero $N \geq 1$, el resto $R_N = S - S_N$ satisface

$$|R_N| \leq b_{N+1}.$$

En otras palabras, si se aplican las condiciones de la prueba de series alternadas, entonces el error de aproximación de la serie infinita por la $\text{ené}-\text{ésima}$ suma parcial S_N es, como máximo, del tamaño del siguiente término b_{N+1}.

EJEMPLO 5.20

Estimación del resto de una serie alternada
Consideremos la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Utilice la estimación del resto para determinar un límite en el error R_{10} si aproximamos la suma de la serie por la suma parcial S_{10}.

Solución
A partir del teorema anterior,

$$|R_{10}| \leq b_{11} = \frac{1}{11^2} \approx 0{,}008265.$$

5.19 Halle un límite para R_{20} cuando se aproxima $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ por S_{20}.

Convergencia absoluta y condicional

Considere una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la serie relacionada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Aquí hablamos sobre las posibilidades de la relación entre la

convergencia de estas dos series. Por ejemplo, consideremos la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$. La serie cuyos términos son el valor absoluto de estos términos es la serie armónica, dado que $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}/n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Como la serie armónica alternada converge, pero la serie armónica diverge, decimos que la serie armónica alternada presenta una convergencia condicional.

En comparación, considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^2$. La serie cuyos términos son los valores absolutos de los términos de esta serie es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Como ambas series convergen, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^2$ presenta una convergencia absoluta.

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ presenta una **convergencia absoluta** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ presenta una **convergencia condicional** si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Como muestra la serie armónica alternada, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ puede divergir. En el siguiente teorema, sin embargo, demostramos que si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Teorema 5.15

La convergencia absoluta implica convergencia

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Prueba

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge. Lo demostramos utilizando el hecho de que $a_n = |a_n|$ o $a_n = -|a_n|$ y por lo tanto $|a_n| + a_n = 2|a_n|$ o $|a_n| + a_n = 0$. Por lo tanto, $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$. En consecuencia, por la prueba de comparación, dado que $2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n)$$

converge. Utilizando las propiedades algebraicas para las series convergentes, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

converge.

□

EJEMPLO 5.21

Convergencia absoluta y condicional

Para cada una de las siguientes series, determine si la serie converge absolutamente, condicionalmente o diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/(3n+1)$ grandes.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)/n^2$

Solución

a. Podemos ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$$

diverge utilizando la prueba de comparación de límites con la serie armónica. De hecho,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/(3n+1)}{1/n} = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, la serie no converge absolutamente. Sin embargo, como

$$\frac{1}{3(n+1)+1} < \frac{1}{3n+1} \text{ y } \frac{1}{3n+1} \to 0,$$

la serie converge. Podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/(3n+1)$ converge condicionalmente.

b. Si observamos que $|\cos n| \le 1$, para determinar si la serie converge absolutamente, compare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$$

con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge, por la prueba de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} |\cos n/n^2|$ converge, y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n/n^2$ converge absolutamente.

5.20 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n/(2n^3+1)$ converge absolutamente, condicionalmente o diverge.

Para ver la diferencia entre la convergencia absoluta y la condicional, observe lo que ocurre cuando *reordenamos* los términos de la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$. Demostramos que podemos reordenar los términos para que la nueva serie sea divergente. Seguramente, si reordenamos los términos de una suma finita, la suma no cambia. Sin embargo, cuando trabajamos con una suma infinita, pueden ocurrir cosas interesantes.

Comience sumando suficientes términos positivos para producir una suma que sea mayor que algún número real $M > 0$. Por ejemplo, supongamos que $M = 10$, y halle un número entero k tal que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1} > 10.$$

(Podemos hacerlo porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)$ diverge hasta el infinito) A continuación, reste $1/2$. Luego, sume más términos positivos hasta que la suma llegue a 100. Es decir, halle otro número entero $j > k$ tal que

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k+1} + \cdots + \frac{1}{2j+1} > 100.$$

A continuación, reste $1/4$. Continuando de esta manera, hemos encontrado una forma de reordenar los términos de la serie armónica alternada de manera que la secuencia de sumas parciales para la serie reordenada no está delimitada y por lo tanto es divergente.

Los términos de la serie armónica alternada también pueden reordenarse para que la nueva serie converja a un valor diferente. En el Ejemplo 5.22, mostramos cómo reordenar los términos para crear una nueva serie que converja a $3\ln(2)/2$. Señalamos que la serie armónica alternada puede reordenarse para crear una serie que converja a cualquier número real r; sin embargo, la prueba de este hecho está fuera del alcance de este texto.

En general, cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge condicionalmente se puede reordenar para que la nueva serie diverja o converja a un número real diferente. Una serie que converge absolutamente no tiene esta propiedad. Para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge absolutamente, el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el mismo para cualquier reordenación de los términos. Este resultado se conoce como el de Riemann sobre la reordenación, que está fuera del alcance de este libro.

EJEMPLO 5.22

Reorganización de la serie

Utilice el hecho de que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2$$

para reordenar los términos de la serie armónica alternada de modo que la suma de la serie reordenada sea $3\ln(2)/2$.

Solución

Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln(2)$, por las propiedades algebraicas de las series convergentes,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\ln 2}{2}.$$

Ahora introduzca la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que para todo $n \geq 1$, $b_{2n-1} = 0$ y $b_{2n} = a_n/2$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Entonces, utilizando las propiedades del límite algebraico de las series convergentes, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln 2 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{3\ln 2}{2}.$$

Ahora sumando los términos correspondientes, a_n y b_n, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) &= (1+0)+\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{3}+0\right)+\left(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{5}+0\right)+\left(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}\right)\\ &\quad+\left(\tfrac{1}{7}+0\right)+\left(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{8}\right)+\cdots\\ &= 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\cdots.\end{aligned}$$

Observamos que la serie a la derecha del signo de igualdad es una reordenación de la serie armónica alternada. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=3\ln(2)/2$, concluimos que

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3\ln(2)}{2}.$$

Por lo tanto, hemos encontrado un reordenamiento de la serie armónica alternada que tiene la propiedad deseada.

SECCIÓN 5.5 EJERCICIOS

Indique si cada una de las siguientes series converge absolutamente, condicionalmente o no converge.

250. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+3}$

251. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}$

252. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$

253. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+3}}{n}$

254. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$

255. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$

256. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

257. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

258. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}^2 n$

259. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos^2 n$

260. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}^2(1/n)$ grandes.

261. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos^2(1/n)$ grandes.

262. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(1/n)$ grandes.

263. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ grandes.

264. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{1+n^4}$

265. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^e}{1+n^{\pi}}$

266. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{1/n}$

267. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{1/n}$

268. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-n^{1/n}\right)$ (*Pista:* $n^{1/n}\approx 1+\ln(n)/n$ para $n.$) grandes.

269. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (*Pista:* $\cos(1/n)\approx 1-1/n^2$ para $n.$) grandes.

270. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (*Pista:* racionalice el numerador).

271. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ (*Pista:* halle el denominador común y luego racionalice el numerador).

272. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\ln(n+1)-\ln n)$ grandes.

273. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n\right)$ (*Pista:* utilice el teorema de valor medio).

274. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left((n+1)^2 - n^2\right)$ grandes.

275. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

276. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

277. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{1/n}}$

278. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ grandes.

279. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\pi/2) \operatorname{sen}(1/n)$ grandes.

En cada uno de los siguientes problemas, utilice la estimación $|R_N| \leq b_{N+1}$ para hallar un valor de N que garantice que la suma de los primeros términos N de la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ difiera de la suma infinita como máximo en el error dado. Calcule la suma parcial S_N para este N.

280. **[T]** $b_n = 1/n$, error $< 10^{-5}$

281. **[T]** $b_n = 1/\ln(n)$, $n \geq 2$, error $< 10^{-1}$

282. **[T]** $b_n = 1/\sqrt{n}$, error $< 10^{-3}$

283. **[T]** $b_n = 1/2^n$, error $< 10^{-6}$

284. **[T]** $b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, error $< 10^{-3}$

285. **[T]** $b_n = 1/n^2$, error $< 10^{-6}$

En los siguientes ejercicios, indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si la afirmación es falsa, proporcione un ejemplo en el que lo sea.

286. Si $b_n \geq 0$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b_{2n})$ converge absolutamente.

287. Si $b_n \geq 0$ es decreciente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b_{2n})$ converge absolutamente.

288. Si $b_n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(b_{3n-2} + b_{3n-1}) - b_{3n}\right)$ converge.

289. Si $b_n \geq 0$ es decreciente y $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{3n-2} + b_{3n-1} - b_{3n})$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_{3n-2}$ converge.

290. Si $b_n \geq 0$ es decreciente y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ converge condicionalmente, pero no absolutamente, entonces b_n no tiende a cero.

291. Supongamos que $a_n^+ = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $a_n^- = -a_n$ si $a_n < 0$. (También, $a_n^+ = 0$ si $a_n < 0$ y $a_n^- = 0$ si $a_n \geq 0$.) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, pero no absolutamente, entonces ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen.

292. Supongamos que a_n es una secuencia de números reales positivos y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Supongamos que b_n es una secuencia arbitraria de unos y menos unos. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge necesariamente?

293. Supongamos que a_n es una secuencia tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge para cualquier secuencia posible b_n de ceros y unos. ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente?

Las siguientes series no satisfacen las hipótesis de la prueba de series alternadas, tal y como se indica. En cada caso, indique cuál hipótesis no se satisface. Indique si la serie converge absolutamente.

294. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n}$

295. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos^2 n}{n}$

296. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$

297. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$

298. Demuestre que la serie alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ no converge. ¿Qué hipótesis de la prueba de series alternadas no se cumple?

299. Supongamos que $\sum a_n$ converge absolutamente. Demuestre que la serie formada por los términos positivos a_n también converge.

300. Demuestre que la serie alternada $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{5}{9} + \cdots$ no converge. ¿Qué hipótesis de la prueba de series alternadas no se cumple?

301. La fórmula $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$ se derivará en el próximo capítulo. Utilice el resto $|R_N| \le b_{N+1}$ para hallar un límite para el error de estimación $\cos\theta$ por la quinta suma parcial $1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \theta^6/6! + \theta^8/8!$ para $\theta = 1, \theta = \pi/6$, y $\theta = \pi$.

302. La fórmula $\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$ se derivará en el próximo capítulo. Utilice el resto $|R_N| \le b_{N+1}$ para hallar un límite para el error de estimación $\operatorname{sen}\theta$ por la quinta suma parcial $\theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \theta^7/7! + \theta^9/9!$ para $\theta = 1, \theta = \pi/6$, y $\theta = \pi$.

303. ¿Cuántos términos en $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$ son necesarios para aproximar $\cos 1$ con un error máximo de $0{,}00001$?

304. ¿Cuántos términos en $\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$ son necesarios para aproximar $\operatorname{sen} 1$ con un error máximo de $0{,}00001$?

305. A veces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ converge a una determinada fracción de una serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a una tasa más rápida. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcule $12 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$. ¿Cuál de las series $6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $S\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ofrece una mejor estimación de π^2 utilizando 1.000 términos?

Las siguientes series alternadas convergen a múltiplos determinados de π. Halle el valor de N que se predice mediante la estimación del resto, de manera que la enésimo *suma parcial de la serie se aproxime con precisión al lado izquierdo dentro del error dado. Halle el N mínimo para los que el límite de error se mantiene e indique el valor aproximado deseado en cada caso. Hasta 15 decimales, $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$.*

306. **[T]** $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, error $< 0{,}0001$

307. **[T]** $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-k}}{2k+1}$, error $< 0{,}0001$

308. **[T]** La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x+\pi n)}{x+\pi n}$ desempeña un papel importante en el procesamiento de señales. Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x+\pi n)}{x+\pi n}$ converge siempre que $0 < x < \pi$. (*Pista:* utilice la fórmula del seno de una suma de ángulos).

309. **[T]** Si $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \to \ln 2$, ¿qué es $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$?

310. **[T]** Grafique la serie $\sum_{n=1}^{100}\frac{\cos(2\pi nx)}{n}$ para $0 \le x < 1$. Explique por qué $\sum_{n=1}^{100}\frac{\cos(2\pi nx)}{n}$ diverge cuando $x = 0, 1$. ¿Cómo se comporta la serie para otros x?

311. **[T]** Grafique la serie $\sum_{n=1}^{100}\frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{n}$ para $0 \le x < 1$ y comente su comportamiento

312. **[T]** Grafique la serie $\sum_{n=1}^{100}\frac{\cos(2\pi nx)}{n^2}$ para $0 \le x < 1$ y describa su gráfico.

313. **[T]** La serie armónica alternada converge debido a la cancelación entre sus términos. Su suma se conoce porque la cancelación puede describirse de manera explícita. Una serie armónica aleatoria es una de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{n}$, donde s_n es una secuencia generada aleatoriamente de ± 1's en la que los valores ± 1 son igualmente probables. Utilice un generador de números aleatorios para producir 1.000 aleatorio ± 1s y grafique las sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{s_n}{n}$ de su secuencia armónica aleatoria para $N = 1$ a 1.000. Compare con un gráfico de las primeras 1.000 sumas parciales de la serie armónica.

314. **[T]** Las estimaciones de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se pueden *acelerar* escribiendo sus sumas parciales como $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)}$ y recordando que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$ converge a uno cuando $N \to \infty$. Compare la estimación de $\pi^2/6$ utilizando las sumas $\sum_{n=1}^{1.000} \frac{1}{n^2}$ con la estimación utilizando $1 + \sum_{n=1}^{1.000} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

315. **[T]** La *transformada de Euler* reescribe $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ como $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n-1} \sum_{m=\,0,0}^{n} \binom{n}{m} b_{n-m}.$ Para la serie armónica alternada, toma la forma

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Calcule las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ hasta que se aproximen $\ln(2)$ con una precisión de $0{,}0001$. ¿Cuántos términos se necesitan? Compare esta respuesta con el número de términos de la serie armónica alternada que son necesarios para estimar $\ln(2)$.

316. **[T]** En el texto se dijo que una serie convergente condicionalmente se puede reordenar para converger a cualquier número. A continuación, presentamos un hecho algo más sencillo, pero similar. Si $a_n \geq 0$ es tal que $a_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces, dado cualquier número A hay una secuencia s_n de ± 1's tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n \to A$. Muestre esto para $A > 0$ de la siguiente forma.

a. Defina de manera repetida s_n por $s_n = 1$ si $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k s_k < A$ y $s_n = -1$ por lo contrario.
b. Explique por qué eventualmente $S_n \geq A$, y para cualquier m mayor que este n, $A - a_m \leq S_m \leq A + a_m$.
c. Explique por qué esto implica que $S_n \to A$ a medida que $n \to \infty$.

5.6 Criterios del cociente y la raíz

Objetivos de aprendizaje

5.6.1 Utilizar el criterio del cociente para determinar la convergencia absoluta de una serie.
5.6.2 Utilizar el criterio de la raíz para determinar la convergencia absoluta de una serie.
5.6.3 Describir una estrategia para comprobar la convergencia de una serie dada.

En esta sección, demostramos las dos últimas pruebas de convergencia de las series: el criterio del cociente y el criterio de la raíz. Estas pruebas son especialmente agradables porque no requieren que encontremos una serie comparable. El criterio del cociente será especialmente útil en la discusión de las series de potencias en el próximo capítulo.

A lo largo de este capítulo, hemos visto que ninguna prueba de convergencia funciona para todas las series. Por lo tanto, al final de esta sección discutimos una estrategia para elegir qué prueba de convergencia utilizar para una serie determinada.

Criterio del cociente

Considere una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De nuestra discusión y ejemplos anteriores, sabemos que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ no es una condición suficiente para que la serie converja. No solo necesitamos $a_n \to 0$, sino que necesitamos $a_n \to 0$ lo suficientemente

rápido. Por ejemplo, considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Sabemos que $1/n \to 0$ y $1/n^2 \to 0$. Sin embargo, solo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge porque los términos de la secuencia $\{1/n\}$ no se acercan a cero lo suficientemente rápido a medida que $n \to \infty$. Aquí introducimos el **criterio del cociente**, que proporciona una forma de medir la rapidez con la que los términos de una serie se acercan a cero.

Teorema 5.16

Criterio del cociente

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie con términos distintos de cero. Supongamos que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

i. Si los valores de $0 \le \rho < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
ii. Si los valores de $\rho > 1$ o $\rho = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
iii. Si los valores de $\rho = 1$, la prueba no proporciona ninguna información.

Prueba

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie con términos distintos de cero.

Comenzamos con la prueba de la parte i. En este caso, $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Dado que $0 \le \rho < 1$, existe R tal que $0 \le \rho < R < 1$. Supongamos que $\varepsilon = R - \rho > 0$. Por la definición de límite de una secuencia, existe algún número entero N tal que

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \rho\right| < \varepsilon \text{ para todo } n \ge N.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \rho + \varepsilon = R \text{ para todo } n \ge N$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < R|a_N| \\
&|a_{N+2}| < R|a_{N+1}| < R^2|a_N| \\
&|a_{N+3}| < R|a_{N+2}| < R^2|a_{N+1}| < R^3|a_N| \\
&|a_{N+4}| < R|a_{N+3}| < R^2|a_{N+2}| < R^3|a_{N+1}| < R^4|a_N| \\
&\vdots.
\end{aligned}$$

Dado que $R < 1$, la serie geométrica

$$R|a_N| + R^2|a_N| + R^3|a_N| + \cdots$$

converge. Dadas las desigualdades anteriores, podemos aplicar la prueba de comparación y concluir que la serie

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + |a_{N+4}| + \cdots$$

converge. Por lo tanto, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

donde $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$ es una suma finita y $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$ converge, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Para la parte ii.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

Dado que $\rho > 1$, existe R tal que $\rho > R > 1$. Supongamos que $\varepsilon = \rho - R > 0$. Por la definición de límite de una secuencia, existe un número entero N tal que

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \rho \right| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

Por lo tanto,

$$R = \rho - \varepsilon < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ para todo } n \geq N,$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| > R|a_N| \\
&|a_{N+2}| > R|a_{N+1}| > R^2|a_N| \\
&|a_{N+3}| > R|a_{N+2}| > R^2|a_{N+1}| > R^3|a_N| \\
&|a_{N+4}| > R|a_{N+3}| > R^2|a_{N+2}| > R^3|a_{N+1}| > R^4|a_N|.
\end{aligned}$$

Dado que $R > 1$, la serie geométrica

$$R|a_N| + R^2|a_N| + R^3|a_N| + \cdots$$

diverge. Aplicando la prueba de comparación, concluimos que la serie

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

diverge, y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Para la parte iii. mostramos que la prueba no proporciona ninguna información si $\rho = 1$ considerando la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$. Para cualquier número real p,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1.$$

Sin embargo, sabemos que si $p \leq 1$, la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ diverge, mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge si $p > 1$.

□

El criterio del cociente es particularmente útil para las series cuyos términos contienen factoriales o exponenciales, donde el cociente de los términos simplifica la expresión. El criterio del cociente es conveniente porque no requiere que encontremos una serie comparativa. El inconveniente es que la prueba a veces no proporciona ninguna información sobre la convergencia.

EJEMPLO 5.23

Utilización del criterio del cociente

Para cada una de las siguientes series, utilice el criterio del cociente para determinar si la serie converge o diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$

Solución

a. A partir del criterio del cociente, podemos ver que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}.$$

Dado que $(n+1)! = (n+1).\, n!$,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Dado que $\rho < 1$, la serie converge.

b. Podemos ver que

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.\end{aligned}$$

Dado que $\rho > 1$, la serie diverge.

c. Dado que

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^{n+1}((n+1)!)^2/(2(n+1))!}{(-1)^n (n!)^2/(2n)!}\right| &= \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\end{aligned}$$

vemos que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Dado que $\rho < 1$, la serie converge.

5.21 Utilice el criterio del cociente para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ converge o diverge.

Criterio de la raíz

El enfoque del **criterio de la raíz** es similar al del criterio del cociente. Considere una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ para algún número real ρ. Entonces para N suficientemente grande, $|a_N| \approx \rho^N$. Por lo tanto, podemos aproximar $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n|$ escribiendo

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots \approx \rho^N + \rho^{N+1} + \rho^{N+2} + \cdots.$$

La expresión del lado derecho es una serie geométrica. Al igual que en el criterio del cociente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si $0 \le \rho < 1$ y la serie diverge si $\rho \ge 1$. Si $\rho = 1$, la prueba no proporciona ninguna información. Por ejemplo, para cualquier serie *p*, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, vemos que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^p}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p/n}}.$$

Para evaluar este límite, utilizamos la función del logaritmo natural. Al hacerlo, vemos que

$$\ln \rho = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p/n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)^{p/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n}.\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{p\ln(1/n)}{n}.$$

Utilizando la regla de L'Hôpital, se deduce que $\ln \rho = 0$, y por lo tanto $\rho = 1$ para todo p. Sin embargo, sabemos que la serie *p* solo converge si $p > 1$ y diverge si $p < 1$.

Teorema 5.17

Criterio de la raíz

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Supongamos que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

i. Si los valores de $0 \le \rho < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
ii. Si los valores de $\rho > 1$ o $\rho = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
iii. Si los valores de $\rho = 1$, la prueba no proporciona ninguna información.

El criterio de la raíz es útil para las series cuyos términos incluyen exponenciales. En particular, para una serie cuyos términos a_n satisfacen $|a_n| = b_n^n$, entonces $\sqrt[n]{|a_n|} = b_n$ y solo tenemos que evaluar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

EJEMPLO 5.24

Uso del criterio de la raíz

Para cada una de las siguientes series, utilice el criterio de la raíz para determinar si la serie converge o diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n^2+3n\right)^n}{\left(4n^2+5\right)^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(\ln(n))^n}$

Solución

a. Para aplicar el criterio de la raíz, calculamos

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(n^2+3n\right)^n/\left(4n^2+5\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{4n^2+5} = \frac{1}{4}.$$

Dado que $\rho < 1$, la serie converge absolutamente.

b. Tenemos

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n/(\ln n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty \text{ por la regla de L'Hôpital.}$$

Dado que $\rho = \infty$, la serie diverge.

5.22 Utilice el criterio de la raíz para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ converge o diverge.

Elegir una prueba de convergencia

En este punto, tenemos una larga lista de pruebas de convergencia. Sin embargo, no todas las pruebas pueden utilizarse para todas las series. Ante una serie, debemos determinar qué prueba es mejor utilizar. He aquí una estrategia para encontrar la mejor prueba a aplicar.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Cómo elegir una prueba de convergencia para una serie

Considere una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En los siguientes pasos, esbozamos una estrategia para determinar si la serie converge.

1. ¿$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie conocida? Por ejemplo, ¿es la serie armónica (que diverge) o la serie armónica alternada (que converge)? ¿Es una serie p o una serie geométrica? Si es así, verifique la potencia p o el cociente r para determinar si la serie converge.
2. ¿Es una serie alternada? ¿Nos interesa la convergencia absoluta o solo la convergencia? Si solo nos interesa saber si la serie converge, aplique la prueba de series alternadas. Si estamos interesados en la convergencia absoluta, procedemos al paso 3, considerando la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
3. ¿Es la serie similar a una serie p o a una serie geométrica? Si es así, intente la prueba de comparación o la prueba de comparación de límites.
4. ¿Los términos de la serie contienen un factorial o una potencia? Si los términos son potencias tales que $a_n = b_n^n$, intente primero el criterio del raíz. Si no es así, intente primero el criterio del cociente.
5. Utilice la prueba de divergencia. Si esta prueba no proporciona ninguna información, intente la prueba de la integral.

MEDIOS

Visite este sitio web (http://www.openstax.org/l/20_series2) para obtener más información sobre la comprobación de la convergencia de las series, además de información general sobre secuencias y series.

EJEMPLO 5.25

Uso de las pruebas de convergencia

Para cada una de las siguientes series, determine qué prueba de convergencia es la mejor para utilizar y explique por qué. A continuación, determine si la serie converge o diverge. Si la serie es una serie alternada, determine si converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+3n^2+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3n+1)}{n!}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

Solución

a. Paso 1. La serie no es una serie p ni una serie geométrica.
Paso 2. La serie no es alternada.
Paso 3. Para valores grandes de n, aproximamos la serie mediante la expresión

$$\frac{n^2+2n}{n^3+3n^2+1} \approx \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, parece razonable aplicar la prueba de comparación o la prueba de comparación de límites utilizando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Utilizando la prueba de comparación de límites, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n)/(n^3+3n^2+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+1} = 1.$$

Dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, esta serie también diverge.

b. Paso 1. La serie no es una serie conocida.
Paso 2. La serie es alternada. Como nos interesa la convergencia absoluta, considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n+1)!}.$$

Paso 3. La serie no es similar a una serie p ni a una serie geométrica.
Paso 4. Como cada término contiene un factorial, aplique el criterio del cociente. Vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3(n+1))/(n+1)!}{(3n+1)/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{(n+1)(3n+1)} = 0.$$

Por lo tanto, esta serie converge, y concluimos que la serie original converge absolutamente, y por lo tanto converge.

c. Paso 1. Esta serie no es una serie conocida.
Paso 2. No se trata de una serie alternada.
Paso 3. No hay ninguna serie obvia con la que comparar esta serie.
Paso 4. No hay ningún factorial. Hay una potencia, pero no es una situación ideal para el criterio del cociente.
Paso 5. Para aplicar la prueba de divergencia, calculamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3} = \infty.$$

Por lo tanto, por la prueba de divergencia, la serie diverge.

d. Paso 1. Esta serie no es una serie conocida.
Paso 2. No se trata de una serie alternada.
Paso 3. No hay ninguna serie obvia con la que comparar esta serie.
Paso 4. Como cada término es una potencia de n, podemos aplicar el criterio del cociente. Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0,$$

por el criterio del cociente, concluimos que la serie converge.

5.23 Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$, determine qué prueba de convergencia es la mejor para utilizar y explique por qué.

En la Tabla 5.3, resumimos las pruebas de convergencia y cuándo puede aplicarse cada una de ellas. Observe que mientras la prueba de comparación, la prueba de comparación de límites y la prueba de la integral requieren que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tenga términos no negativos, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene términos negativos, estas pruebas pueden aplicarse a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ para comprobar la convergencia absoluta.

Serie o prueba	Conclusiones	Comentarios
Prueba de divergencia Para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, evalúe $\lim_{n\to\infty} a_n$.	Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la prueba no es concluyente.	Esta prueba no puede demostrar la convergencia de una serie.
	Si los valores de $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie diverge.	
Serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	Si $\|r\| < 1$, la serie converge a $a/(1-r)$.	Se puede cambiar el índice de cualquier serie geométrica para escribirla en la forma $a + ar + ar^2 + \cdots$, donde a es el término inicial y r es el cociente.
	Si los valores de $\|r\| \geq 1$, la serie diverge.	
Serie *p* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	Si $p > 1$, la serie converge.	Para $p = 1$, tenemos la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.
	Si $p \leq 1$, la serie diverge.	
Prueba de comparación Para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos no negativos, compare con una serie conocida $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	Si los valores de $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.	Normalmente se utiliza para una serie similar a una geométrica o una serie p. A veces puede ser difícil encontrar una serie adecuada.

Tabla 5.3 Resumen de las pruebas de convergencia

Serie o prueba	Conclusiones	Comentarios
	Si los valores de $a_n \geq b_n$ para todo $n \geq N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.	
Prueba de comparación de límites Para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos positivos, compare con una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ evaluando $L = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$.	Si los valores de L es un número real y $L \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ambas convergen o ambas divergen.	Normalmente se utiliza para una serie similar a una geométrica o una serie p. A menudo es más fácil de aplicar que la prueba de comparación.
	Si los valores de $L = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.	
	Si los valores de $L = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.	
Prueba de la integral Si existe una función positiva, continua y decreciente f tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq N$, evalúe $\int_N^{\infty} f(x)\, dx$.	$\int_N^{\infty} f(x)\, dx$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ambas convergen o ambas divergen.	Limitado a aquellas series para las que la función correspondiente f puede integrarse fácilmente.
Series alternadas $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$	Si $b_{n+1} \leq b_n$ para todo $n \geq 1$ como de $b_n \to 0$, entonces la serie converge.	Solo se aplica a las series alternadas.
Criterio del cociente Para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos distintos de cero, supongamos que $\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert$.	Si los valores de $0 \leq \rho < 1$, la serie converge absolutamente.	A menudo se utiliza para series que implican factoriales o exponenciales.
	Si los valores de $\rho > 1$ o $\rho = \infty$, la serie diverge.	
	Si los valores de $\rho = 1$, la prueba no es concluyente.	
Criterio de la raíz Para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, supongamos que $\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$.	Si los valores de $0 \leq \rho < 1$, la serie converge absolutamente.	A menudo se utiliza para series en las que $\lvert a_n \rvert = b_n^n$.
	Si los valores de $\rho > 1$ o $\rho = \infty$, la serie diverge.	

Tabla 5.3 Resumen de las pruebas de convergencia

Serie o prueba	Conclusiones	Comentarios
	Si los valores de $\rho = 1$, la prueba no es concluyente.	

Tabla 5.3 Resumen de las pruebas de convergencia

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Serie que converge a π y $1/\pi$

Existen decenas de series que convergen a π o una expresión algebraica que contenga π. Aquí vemos varios ejemplos y comparamos sus órdenes de convergencia. Por orden de convergencia se entiende el número de términos necesarios para que una suma parcial se sitúe dentro de una determinada cantidad del valor real. Las representaciones en serie de π en los dos primeros ejemplos puede explicarse utilizando las series de Maclaurin, que se analizan en el siguiente capítulo. El tercer ejemplo se basa en material que va más allá del alcance de este texto.

1. La serie

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \cdots$$

fue descubierta por Gregory y Leibniz a finales de 1.600II. Este resultado se desprende de la serie de Maclaurin para $f(x) = \tan^{-1}x$. Hablaremos de esta serie en el próximo capítulo.

a. Demuestre que esta serie converge.
b. Evalúe las sumas parciales S_n para $n = 10, 20, 50, 100$.
c. Utilice la estimación del resto de las series alternadas para obtener un límite en el error R_n.
d. ¿Cuál es el valor más pequeño de N que garantiza $|R_N| < 0{,}01$? Evalúe S_N.

2. La serie

$$\begin{aligned}\pi &= 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)}\\ &= 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4.5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right)\end{aligned}$$

se ha atribuido a Newton a finales del siglo XVII. La prueba de este resultado utiliza la serie de Maclaurin para $f(x) = \text{sen}^{-1}x$.

a. Demuestra que la serie converge.
b. Evalúe las sumas parciales S_n para $n = 5, 10, 20$.
c. Compare S_n a π para $n = 5, 10, 20$ y discuta el número de decimales correctos.

3. La serie

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1.103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

fue descubierta por Ramanujan a principios del siglo 1900X. William Gosper, Jr., utilizó esta serie para calcular π con una exactitud de más de 17 millones de dígitos a $\text{mediados de}1980$. En ese momento, eso era un récord mundial. Desde entonces, esta serie y otras de Ramanujan han llevado a los matemáticos a encontrar muchas otras representaciones en serie para π y $1/\pi$.

a. Demuestre que esta serie converge.
b. Evalúe el primer término de esta serie. Compare este número con el valor de π en una herramienta de cálculo. ¿Con cuántos decimales coinciden estos dos números? ¿Y si sumamos los dos primeros términos de la serie?

c. Investigue sobre la vida de Srinivasa Ramanujan $(1887-1920)$ y escriba un breve resumen. Ramanujan es una de las historias más fascinantes de la historia de las matemáticas. Fue básicamente autodidacta, sin educación formal en matemáticas, y sin embargo contribuyó de forma muy original a muchas áreas avanzadas de las matemáticas.

SECCIÓN 5.6 EJERCICIOS

Utilice el criterio del cociente para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, donde a_n en los siguientes problemas. Indique si el criterio del cociente no es concluyente.

317. $a_n = 1/n!$

318. $a_n = 10^n/n!$

319. $a_n = n^2/2^n$

320. $a_n = n^{10}/2^n$

321. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

322. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$

323. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

324. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}$

325. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n/e)^n}$

326. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n/e)^{2n}}$

327. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)^{2n}}$

Utilice el criterio de la raíz para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, donde a_n es el siguiente.

328. $a_k = \left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k$

329. $a_k = \left(\frac{2k^2-1}{k^2+3}\right)^k$

330. $a_n = \frac{(\ln n)^{2n}}{n^n}$

331. $a_n = n/2^n$

332. $a_n = n/e^n$

333. $a_k = \frac{k^e}{e^k}$

334. $a_k = \frac{\pi^k}{k^\pi}$

335. $a_n = \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n}\right)^n$

336. $a_k = \frac{1}{(1+\ln k)^k}$

337. $a_n = \frac{(\ln(1+\ln n))^n}{(\ln n)^n}$

En los siguientes ejercicios, utilice el criterio del cociente o el criterio de la raíz, según corresponda, para determinar si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con términos dados a_k converge, o bien indique si la prueba no es concluyente.

338. $a_k = \frac{k!}{1.3.5\cdots(2k-1)}$
grandes.

339. $a_k = \frac{2.4.6\cdots 2k}{(2k)!}$

340. $a_k = \frac{1.4.7\cdots(3k-2)}{3^k k!}$

341. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

342. $a_k = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}\right)^k$ (*Pista:* Compare $a_k^{1/k}$ a $\int_k^{2k} \frac{dt}{t}$.) grandes.

343. $a_k = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k}\right)^k$

344. $a_n = (n^{1/n} - 1)^n$

Utilice el criterio del cociente para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, o bien indique si el criterio del cociente no es concluyente.

345. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$

346. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n n!}$

Utilice el criterio de la raíz y la prueba de comparación de límites para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

347. $a_n = 1/x_n^n$ donde $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$ (*Pista:* Calcule el límite de $\{x_n\}$.)

En los siguientes ejercicios, utilice una prueba adecuada para determinar si la serie converge.

348. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3 + n^2 + n + 1}$

349. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}$

350. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3 + (1{,}1)^n}$

351. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{(n+1)^n}$

352. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ (*Pista:* $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \approx e$.) grandes.

353. $a_k = 1/2^{\operatorname{sen}^2 k}$

354. $a_k = 2^{-\operatorname{sen}(1/k)}$ grandes.

355. $a_n = 1/\binom{n+2}{n}$ donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

356. $a_k = 1/\binom{2k}{k}$ grandes.

357. $a_k = 2^k/\binom{3k}{k}$ grandes.

358. $a_k = \left(\frac{k}{k+\ln k}\right)^k$ (*Pista:* $a_k = \left(1 + \frac{\ln k}{k}\right)^{-(k/\ln k)\ln k} \approx e^{-\ln k}$.) grandes.

359. $a_k = \left(\frac{k}{k+\ln k}\right)^{2k}$ (*Pista:* $a_k = \left(1 + \frac{\ln k}{k}\right)^{-(k/\ln k)\ln k^2}$.) grandes.

Las siguientes series convergen por el criterio del cociente. Utilice la suma por partes, $\sum_{k=1}^{n} a_k \left(b_{k+1} - b_k\right) = \left[a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1\right] - \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} \left(a_{k+1} - a_k\right)$, *para calcular la suma de la serie dada.*

360. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ (*Pista:* Tome $a_k = k$ y $b_k = 2^{1-k}$.) grandes.

361. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{c^k}$, donde $c > 1$ (*Pista:* Tome $a_k = k$ y $b_k = c^{1-k}/(c-1)$.)

362. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

363. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$

El k–ésimo término de cada una de las siguientes series tiene un factor x^k. *Calcule el rango de* x *para los que el criterio del cociente implica que la serie converge.*

364. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

365. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$

366. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^k}$

367. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

368. ¿Existe un número p tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^p}$ converja?

369. Supongamos que $0 < r < 1$. ¿Para qué números reales p $\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$ converge?

370. Supongamos que $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = p$. ¿Para cuáles valores de p debe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ converger?

371. Supongamos que $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = p$. ¿Para cuáles valores de $r > 0$ se garantiza la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n$?

372. Supongamos que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \le (n+1)^p$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ donde p es un número real fijo. ¿Para qué valores de p se garantiza la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, a_n$?

373. ¿Para qué valores de $r > 0$, si es que los hay, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{\sqrt{n}}$ converge? (*Pista:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} a_n$.) grandes.

374. Supongamos que $\left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| \le r < 1$ para todo n. ¿Puede concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

375. Supongamos que $a_n = 2^{-[n/2]}$ donde $[x]$ es el mayor número entero menor o igual a x. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y justifique su respuesta.

Los siguientes ejercicios avanzados utilizan un criterio del cociente generalizado para determinar la convergencia de algunas series que surgen en aplicaciones particulares cuando las pruebas de este capítulo, incluso los criterios del cociente y la raíz, no son lo suficientemente convincentes para determinar su convergencia. La prueba establece que si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < 1/2$, *entonces* $\sum a_n$ *converge, mientras que si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > 1/2$, *entonces* $\sum a_n$ *diverge.*

376. Supongamos que $a_n = \frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n+2} = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}$. Explique por qué el criterio del cociente no puede determinar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Utilice el hecho de que $1 - 1/(4k)$ está aumentando k para estimar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$.

377. Supongamos que $a_n = \frac{1}{1+x}\frac{2}{2+x}\cdots\frac{n}{n+x}\frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)\cdots(n+x)}$. Demuestre que $a_{2n}/a_n \le e^{-x/2}/2$. ¿Para cuál $x > 0$ el criterio del cociente generalizado implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? (*Pista:* Escriba $2a_{2n}/a_n$ como producto de n factores cada vez más pequeños que $1/(1 + x/(2n))$.) grandes.

378. Supongamos que $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$. Demuestre que $\frac{a_{2n}}{a_n} \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

Revisión del capítulo

Términos clave

convergencia absoluta si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que converge absolutamente

convergencia condicional si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que converge condicionalmente

convergencia de una serie una serie converge si la secuencia de sumas parciales de esa serie converge

criterio de la raíz para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, supongamos que $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; si $0 \le \rho < 1$, la serie converge absolutamente; si $\rho > 1$, la serie diverge; si $\rho = 1$, la prueba no es concluyente

criterio del cociente para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos distintos de cero, supongamos que $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$; si $0 \le \rho < 1$, la serie converge absolutamente; si $\rho > 1$, la serie diverge; si $\rho = 1$, la prueba no es concluyente

delimitada por debajo una secuencia $\{a_n\}$ está delimitada por debajo si existe una constante M tal que $M \le a_n$ para todos los enteros positivos n

delimitada por encima de una secuencia $\{a_n\}$ está delimitada por encima si existe una constante M tal que $a_n \le M$ para todos los enteros positivos n

divergencia de una serie una serie diverge si la secuencia de sumas parciales de esa serie diverge

estimación del resto para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos positivos a_n y una función continua y decreciente f tal que $f(n) = a_n$ para todos los enteros positivos n, el resto $R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$ satisface la siguiente estimación:

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_N < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

fórmula explícita una secuencia puede ser definida por una fórmula explícita tal que $a_n = f(n)$

límite de una secuencia el número real L a la que converge una secuencia se llama límite de la secuencia

prueba de comparación si $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \ge N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; si $a_n \ge b_n \ge 0$ para todo $n \ge N$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

prueba de comparación de límites supongamos que $a_n,\ b_n \ge 0$ para todo $n \ge 1$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \to L \ne 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ambas convergen o ambas divergen; si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \to 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \to \infty$, y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

prueba de divergencia si $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

prueba de la integral para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos positivos a_n, si existe una función continua y decreciente f tal que $f(n) = a_n$ para todos los enteros positivos n, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

ambas convergen o ambas divergen

prueba de series alternadas para una serie alternada de cualquier forma, si $b_{n+1} \leq b_n$ para todos los enteros $n \geq 1$ como de $b_n \to 0$, entonces una serie alternada converge
relación de recurrencia una relación de recurrencia es una relación en la que un término a_n en una secuencia se define en términos de términos anteriores en la secuencia
secuencia una lista ordenada de números de la forma $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una secuencia
secuencia aritmética una secuencia en la que la diferencia entre cada par de términos consecutivos es la misma, se llama secuencia aritmética
secuencia convergente una secuencia convergente es una secuencia $\{a_n\}$ para la que existe un número real L tal que a_n está arbitrariamente cerca de L siempre y cuando n es lo suficientemente grande
secuencia delimitada una secuencia $\{a_n\}$ está delimitada si existe una constante M tal que $|a_n| \leq M$ para todos los enteros positivos n
secuencia divergente una secuencia que no es convergente, es divergente
secuencia geométrica una secuencia $\{a_n\}$, en la que la relación a_{n+1}/a_n es la misma para todos los enteros positivos, n se llama secuencia geométrica
secuencia monótona una secuencia creciente o decreciente
secuencia no delimitada una secuencia que no está delimitada se llama no delimitada
serie armónica la serie armónica toma la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

serie geométrica una serie geométrica es una serie que se puede escribir de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

serie infinita una serie infinita es una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serie *p* una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$
serie telescópica una serie telescópica es aquella en la que la mayoría de los términos se cancelan en cada una de las sumas parciales
series alternadas una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, donde $b_n \geq 0$, se denomina serie alternada
suma parcial la $k-\text{ésima}$ suma parcial de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es la suma finita

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

término el número a_n en la secuencia $\{a_n\}$ se llama el enésimo término de la secuencia
variable de índice el subíndice utilizado para definir los términos de una secuencia se llama índice

Ecuaciones clave

Serie armónica	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Suma de una serie geométrica	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ para $\lvert r \rvert < 1$

Prueba de divergencia	Si $a_n \nrightarrow 0$ a medida que $n \to \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
serie ***p***	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \le 1 \end{cases}$
Estimación del resto de la prueba de la integral	$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx < R_N < \int_{N}^{\infty} f(x)dx$

Series alternadas	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots$

Conceptos clave

5.1 Secuencias

- Para determinar la convergencia de una secuencia dada por una fórmula explícita $a_n = f(n)$, utilizamos las propiedades de los límites de las funciones.
- Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son secuencias convergentes que convergen a A y B, respectivamente, y c es un número real cualquiera, entonces la secuencia $\{ca_n\}$ converge a $c.\ A$, las secuencias $\{a_n \pm b_n\}$ convergen a $A \pm B$, la secuencia $\{a_n.\ b_n\}$ converge a $A.\ B$, y la secuencia $\{a_n/b_n\}$ converge a A/B, siempre que $B \neq 0$.
- Si una secuencia está delimitada y monótona, entonces converge, pero no todas las secuencias convergentes son monótonas.
- Si una secuencia está delimitada, diverge, pero no todas las secuencias divergentes no están delimitadas.
- La secuencia geométrica $\{r^n\}$ converge si y solo si $\lvert r \rvert < 1$ o $r = 1$.

5.2 Serie infinita

- Dada la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

  y la correspondiente secuencia de sumas parciales $\{S_k\}$ donde

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k,$$

  la serie converge si y solo si la secuencia $\{S_k\}$ converge.
- La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ converge si $\lvert r \rvert < 1$ y diverge si $\lvert r \rvert \ge 1$. Para $\lvert r \rvert < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

- La serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

diverge.

- Una serie de la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [b_n - b_{n+1}] = [b_1 - b_2] + [b_2 - b_3] + [b_3 - b_4] + \cdots + [b_n - b_{n+1}] + \cdots$ es una serie telescópica. La $k-$ésimo suma parcial de esta serie está dada por $S_k = b_1 - b_{k+1}$. La serie convergerá si y solo si $\lim\limits_{k\to\infty} b_{k+1}$ existe. En ese caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [b_n - b_{n+1}] = b_1 - \lim_{k\to\infty} \left(b_{k+1}\right).$$

5.3 Las pruebas de divergencia e integral

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger o divergir.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie con términos positivos a_n y f es una función continua y decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todos los enteros positivos n, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{y} \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

ambas convergen o ambas divergen. Además, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces la enésimo aproximación de la suma parcial S_N es precisa a un error R_N donde $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx.$

- La serie p $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

5.4 Pruebas de comparación

- Las pruebas de comparación se utilizan para determinar la convergencia o divergencia de series con términos positivos.
- Al utilizar las pruebas de comparación, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se compara a menudo con una serie geométrica o *p*.

5.5 Series alternadas

- Para una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$, si $b_{k+1} \leq b_k$ para todo k y $b_k \to 0$ a medida que $k \to \infty$, la serie alternada converge.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

5.6 Criterios del cociente y la raíz

- Para el criterio del cociente, consideramos

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Si $\rho < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Si los valores de $\rho > 1$, la serie diverge. Si los valores de $\rho = 1$, la prueba no proporciona ninguna información. Esta prueba es útil para las series cuyos términos implican factoriales.

- Para el criterio de la raíz, consideramos

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Si $\rho < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Si los valores de $\rho > 1$, la serie diverge. Si los valores de $\rho = 1$, la prueba no proporciona ninguna información. El criterio de la raíz es útil para las series cuyos términos implican potencias.

- Para una serie que es similar a una serie geométrica o una serie p, considere una de las pruebas de comparación.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

379. Si los valores de $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

380. Si los valores de $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

381. Si los valores de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

382. Si los valores de $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n a_n$ converge.

¿Es la secuencia delimitada, monótona y convergente o divergente? Si es convergente, calcule el límite.

383. $a_n \text{ n} = \frac{3+n^2}{1-n}$

384. $a_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ grandes.

385. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$

386. $a_n = \frac{2^{n+1}}{5^n}$

387. $a_n = \frac{\ln(\cos n)}{n}$

¿La serie es convergente o divergente?

388. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}$

389. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

390. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$

391. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

392. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(n+1/n)}$

¿La serie es convergente o divergente? Si es convergente, ¿es absolutamente convergente?

393. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

394. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n}$

395. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$

396. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ grandes.

397. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)\, e^{-n}$

Evalúe

398. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+4}}{7^n}$

399. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ grandes.

400. Una leyenda de la India cuenta que un matemático inventó el ajedrez para un rey. El rey disfrutó tanto del juego que permitió al matemático exigir cualquier pago. El matemático pidió un grano de arroz para la primera casilla del tablero, dos granos de arroz para la segunda casilla del tablero, cuatro granos de arroz para la tercera casilla del tablero, y así sucesivamente. Halle una expresión exacta para el pago total (en granos de arroz) solicitado por el matemático. Suponiendo que haya $30{,}000$ granos de arroz en 1 libra, y $2{,}000$ libras en 1 tonelada, ¿cuántas toneladas de arroz intentó recibir el matemático?

Los siguientes problemas consideran un modelo de población simple de la mosca doméstica, que puede ser exhibido mediante la fórmula recursiva $x_{n+1} = bx_n$, donde x_n es la población de moscas domésticas en la generación n, y b es el número promedio de crías por mosca doméstica que sobreviven a la siguiente generación. Supongamos una población inicial x_0.

401. Halle $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ si $b > 1$, $b < 1$, y $b = 1$.

402. Halle una expresión para $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i$ en términos de b y x_0. ¿Qué representa físicamente?

403. Si los valores de $b = \frac{3}{4}$ y $x_0 = 100$, calcule S_{10} y $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$

404. ¿Para qué valores de b la serie converge y diverge? ¿A qué converge la serie?

6 SERIE DE POTENCIAS



Figura 6.1 Si usted gana la lotería, ¿obtiene más dinero si acepta un pago único o si acepta pagos fijos a lo largo del tiempo? (créditos: modificación del trabajo de Robert Huffstutter, Flickr).

Esquema del capítulo

Introducción

Cuando se gana la lotería, a veces se tiene la opción de recibir las ganancias en un solo pago o de recibir pagos más pequeños en intervalos de tiempo fijos. Por ejemplo, puede tener la opción de recibir 20 millones de dólares hoy o recibir 1,5 millones de dólares cada año durante los próximos 20 años. ¿Cuál es la mejor oferta? Ciertamente, 1,5 millones de dólares en 20 años equivalen a 30 millones de dólares. Sin embargo, recibir los 20 millones de dólares hoy le permitiría invertir el dinero.

Por otro lado, ¿qué pasaría si se le garantizara recibir 1 millón de dólares cada año de forma indefinida (extendiéndose a sus herederos) o recibir 20 millones de dólares hoy mismo? ¿Cuál sería la mejor oferta? Para responder estas preguntas, es necesario saber cómo utilizar las series infinitas para calcular el valor de los pagos periódicos a lo largo del tiempo en términos de dólares actuales (vea Ejemplo 6.7).

Una serie infinita de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se conoce como una serie de potencias. Como los términos contienen la variable x, las series de potencias pueden utilizarse para definir funciones. Pueden utilizarse para representar funciones dadas, pero también son importantes porque nos permiten escribir funciones que no pueden expresarse de otra manera que

como "polinomios infinitos" Además, las series de potencias se pueden diferenciar e integrar fácilmente, por lo que son útiles para resolver ecuaciones diferenciales e integrar funciones complicadas. Una serie infinita también se puede truncar, dando como resultado un polinomio finito que podemos utilizar para aproximar valores funcionales. Las series de potencias tienen aplicaciones en una variedad de campos, como la física, la química, la biología y la economía. Como veremos en este capítulo, la representación de funciones mediante series de potencias nos permite resolver problemas matemáticos que no se pueden resolver con otras técnicas.

6.1 Series y funciones de potencia

Objetivos de aprendizaje

6.1.1 Identificar una serie de potencias y proporcionar ejemplos de ellas.
6.1.2 Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
6.1.3 Utilizar una serie de potencias para representar una función.

Una serie de potencias es un tipo de serie con términos que incluyen una variable. Más concretamente, si la variable es *x*, entonces todos los términos de la serie implican potencias de *x*. En consecuencia, una serie de potencias puede considerarse como un polinomio infinito. Las series de potencias se utilizan para representar funciones comunes y también para definir nuevas funciones. En esta sección definimos las series de potencias y mostramos cómo determinar cuándo una serie de potencias converge y cuándo diverge. También mostramos cómo representar ciertas funciones utilizando series de potencias.

Forma de una serie de potencia

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

donde x es una variable y los coeficientes c_n son constantes, se conoce como una **serie de potencias**. La serie

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

es un ejemplo de serie de potencias. Dado que esta es una serie geométrica con cociente $r = x$, sabemos que converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| \geq 1$.

Definición

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \quad (6.1)$$

es una serie de potencias centrada en $x = 0$. Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots \quad (6.2)$$

es una serie de potencias centrada en $x = a$.

Para precisar esta definición, estipulamos que $x^0 = 1$ y $(x-a)^0 = 1$ incluso cuando $x = 0$ y $x = a$, respectivamente.

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$$

son ambas series de potencias centradas en $x = 0$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\,3^n} = 1 + \frac{x-2}{2.\,3} + \frac{(x-2)^2}{3.\,3^2} + \frac{(x-2)^3}{4.\,3^3} + \cdots$$

es una serie de potencias centrada en $x = 2$.

Convergencia de una serie de potencias

Como los términos de una serie de potencias implican una variable *x*, la serie puede converger para ciertos valores de *x* y divergir para otros valores de *x*. Para una serie de potencias centrada en $x = a$, el valor de la serie en $x = a$ está dado por c_0. Por lo tanto, una serie de potencias siempre converge en su centro. Algunas series de potencias convergen solo en ese valor de *x*. Sin embargo, la mayoría de las series de potencias convergen para más de un valor de *x*. En ese caso, la serie de potencias converge para todos los números reales *x* o converge para todo *x* en un intervalo finito. Por ejemplo, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para todo *x* en el intervalo $(-1, 1)$, pero diverge para todo *x* fuera de ese intervalo. Ahora resumimos estas tres posibilidades para una serie de potencias general.

Teorema 6.1

Convergencia de una serie de potencias

Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. La serie satisface exactamente una de las siguientes propiedades:

i. La serie converge en $x = a$ y diverge para todo $x \neq a$.
ii. La serie converge para todos los números reales *x*.
iii. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$. En los valores *x* donde $|x-a| = R$, la serie puede converger o divergir.

Prueba

Supongamos que la serie de potencias está centrada en $a = 0$. (Para una serie centrada en un valor de *a* distinto de cero, el resultado se obtiene suponiendo que $y = x-a$ y considerando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n$.) Primero debemos demostrar el siguiente hecho:

Si existe un número real $d \neq 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente para todo *x* tal que $|x| < |d|$.

Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ converge, el *enésimo* término $c_n d^n \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Por lo tanto, existe un número entero *N* tal que $|c_n d^n| \leq 1$ para todo $n \geq N$. Escribiendo

$$|c_n x^n| = |c_n d^n| \left|\frac{x}{d}\right|^n,$$

concluimos que, para todo $n \geq N$,

$$|c_n x^n| \leq \left|\frac{x}{d}\right|^n.$$

La serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{x}{d}\right|^n$$

es una serie geométrica que converge si $\left|\frac{x}{d}\right| < 1$. Por lo tanto, mediante la prueba de comparación, concluimos que $\sum_{n=N}^{\infty} c_n x^n$ también converge para $|x| < |d|$. Como podemos añadir un número finito de términos a una serie convergente, concluimos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para $|x| < |d|$.

Con este resultado, ahora podemos demostrar el teorema. Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

y supongamos que *S* es el conjunto de números reales para los que converge la serie. Supongamos que el conjunto $S = \{0\}$. Entonces la serie entra en el caso i. Supongamos que el conjunto *S* es el conjunto de todos los números reales. Entonces la serie entra en el caso ii. Supongamos que $S \neq \{0\}$ y *S* no es el conjunto de los números reales. Entonces existe un número real $x^* \neq 0$ tal que la serie no converge. Por lo tanto, la serie no puede converger para cualquier *x* tal que $|x| > |x^*|$. Por tanto, el conjunto *S* debe ser un conjunto acotado, lo que significa que debe tener un límite superior mínimo. (Este hecho se desprende de la propiedad del límite superior mínimo para los números reales, que está más allá del alcance de este texto y se trata en los cursos de análisis real). Llamemos a ese límite superior más pequeño *R*. Dado que $S \neq \{0\}$, el número $R > 0$. Por lo tanto, la serie converge para todo *x* tal que $|x| < R$, y la serie entra en el caso iii.

□

Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ entra en el caso iii. de Convergencia de una serie de potencias, entonces la serie converge para todo *x* tal que $|x-a| < R$ para algunos $R > 0$, y diverge para todo *x* tal que $|x-a| > R$. La serie puede converger o divergir en los valores *x* donde $|x-a| = R$. El conjunto de valores *x* para los que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge se conoce como el **intervalo de convergencia**. Dado que la serie diverge para todos los valores *x* donde $|x-a| > R$, la longitud del intervalo es 2*R*, y por lo tanto, el radio del intervalo es *R*. El valor *R* se llama **radio de convergencia**. Por ejemplo, dado que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para todos los valores *x* en el intervalo $(-1, 1)$ y diverge para todos los valores *x* tales que $|x| \geq 1$, el intervalo de convergencia de esta serie es $(-1, 1)$. Como la longitud del intervalo es 2, el radio de convergencia es 1.

Definición

Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. El conjunto de números reales *x* donde converge la serie es el intervalo de convergencia. Si existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$, entonces *R* es el radio de convergencia. Si la serie converge solo en $x = a$, decimos que el radio de convergencia es $R = 0$. Si la serie converge para todos los números reales *x*, decimos que el radio de convergencia es $R = \infty$ (Figura 6.2).

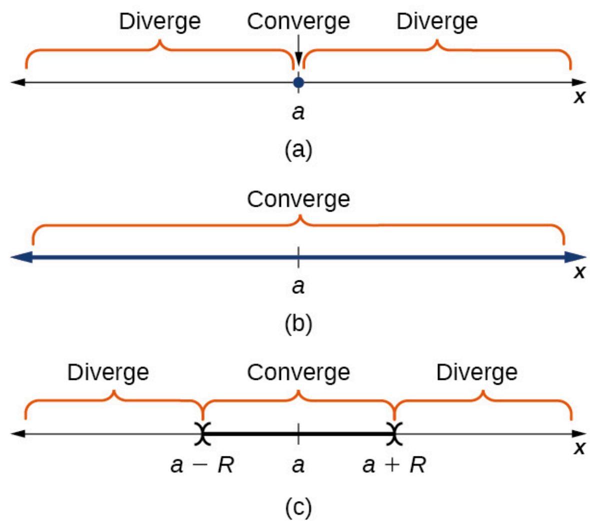


Figura 6.2 Para una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ el gráfico (a) muestra un radio de convergencia en $R = 0$, el gráfico (b) muestra un radio de convergencia en $R = \infty$, y el gráfico (c) muestra un radio de convergencia en *R*. Para el gráfico (c) observamos que la serie puede converger o no en los puntos finales $x = a + R$ y $x = a - R$.

Para determinar el intervalo de convergencia de una serie de potencias, solemos aplicar el criterio del cociente. En el Ejemplo 6.1, mostramos las tres posibilidades diferentes ilustradas en la Figura 6.2.

EJEMPLO 6.1

Hallar el intervalo y el radio de convergencia

Para cada una de las siguientes series, halle el intervalo y el radio de convergencia.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\, 3^n}$

Solución

a. Para comprobar la convergencia, aplique el criterio del cociente. Tenemos

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1).n!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

para todos los valores de *x*. Por lo tanto, la serie converge para todos los números reales *x*. El intervalo de convergencia es $\left(-\infty, \infty\right)$ y el radio de convergencia es $R = \infty$.

b. Aplique el criterio del cociente. Para $x \neq 0$, vemos que

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}|(n+1)\,x| \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie diverge para todo $x \neq 0$. Como la serie está centrada en $x = 0$, debe converger allí, por lo que la serie converge solo para $x = 0$. El intervalo de convergencia es el valor único $x = 0$ y el radio de convergencia es $R = 0$.

c. Para aplicar el criterio del cociente, considere

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)3^n}{(x-2)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)(n+1)}{3(n+2)}\right| \\ &= \frac{|x-2|}{3}.\end{aligned}$$

El cociente $\rho < 1$ si $|x-2| < 3$. Dado que $|x-2| < 3$ implica que $-3 < x-2 < 3$, la serie converge absolutamente si $-1 < x < 5$. El cociente $\rho > 1$ si $|x-2| > 3$. Por lo tanto, la serie diverge si $x < -1$ o $x > 5$. El criterio del cociente no es concluyente si $\rho = 1$. El cociente $\rho = 1$ si y solo si $x = -1$ o $x = 5$. Tenemos que probar estos valores de *x* por separado. Para $x = -1$, la serie está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Como se trata de la serie armónica alternada, converge. Así, la serie converge en $x = -1$. Para $x = 5$, la serie está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Esta es la serie armónica, que es divergente. Por lo tanto, la serie de potencias diverge en $x = 5$. Concluimos que el intervalo de convergencia es $[-1, 5)$ y el radio de convergencia es $R = 3$.

6.1 Halle el intervalo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Representación de funciones como series de potencias

Poder representar una función mediante un "polinomio infinito" es una herramienta poderosa. Las funciones polinómicas son las más fáciles de analizar, ya que solo implican las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación y división. Si podemos representar una función complicada mediante un polinomio infinito, podemos utilizar la representación polinómica para diferenciarla o integrarla. Además, podemos utilizar una versión truncada de la expresión polinómica para aproximar los valores de la función. Entonces, la pregunta es: ¿cuándo podemos representar una función mediante una serie de potencias?

Consideremos de nuevo la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{6.3}$$

Recordemos que la serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

converge si y solo si $|r| < 1$. En ese caso, converge a $\frac{a}{1-r}$. Por lo tanto, si $|x| < 1$, la serie en el Ejemplo 6.3 converge a $\frac{1}{1-x}$ y escribimos

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \text{ para } |x| < 1.$$

Como resultado, podemos representar la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ mediante la serie de potencias

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \text{ cuando } |x| < 1.$$

Ahora mostramos gráficamente cómo esta serie proporciona una representación para la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ comparando el gráfico de *f* con los gráficos de varias de las sumas parciales de esta serie infinita.

EJEMPLO 6.2

Graficar una función y las sumas parciales de sus series de potencias

Dibuje un gráfico de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y los gráficos de las sumas parciales correspondientes $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$ para $N = 2, 4, 6$ en el intervalo $(-1, 1)$. Comente sobre la aproximación S_N a medida que aumenta *N*.

Solución

En el gráfico de la Figura 6.3 se ve que a medida que aumenta *N*, S_N se convierte en una mejor aproximación para $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para *x* en el intervalo $(-1, 1)$.

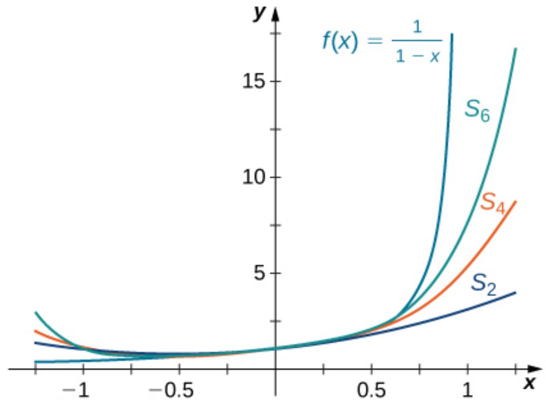


Figura 6.3 El gráfico muestra una función y tres aproximaciones de la misma mediante sumas parciales de una serie de potencias.

6.2 Dibuje un gráfico de $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ y las sumas parciales correspondientes $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^{2n}$ para $N = 2, 4, 6$ en el intervalo $(-1, 1)$.

A continuación consideramos funciones que implican una expresión similar a la suma de una serie geométrica y mostramos cómo representar estas funciones utilizando series de potencias.

EJEMPLO 6.3

Representar una función con una serie de potencias

Utilice una serie de potencias para representar cada una de las siguientes funciones f. Halle el intervalo de convergencia.

a. $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$
b. $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$

Solución

a. Debe reconocer esta función *f* como la suma de una serie geométrica, porque

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-\left(-x^3\right)}.$$

Utilizando el hecho de que, para $|r| < 1$, $\frac{a}{1-r}$ es la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots,$$

vemos que, para $\left|-x^3\right| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{1-\left(-x^3\right)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^3\right)^n\\ &= 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots.\end{aligned}$$

Dado que esta serie converge si y solo si $\left|-x^3\right| < 1$, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$, y tenemos

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots \text{ para } |x| < 1.$$

b. Esta función no tiene la forma exacta de una suma de una serie geométrica. Sin embargo, con un poco de manipulación algebraica, podemos relacionar *f* con una serie geométrica. Factorizando 4 de los dos términos del denominador, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4-x^2} &= \frac{x^2}{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} \\ &= \frac{x^2}{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4-x^2} &= \frac{x^2}{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{\frac{x^2}{4}}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

La serie converge siempre que $\left|\left(\frac{x}{2}\right)^2\right| < 1$ (tenga en cuenta que cuando $\left|\left(\frac{x}{2}\right)^2\right| = 1$ la serie no converge). Resolviendo esta inecuación, concluimos que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$ y

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}} \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^6}{4^3} + \cdots\end{aligned}$$

para $|x| < 2$.

6.3 Represente la función $f(x) = \frac{x^3}{2-x}$ utilizando una serie de potencias y halle el intervalo de convergencia.

En las secciones restantes de este capítulo, mostraremos formas de derivar representaciones en series de potencias para muchas otras funciones, y cómo podemos hacer uso de estas representaciones para evaluar, diferenciar e integrar diversas funciones.

SECCIÓN 6.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, indique si cada afirmación es verdadera o dé un ejemplo para demostrar que es falsa.

1. Si los valores de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge, entonces $a_n x^n \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = 0$ para cualquier número real a_n.

3. Dada cualquier secuencia a_n, siempre hay algún $R > 0$, posiblemente muy pequeño, de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge en $(-R, R)$.

4. Si los valores de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ tiene un radio de convergencia $R > 0$ y si $|b_n| \leq |a_n|$ para todo *n*, entonces el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ es mayor o igual que *R*.

5. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ converge en $x = 6$. ¿En cuál de los siguientes puntos debe converger también la serie? Utilice el hecho de que si $\sum a_n (x-c)^n$ converge en *x*, entonces converge en cualquier punto más cercano a *c* que *x*.

a. $x = 1$
b. $x = 2$
c. $x = 3$
d. $x = 0$
e. $x = 5{,}99$
f. $x = 0{,}000001$

6. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ converge en $x = -2$. ¿En cuál de los siguientes puntos debe converger también la serie? Utilice el hecho de que si $\sum a_n (x-c)^n$ converge en *x*, entonces converge en cualquier punto más cercano a *c* que *x*.

a. $x = 2$
b. $x = -1$
c. $x = -3$
d. $x = 0$
e. $x = 0{,}99$
f. $x = 0{,}000001$

En los siguientes ejercicios, supongamos que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ *a medida que* $n \to \infty$. *Halle el radio de convergencia de cada serie.*

7. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n x^n$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{2^n}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \pi^n x^n}{e^n}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n x^n}{10^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n x^{2n}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-4)^n x^{2n}$

En los siguientes ejercicios, halle el radio de convergencia R y el intervalo de convergencia para $\sum a_n x^n$ con los coeficientes dados a_n.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{e^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^e x^k}{e^k}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k x^k}{k^\pi}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\ln(2n)}$

En los siguientes ejercicios, halle el radio de convergencia de cada serie.

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 x^k}{(2k)!}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{n^{2n}}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1.3.5\cdots(2k-1)} x^k$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2.4.6\cdots 2k}{(2k)!} x^k$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 n x^n$

En los siguientes ejercicios, utilice el criterio del cociente para determinar el radio de convergencia de cada serie.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}(n!)^3}{(3n)!} x^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} x^n$

En los siguientes ejercicios, dado que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con convergencia en $(-1, 1)$, calcule la serie de potencias para cada función con el centro a dado, e identifique su intervalo de convergencia.

33. $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$ (*Pista:* $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}$) grandes.

34. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $a = 0$

35. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$; $a = 0$

36. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}; a = 0$

37. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}; a = 0$

38. $f(x) = \frac{1}{2-x}; a = 1$

39. $f(x) = \frac{1}{1-2x}; a = 0.$

40. $f(x) = \frac{1}{1-4x^2}; a = 0$

41. $f(x) = \frac{x^2}{1-4x^2}; a = 0$

42. $f(x) = \frac{x^2}{5-4x+x^2}; a = 2$

Utilice el siguiente ejercicio para hallar el radio de convergencia de las series dadas en los ejercicios posteriores.

43. Explique por qué, si $|a_n|^{1/n} \to r > 0$, entonces $|a_n x^n|^{1/n} \to |x| r < 1$ siempre que $|x| < \frac{1}{r}$ y, por tanto, el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es $R = \frac{1}{r}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

45. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k x^k$

46. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^2-1}{k^2+3}\right)^k x^k$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(n^{1/n}-1\right)^n x^n$

48. Supongamos que $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que $a_n = 0$ si *n* es impar. Explique por qué $p(x) = -p(-x)$.

49. Supongamos que $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que $a_n = 0$ si *n* es par. Explique por qué $p(x) = p(-x)$.

50. Supongamos que $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $(-1, 1]$. Halle el intervalo de convergencia de $p(Ax)$.

51. Supongamos que $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $(-1, 1]$. Halle el intervalo de convergencia de $p(2x-1)$.

En los siguientes ejercicios, supongamos que $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisface $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donde $a_n \geq 0$ para cada n.

Indique si cada serie converge en el intervalo completo $(-1, 1)$, o si no hay suficiente información para sacar una conclusión. Utilice la prueba de comparación cuando sea adecuado.

52. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$

53. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$

54. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n \left(\text{Pista: } x = \pm\sqrt{x^2}\right)$ grandes.

55. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n^2} x^{n^2}$ (*Pista:* Supongamos que $b_k = a_k$ si $k = n^2$ para algún *n*, en caso contrario $b_k = 0.$)

56. Supongamos que $p(x)$ es un polinomio de grado *N*. Halle el radio y el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) x^n.$

57. **[T]** Dibuje los gráficos de $\frac{1}{1-x}$ y de las sumas parciales $S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n$ para $n = 10, 20, 30$ en el intervalo $[-0{,}99, 0{,}99]$. Comente sobre la aproximación de $\frac{1}{1-x}$ por S_N cerca de $x = -1$ y cerca de $x = 1$ a medida que aumenta *N*.

58. **[T]** Dibuje los gráficos de $-\ln(1-x)$ y de las sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$ para $n = 10, 50, 100$ en el intervalo $[-0{,}99, 0{,}99]$. Comente el comportamiento de las sumas cerca de $x = -1$ y cerca de $x = 1$ a medida que aumenta *N*.

59. **[T]** Dibuje los gráficos de las sumas parciales $S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n^2}$ para $n = 10, 50, 100$ en el intervalo $[-0{,}99, 0{,}99]$. Comente el comportamiento de las sumas cerca de $x = -1$ y cerca de $x = 1$ a medida que aumenta *N*.

60. **[T]** Dibuje los gráficos de las sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen} nx^n$ para $n = 10, 50, 100$ en el intervalo $[-0{,}99, 0{,}99]$. Comente el comportamiento de las sumas cerca de $x = -1$ y cerca de $x = 1$ a medida que aumenta *N*.

61. **[T]** Dibuje los gráficos de las sumas parciales $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para n $\text{n} = 3, 5, 10$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Comente cómo se aproximan estos gráficos $\operatorname{sen} x$ a medida que aumenta *N*.

62. **[T]** Dibuje los gráficos de las sumas parciales $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ para n $\text{n} = 3, 5, 10$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Comente cómo se aproximan estos gráficos $\cos x$ a medida que aumenta *N*.

6.2 Propiedades de las series de potencia

Objetivos de aprendizaje

6.2.1 Combinar series de potencias por adición o sustracción.
6.2.2 Crear una nueva serie de potencias mediante la multiplicación por una potencia de la variable o una constante, o por sustitución.
6.2.3 Multiplicar dos series de potencias entre sí.
6.2.4 Diferenciar e integrar series de potencias término a término.

En la sección anterior sobre las series de potencias y las funciones mostramos cómo representar ciertas funciones utilizando series de potencias. En esta sección discutimos cómo las series de potencias pueden combinarse, diferenciarse o integrarse para crear nuevas series de potencias. Esta capacidad es especialmente útil por un par de razones. En primer lugar, nos permite hallar representaciones en series de potencias para ciertas funciones elementales, escribiendo esas funciones en términos de funciones con series de potencias conocidas. Por ejemplo, dada la representación en serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{1-x}$, podemos hallar una representación en serie de potencias para $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. En segundo lugar, poder crear series de potencias nos permite definir nuevas funciones que no pueden escribirse en términos de funciones elementales. Esta capacidad es especialmente útil para resolver ecuaciones

diferenciales para las que no hay solución en términos de funciones elementales.

Combinación de series de potencias

Si tenemos dos series de potencias con el mismo intervalo de convergencia, podemos sumar o restar las dos series para crear una nueva serie de potencias, también con el mismo intervalo de convergencia. Del mismo modo, podemos multiplicar una serie de potencias por una potencia de *x* o evaluar una serie de potencias en x^m para un número entero positivo *m* para crear una nueva serie de potencias. Esto nos permite hallar representaciones en series de potencias para ciertas funciones utilizando representaciones en series de potencias de otras funciones. Por ejemplo, dado que conocemos la representación en series de potencias para $f(x) = \frac{1}{1-x}$, podemos hallar representaciones en series de potencias para funciones relacionadas, como

$$y = \frac{3x}{1-x^2} \text{ y } y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

En Combinación de series de potencias exponemos los resultados relativos a la adición o sustracción de series de potencias, la composición de una serie de potencias y la multiplicación de una serie de potencias por una potencia de la variable. Para simplificar, enunciamos el teorema para las series de potencias centradas en $x = 0$. Resultados similares son válidos para las series de potencia centradas en $x = a$.

Teorema 6.2

Combinación de series de potencias

Supongamos que las dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ convergen a las funciones *f* y *g*, respectivamente, en un intervalo común I.

i. La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n x^n \pm d_n x^n\right)$ converge a $f \pm g$ en I.

ii. Para cualquier número entero $m \geq 0$ y cualquier número real *b*, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} bx^m c_n x^n$ converge a $bx^m f(x)$ en I.

iii. Para cualquier número entero $m \geq 0$ y cualquier número real *b*, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(bx^m\right)^n$ converge a $f\left(bx^m\right)$ para todo *x* tal que bx^m está en I.

Prueba

Demostramos i. en el caso de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n x^n + d_n x^n\right)$. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ convergen a las funciones *f* y *g*, respectivamente, en el intervalo I. Supongamos que *x* es un punto en I y que $S_N(x)$ y $T_N(x)$ denotan las *enésimas* sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, respectivamente. Entonces la secuencia $\{S_N(x)\}$ converge a $f(x)$ y la secuencia $\{T_N(x)\}$ converge a $g(x)$. Además, la *enésima* suma parcial de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n x^n + d_n x^n\right)$ es

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \left(c_n x^n + d_n x^n\right) &= \sum_{n=0}^{N} c_n x^n + \sum_{n=0}^{N} d_n x^n \\ &= S_N(x) + T_N(x).\end{aligned}$$

Dado que

$$\lim_{N\to\infty} (S_N(x) + T_N(x)) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) + \lim_{N\to\infty} T_N(x)$$
$$= f(x) + g(x),$$

concluimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n + d_n x^n)$ converge a $f(x) + g(x)$.

□

Examinaremos los productos de las series de potencias en un teorema posterior. Primero, mostramos varias aplicaciones de Combinación de series de potencias y cómo hallar el intervalo de convergencia de una serie de potencias dado el intervalo de convergencia de una serie de potencias relacionada.

EJEMPLO 6.4

Combinación de series de potencias

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $(-1, 1)$, y supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

a. Halle el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n + b_n x^n)$.

b. Halle el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n x^n$.

Solución

a. Dado que el intervalo $(-1, 1)$ es un intervalo común de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n + b_n x^n)$ es $(-1, 1)$.

b. Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una serie de potencias centrada en cero con radio de convergencia 1, converge para todo x en el intervalo $(-1, 1)$. Por Combinación de series de potencias, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (3x)^n$$

converge si $3x$ está en el intervalo $(-1, 1)$. Por tanto, la serie converge para todo x en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

6.4 Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un intervalo de convergencia de $(-1, 1)$. Halle el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo utilizar Combinación de series de potencias y la serie de potencias de una función *f* para construir series de potencias de funciones relacionadas con *f*. En concreto, consideramos las funciones relacionadas con la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y utilizamos el hecho de que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

para $|x| < 1$.

EJEMPLO 6.5

Construcción de series de potencias a partir de series de potencia conocidas

Utilice la representación en series de potencias para $f(x) = \frac{1}{1-x}$ combinada con Combinación de series de potencias para construir una serie de potencias para cada una de las siguientes funciones. Halle el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

a. $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$
b. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

Solución

a. Primero escriba $f(x)$ como

$$f(x) = 3x\left(\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}\right).$$

Utilizando la representación en serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y las partes ii. y iii. de Combinación de series de potencias, hallamos que una representación en serie de potencias para *f* está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3x\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n x^{2n+1}.$$

Dado que el intervalo de convergencia de la serie para $\frac{1}{1-x}$ es $(-1, 1)$, el intervalo de convergencia de esta nueva serie es el conjunto de números reales *x* tales que $\left|x^2\right| < 1$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

b. Para hallar la representación en serie de potencias, utilice fracciones parciales para escribir $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ como la suma de dos fracciones. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x-3)} &= \frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x-3} \\ &= \frac{1/2}{1-x} - \frac{1/2}{3-x} \\ &= \frac{1/2}{1-x} - \frac{1/6}{1-\frac{x}{3}}.\end{aligned}$$

En primer lugar, utilizando la parte ii. de Combinación de series de potencias, obtenemos

$$\frac{1/2}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}x^n \text{ para } |x| < 1.$$

Entonces, utilizando las partes ii. y iii. de Combinación de series de potencias, tenemos

$$\frac{1/6}{1-x/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{x}{3}\right)^n \text{ para } |x| < 3.$$

Como estamos combinando estas dos series de potencias, el intervalo de convergencia de la diferencia debe ser el

menor de estos dos intervalos. Utilizando este hecho y la parte i. de Combinación de series de potencias, tenemos

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6.\,3^n} \right) x^n$$

donde el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

6.5 Utilice la serie para $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $|x| < 1$ para construir una serie para $\frac{1}{(1-x)(x-2)}$. Determine el intervalo de convergencia.

En el Ejemplo 6.5, mostramos cómo calcular series de potencias para ciertas funciones. En el Ejemplo 6.6 mostramos cómo hacer lo contrario: dada una serie de potencias, determinar qué función representa.

EJEMPLO 6.6

Hallar la función representada por una serie de potencias dada

Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$. Halle la función *f* representada por esta serie. Determine el intervalo de convergencia de la serie.

Solución

Escribiendo la serie dada como

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n,$$

podemos reconocer esta serie como la serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}.$$

Como se trata de una serie geométrica, la serie converge si y solo si $|2x| < 1$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6.6 Halle la función representada por la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$. Determine su intervalo de convergencia.

Recordemos las preguntas planteadas en el inicio del capítulo sobre cuál es la mejor forma de recibir los pagos de los premios de la lotería. A continuación, retomamos estas preguntas y mostramos cómo utilizar las series para comparar los valores de los pagos a lo largo del tiempo con el pago de una suma global en la actualidad. Calcularemos cuánto valen los pagos futuros en términos de dólares de hoy, suponiendo que tenemos la capacidad de invertir las ganancias y ganar intereses. El valor de los pagos futuros en términos de dólares de hoy se conoce como el *valor actual* de esos pagos.

EJEMPLO 6.7

Inicio del capítulo: Valor actual de las ganancias futuras



Figura 6.4 (créditos: modificación del trabajo de Robert Huffstutter, Flickr).

Supongamos que gana la lotería y le dan las tres opciones siguientes: (1) Recibir 20 millones de dólares hoy; (2) recibir 1,5 millones de dólares al año durante los próximos 20 años; o (3) recibir 1 millón de dólares al año de forma indefinida (pasando a sus herederos). ¿Cuál es la mejor oferta, suponiendo que el tipo de interés anual es del 5 %? Respondemos a esto mediante la siguiente secuencia de preguntas.

a. ¿Cuánto valen los 1,5 millones de dólares recibidos anualmente a lo largo de 20 años en términos de dólares actuales, suponiendo un tipo de interés anual del 5 %?
b. Utilice la respuesta de la parte a. para hallar una fórmula general para el valor actual de los pagos de C dólares recibidos cada año durante los próximos n años, suponiendo un tipo de interés anual promedio r.
c. Halle una fórmula para el valor actual si los pagos anuales de C dólares continúan indefinidamente, asumiendo una tasa de interés anual promedio r.
d. Utilice la respuesta de la parte c. para determinar el valor actual de 1 millón de dólares pagados anualmente de forma indefinida.
e. Utilice sus respuestas de las partes a. y d. para determinar cuál de las tres opciones es la mejor.

Solución

a. Considere el pago de 1,5 millones de dólares realizado al final del primer año. Si pudiera recibir ese pago hoy en vez de dentro de un año, podría invertir ese dinero y ganar un 5 % de interés. Por lo tanto, el valor actual de ese dinero P_1 satisface $P_1\,(1+0{,}05)=1{,}5$ millones de dólares. Concluimos que

$$P_1 = \frac{1{,}5}{1{,}05} = \$1{,}429 \text{ millones de dólares.}$$

Del mismo modo, considere el pago de 1,5 millones de dólares realizado al final del segundo año. Si pudiera recibir ese pago hoy, podría invertir ese dinero durante dos años, ganando un 5 % de interés, compuesto anualmente. Por lo tanto, el valor actual de ese dinero P_2 satisface $P_2(1+0{,}05)^2 = 1{,}5$ millones de dólares. Concluimos que

$$P_2 = \frac{1{,}5}{(1{,}05)^2} = \$1{,}361 \text{ millones de dólares.}$$

El valor de los pagos futuros hoy es la suma de los valores actuales $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$ de cada uno de esos pagos anuales. El valor actual P_k satisface

$$P_k = \frac{1{,}5}{(1{,}05)^k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1{,}5}{1{,}05} + \frac{1{,}5}{(1{,}05)^2} + \cdots + \frac{1{,}5}{(1{,}05)^{20}} \\ &= \$18{,}693 \text{ millones de dólares.} \end{aligned}$$

b. Utilizando el resultado de la parte a. vemos que el valor actual P de C dólares pagados anualmente en el transcurso de n años, suponiendo un tipo de interés anual r, está dado por

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n} \text{ dólares.}$$

c. Utilizando el resultado de la parte b. vemos que el valor actual de una anualidad que continúa indefinidamente está dado por la serie infinita

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^{n+1}}.$$

Podemos ver el valor actual como una serie de potencias en r, que converge siempre que $\left|\frac{1}{1+r}\right| < 1$. Dado que $r > 0$, esta serie converge. Reescribiendo la serie como

$$P = \frac{C}{(1+r)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^n,$$

reconocemos esta serie como la serie de potencias para

$$f(r) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{r}{1+r}\right)} = \frac{1+r}{r}.$$

Concluimos que el valor actual de esta anualidad es

$$P = \frac{C}{1+r} \cdot \frac{1+r}{r} = \frac{C}{r}.$$

d. Del resultado de la parte c. concluimos que el valor actual P de $C = 1$ millón de dólares pagado cada año indefinidamente, suponiendo un tipo de interés anual $r = 0{,}05$, está dada por

$$P = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ millones de dólares.}$$

e. De la parte a. vemos que recibir 1,5 millones de dólares en el transcurso de 20 años tiene un valor de 18,693 millones de dólares en dólares de hoy. De la parte d. vemos que recibir 1 millón de dólares al año de forma indefinida tiene un valor de 20 millones de dólares en dólares de hoy. Por lo tanto, tanto recibir un pago único de 20 millones de dólares hoy como recibir 1 millón de dólares indefinidamente tienen el mismo valor actual.

Multiplicación de series de potencias

También podemos crear nuevas series de potencias multiplicando series de potencias. La posibilidad de multiplicar dos series de potencias proporciona otra forma de hallar representaciones en series de potencias para las funciones.

La forma de multiplicarlas es similar a la de multiplicar polinomios. Por ejemplo, supongamos que queremos multiplicar

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots.$$

Parece que el producto debería satisfacer

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=-0}^{\infty} d_n x^n\right) &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\right) . \left(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots\right) \\ &= c_0 d_0 + (c_1 d_0 + c_0 d_1)\, x + (c_2 d_0 + c_1 d_1 + c_0 d_2)\, x^2 + \cdots.\end{aligned}$$

En Multiplicación de series de potencias exponemos el resultado principal sobre la multiplicación de series de potencias,

mostrando que si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ convergen en un intervalo común I, entonces podemos multiplicar las series de esta manera, y la serie resultante también converge en el intervalo I.

Teorema 6.3

Multiplicación de series de potencias

Supongamos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ convergen a f y g, respectivamente, en un intervalo común I. Supongamos que

$$\begin{aligned} e_n &= c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + c_2 d_{n-2} + \cdots + c_{n-1} d_1 + c_n d_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n \text{ converge a } f(x) \,.\, g(x) \text{ en } I.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$ se conoce como el producto Cauchy de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$.

Omitimos la demostración de este teorema, ya que va más allá del nivel de este texto y suele tratarse en un curso más avanzado. A continuación, ofrecemos un ejemplo de este teorema encontrando la representación en serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)}$$

utilizando las representaciones en series de potencias para

$$y = \frac{1}{1-x} \text{ y } y = \frac{1}{1-x^2}.$$

EJEMPLO 6.8

Multiplicación de series de potencias

Multiplique la representación en serie de potencias

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

para $|x| < 1$ con la representación en serie de potencias

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\end{aligned}$$

para $|x| < 1$ para construir una serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

Solución

Tenemos que multiplicar

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right).$$

Escribiendo los primeros términos, vemos que el producto está dado por

$$\begin{aligned}&\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right) + \left(x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots\right) + \left(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots\right) + \left(x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \cdots\right) \\ &= 1 + x + (1+1)x^2 + (1+1)x^3 + (1+1+1)x^4 + (1+1+1)x^5 + \cdots \\ &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \cdots.\end{aligned}$$

Dado que las series para $y = \frac{1}{1-x}$ como $y = \frac{1}{1-x^2}$ convergen ambas en el intervalo $(-1, 1)$, la serie del producto también converge en el intervalo $(-1, 1)$.

6.7 Multiplique la serie $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ por sí misma para construir una serie para $\frac{1}{(1-x)(1-x)}$.

Diferenciación e integración de series de potencias

Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ que converge en algún intervalo I, y supongamos que f es la función definida por esta serie. Aquí abordamos dos preguntas sobre f.

- ¿Es f diferenciable, y si es así, cómo determinamos la derivada f'?
- ¿Cómo evaluamos la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

Sabemos que, para un polinomio con un número finito de términos, podemos evaluar la derivada diferenciando cada término por separado. Del mismo modo, podemos evaluar la integral indefinida integrando cada término por separado. Aquí mostramos que podemos hacer lo mismo para las series de potencias convergentes. Es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

converge en algún intervalo I, entonces

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots$$

y

$$\int f(x)\,dx = C + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \cdots$$

converge en I

La evaluación de la derivada y la integral indefinida de este modo se denomina **diferenciación término a término de una serie de potencias** e **integración término a término de una serie de potencias**, respectivamente. La capacidad de diferenciar e integrar las series de potencias término a término también nos permite utilizar representaciones en series de potencias conocidas para hallar representaciones en series de potencias para otras funciones. Por ejemplo, dada la serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{1-x}$, podemos diferenciar término a término para calcular la serie de potencias

para $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Del mismo modo, utilizando la serie de potencias para $g(x) = \frac{1}{1+x}$, podemos integrar término a término para calcular la serie de potencias para $G(x) = \ln(1+x)$, una antiderivada de g. Le mostramos cómo hacerlo en el Ejemplo 6.9 y el Ejemplo 6.10. En primer lugar, enunciamos la Diferenciación e integración término a término de las series de potencias, que proporciona el principal resultado concerniente a la diferenciación e integración de series de potencias.

Teorema 6.4

Diferenciación e integración término a término de las series de potencias

Supongamos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge en el intervalo $(a-R, a+R)$ para algunos $R > 0$. Supongamos que f es la función definida por la serie

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \\ &= c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

para $|x-a| < R$. Entonces f es diferenciable en el intervalo $(a-R, a+R)$ y podemos hallar f' diferenciando la serie término a término:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \\ &= c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

para $|x-a| < R$. Además, para hallar $\int f(x)\,dx$, podemos integrar la serie término a término. La serie resultante converge en $(a-R, a+R)$, y tenemos

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\ &= C + c_0 (x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots \end{aligned}$$

para $|x-a| < R$.

La demostración de este resultado está fuera del alcance del texto y se omite. Obsérvese que aunque la Diferenciación e integración término a término de las series de potencias garantiza el mismo radio de convergencia cuando una serie de potencias se diferencia o integra término a término, no dice nada sobre lo que ocurre en los puntos finales. Es posible que las series de potencias diferenciadas e integradas tengan un comportamiento diferente en los puntos finales que la serie original. Vemos este comportamiento en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6.9

Diferenciación de series de potencias

a. Utilice la representación en serie de potencias

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

para $|x| < 1$ para hallar una representación en serie de potencias para

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

en el intervalo $(-1, 1)$. Determine si la serie resultante converge en los puntos finales.

b. Utilice el resultado de la parte a. para evaluar la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$.

Solución

a. Dado que $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ es la derivada de $f(x) = \frac{1}{1-x}$, podemos hallar una representación en serie de potencias para *g* diferenciando la serie de potencias para *f* término a término. El resultado es

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) \\ &= \frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \\ &= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \end{aligned}$$

para $|x| < 1$. La Diferenciación e integración término a término de las series de potencias no garantiza nada sobre el comportamiento de esta serie en los puntos finales. Comprobando los puntos finales mediante la prueba de divergencia, encontramos que la serie diverge en ambos puntos finales $x = \pm 1$. Observe que este es el mismo resultado que se halló en el Ejemplo 6.8.

b. De la parte a. sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

6.8 Diferencie las series $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ término a término para hallar una representación en serie de potencias para $\frac{2}{(1-x)^3}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

EJEMPLO 6.10

Integración de series de potencias

Para cada una de las siguientes funciones *f*, halle una representación en serie de potencias para *f* integrando la serie de potencias para f' y halle su intervalo de convergencia.

a. $f(x) = \ln(1+x)$ grandes.
b. $f(x) = \tan^{-1} x$

Solución

a. Para $f(x) = \ln(1+x)$, la derivada es $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\end{aligned}$$

para $|x| < 1$. Para hallar la fórmula de una serie de potencias para $f(x) = \ln(1+x)$, integramos la serie término a término

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx &= \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right) dx \\ &= C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\end{aligned}$$

Dado que $f(x) = \ln(1+x)$ es una antiderivada de $\frac{1}{1+x}$, queda por resolver la constante *C*. Ya que $\ln(1+0) = 0$, tenemos $C = 0$. Por lo tanto, una representación en serie de potencias para $f(x) = \ln(1+x)$ es

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

para $|x| < 1$. La Diferenciación e integración término a término de las series de potencias no garantiza nada sobre el comportamiento de esta serie de potencias en los puntos finales. Sin embargo, al comprobar los puntos finales, hallamos que en $x = 1$ la serie es la serie armónica alternada, que converge. Además, en $x = -1$, la serie es la serie armónica, que diverge. Es importante señalar que, aunque esta serie converge en $x = 1$, la Diferenciación e integración término a término de las series de potencias no garantiza que la serie converja realmente a $\ln(2)$. De hecho, la serie converge a $\ln(2)$, pero demostrar este hecho requiere técnicas más avanzadas. (El teorema de Abel, tratado en textos más avanzados, se ocupa de este punto más técnico). El intervalo de convergencia es $(-1, 1]$.

b. La derivada de $f(x) = \tan^{-1} x$ es $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-\left(-x^2\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\end{aligned}$$

para $|x| < 1$. Para hallar la fórmula de una serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1} x$, integramos esta serie término a término.

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx &= \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right) dx \\ &= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\end{aligned}$$

Dado que $\tan^{-1}(0) = 0$, tenemos $C = 0$. Por lo tanto, una representación en serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1} x$ es

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

para $|x| < 1$. De nuevo, la Diferenciación e integración término a término de las series de potencias no garantiza nada sobre la convergencia de esta serie en los puntos finales. Sin embargo, comprobando los puntos finales y utilizando la prueba de series alternadas, hallamos que la serie converge en $x = 1$ y $x = -1$. Como se discutió en la parte a., utilizando el teorema de Abel, se puede demostrar que la serie realmente converge a $\tan^{-1}(1)$ y $\tan^{-1}(-1)$ en $x = 1$ y $x = -1$, respectivamente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.

6.9 Integre la serie de potencias $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ término a término para evaluar $\int \ln(1 + x)\, dx$.

Hasta ahora, hemos mostrado varias técnicas para hallar representaciones en series de potencias para funciones. Sin embargo, ¿cómo sabemos que estas series de potencias son únicas? Es decir, dada una función f y una serie de potencias para f en a, ¿es posible que exista una serie de potencias diferente para f en a que podríamos haber hallado si hubiéramos utilizado una técnica diferente? La respuesta a esta pregunta es no. Este hecho no debería parecer sorprendente si pensamos en las series de potencias como polinomios con un número infinito de términos. Intuitivamente, si

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots$$

para todos los valores x en algún intervalo abierto I alrededor de cero, entonces los coeficientes c_n deben ser iguales a d_n para $n \geq 0$. Ahora exponemos este resultado formalmente en la Singularidad de las series de potencias.

Teorema 6.5

Singularidad de las series de potencias

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$ sean dos series de potencias convergentes tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$$

para todo x en un intervalo abierto que contiene a. Entonces $c_n = d_n$ para todo $n \geq 0$.

Prueba

Supongamos que

$$\begin{aligned}f(x) &= c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \cdots \\ &= d_0 + d_1 (x-a) + d_2 (x-a)^2 + d_3 (x-a)^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Entonces $f(a) = c_0 = d_0$. Mediante la Diferenciación e integración término a término de las series de potencias, podemos diferenciar ambas series término a término. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + \cdots \\ &= d_1 + 2d_2 (x-a) + 3d_3 (x-a)^2 + \cdots,\end{aligned}$$

y así, $f'(a) = c_1 = d_1$. De la misma manera,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2c_2 + 3.2c_3(x-a) + \cdots \\ &= 2d_2 + 3.2d_3(x-a) + \cdots \end{aligned}$$

implica que $f''(a) = 2c_2 = 2d_2$, y por lo tanto, $c_2 = d_2$. Más generalmente, para cualquier número entero $n \geq 0$, $f^{(n)}(a) = n!c_n = n!d_n$, y en consecuencia, $c_n = d_n$ para todo $n \geq 0$.

□

En esta sección hemos mostrado cómo hallar representaciones en series de potencias para ciertas funciones usando diversas operaciones algebraicas, diferenciación o integración. Sin embargo, en este punto todavía estamos limitados en cuanto a las funciones para las que podemos hallar representaciones en series de potencias. A continuación, mostramos cómo hallar representaciones en series de potencias para muchas más funciones introduciendo series de Taylor.

SECCIÓN 6.2 EJERCICIOS

63. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, halle la fórmula de la serie de potencias de $\frac{1}{2}(f(x) + g(x))$ y de $\frac{1}{2}(f(x) - g(x))$.

64. Si $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ y $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, halle la fórmula de la serie de potencias de $C(x) + S(x)$ y de $C(x) - S(x)$.

En los siguientes ejercicios, utilice fracciones parciales para calcular la serie de potencias de cada función.

65. $\frac{4}{(x-3)(x+1)}$ grandes.

66. $\frac{3}{(x+2)(x-1)}$ grandes.

67. $\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}$ grandes.

68. $\frac{30}{(x^2+1)(x^2-9)}$

En los siguientes ejercicios, exprese cada serie como una función racional.

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-3)^{2n-1}}$

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-3)^{2n-1}} - \frac{1}{(x-2)^{2n-1}} \right)$

Los siguientes ejercicios exploran las aplicaciones de las anualidades.

73. Calcule los valores actuales *P* de una anualidad en la que se van a pagar 10.000 dólares anuales durante un periodo de 20 años, suponiendo unas tasas de interés de $r = 0{,}03, r = 0{,}05,$ y $r = 0{,}07.$

74. Calcule los valores actuales *P* de las anualidades en las que se pagarán 9.000 dólares anuales perpetuamente, suponiendo tasas de interés de $r = 0{,}03, r = 0{,}05$ y $r = 0{,}07.$

75. Calcule los pagos anuales *C* que se darán durante 20 años en las anualidades que tienen un valor actual de 100.000 dólares suponiendo unas tasas de interés respectivas de $r = 0{,}03, r = 0{,}05,$ y $r = 0{,}07.$

76. Calcule los pagos anuales *C* que se darán perpetuamente en las anualidades que tienen un valor actual de 100.000 dólares suponiendo unas tasas de interés respectivas de $r = 0{,}03, r = 0{,}05,$ y $r = 0{,}07.$

77. Supongamos que una anualidad tiene un valor actual $P = 1$ millón de dólares. ¿Qué tasa de interés *r* permitiría realizar pagos anuales perpetuos de 50.000 dólares?

78. Supongamos que una anualidad tiene un valor actual $P = 10$ millones de dólares. ¿Qué tasa de interés *r* permitiría realizar pagos anuales perpetuos de 100.000 dólares?

En los siguientes ejercicios, exprese la suma de cada serie de potencias en términos de series geométricas, y luego exprese la suma como una función racional.

79. $x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 + \cdots$ (*Pista:* Agrupe las potencias x^{3k}, x^{3k-1}, y x^{3k-2}.) grandes.

80. $x + x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + \cdots$ (*Pista:* Agrupe las potencias x^{4k}, x^{4k-1}, etc.).

81. $x - x^2 - x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + x^7 - \cdots$ (*Pista:* Agrupe las potencias x^{3k}, x^{3k-1}, y x^{3k-2}.) grandes.

82. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} - \frac{x^6}{64} + \cdots$ (*Pista:* Agrupe las potencias $\left(\frac{x}{2}\right)^{3k}$, $\left(\frac{x}{2}\right)^{3k-1}$, y $\left(\frac{x}{2}\right)^{3k-2}$.)

En los siguientes ejercicios, halle la serie de potencias de $f(x)\,g(x)$ dadas f y g como se definen.

83. $f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

84. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n.$ Exprese los coeficientes de $f(x)\,g(x)$ en términos de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

85. $f(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

86. $f(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

En los siguientes ejercicios, diferencie la expansión en serie dada de f término a término para obtener la correspondiente expansión en serie de la derivada de f.

87. $f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

88. $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

En los siguientes ejercicios, integre la expansión en serie dada de f término a término desde cero hasta x para obtener la correspondiente expansión en serie de la integral indefinida de f.

89. $f(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n) x^{2n-1}$

90. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$

En los siguientes ejercicios, evalúe cada serie infinita identificándola como el valor de una derivada o integral de serie geométrica.

91. Evalúe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ como $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ donde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

92. Evalúe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ como $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ donde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

93. Evalúe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$ como $f''\left(\frac{1}{2}\right)$ donde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

94. Evalúe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ como $\int_0^1 f(t)\,dt$ donde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$.

En los siguientes ejercicios, dado que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, utilice la diferenciación término a término o la integración para hallar series de potencias para cada función centrada en el punto dado.

95. $f(x) = \ln x$ centrada en $x = 1$ (*Pista:* $x = 1 - (1 - x)$) grandes.

96. $\ln(1 - x)$ en $x = 0$

97. $\ln\left(1 - x^2\right)$ en $x = 0$

98. $f(x) = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$ en $x = 0$

99. $f(x) = \tan^{-1}\left(x^2\right)$ en $x = 0$

100. $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$ en $x = 0$

101. $f(x) = \int_0^x \ln t dt$ donde $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$

102. **[T]** Evalúe la expansión en serie de potencias $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ en $x = 1$ para demostrar que $\ln(2)$ es la suma de las series armónicas alternadas. Utilice la prueba de series alternadas para determinar cuántos términos de la suma son necesarios para estimar $\ln(2)$ con una precisión de 0,001, y calcule dicha aproximación.

103. **[T]** Reste la serie infinita de $\ln(1-x)$ de $\ln(1+x)$ para obtener una serie de potencias para $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Evalúe en $x = \frac{1}{3}$. ¿Cuál es el menor N tal que la *enésima* suma parcial de esta serie se aproxime a $\ln(2)$ con un error inferior a 0,001?

En los siguientes ejercicios, utilizando una sustitución si se indica, exprese cada serie en términos de funciones elementales y calcule el radio de convergencia de la suma.

104. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(x^k - x^{2k+1}\right)$ grandes.

105. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{6k}$

106. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+x^2\right)^{-k}$ utilizando $y = \frac{1}{1+x^2}$

107. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kx}$ utilizando $y = 2^{-x}$

108. Demuestre que, hasta las potencias x^3 y y^3, $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ satisface $E(x+y) = E(x)E(y)$.

109. Diferencie las series $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ término a término para demostrar que $E(x)$ es igual a su derivada.

110. Demuestre que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una suma de potencias pares, es decir, $a_n = 0$ si n es impar, entonces $F = \int_0^x f(t)\, dt$ es una suma de potencias impares, mientras que si f es una suma de potencias impares, entonces F es una suma de potencias pares.

111. **[T]** Supongamos que los coeficientes a_n de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se definen por la relación de recurrencia $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$. Para $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, calcule y grafique las sumas $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ para $N = 2, 3, 4, 5$ en $[-1, 1]$.

112. **[T]** Supongamos que los coeficientes a_n de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se definen por la relación de recurrencia $a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{a_{n-2}}{\sqrt{n(n-1)}}$. Para $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, calcule y grafique las sumas $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ para $N = 2, 3, 4, 5$ en $[-1, 1]$.

113. **[T]** Dada la expansión en serie de potencias

$$\ln (1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

determine cuántos términos N de la suma evaluada en $x = -1/2$ son necesarios para aproximar $\ln (2)$ con una precisión de 1/1.000. Evalúe la suma parcial correspondiente $\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

114. **[T]** Dada la expansión en serie de potencias

$$\tan^{-1} (x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

utilice la prueba de series alternadas para determinar cuántos términos N de la suma evaluada en $x = 1$ son necesarios para aproximar $\tan^{-1} (1) = \frac{\pi}{4}$ con una precisión de 1/1000. Evalúe la suma parcial correspondiente $\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

115. **[T]** Recordemos que $\tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$. Suponiendo un valor exacto de $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, estime $\frac{\pi}{6}$ mediante la evaluación de sumas parciales $S_N \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ de la expansión en serie de potencias

$$\tan^{-1} (x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ¿Cuál es el menor número N tal que $6S_N \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ se aproxime a π con una precisión de 0,001? ¿Cuántos términos se necesitan para tener una exactitud de 0,00001?

6.3 Series de Taylor y Maclaurin

Objetivos de aprendizaje

6.3.1 Describir el procedimiento para calcular un polinomio de Taylor de un orden dado para una función.
6.3.2 Explicar el significado y la importancia del teorema de Taylor con resto.
6.3.3 Estimar el resto de una aproximación en serie de Taylor de una función dada.

En las dos secciones anteriores hemos discutido cómo hallar representaciones en series de potencias para ciertos tipos de funciones, en concreto, funciones relacionadas con series geométricas. A continuación, discutiremos las representaciones en series de potencias para otros tipos de funciones. En particular, abordamos las siguientes preguntas: ¿Qué funciones pueden representarse mediante series de potencias y cómo podemos hallar dichas representaciones? Si podemos hallar una representación en serie de potencias para una función particular f y la serie converge en algún intervalo, ¿cómo demostramos que la serie realmente converge a f?

Resumen de la serie de Taylor/Maclaurin

Considere una función f que tiene una representación en serie de potencias en $x = a$. Entonces la serie tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots. \tag{6.4}$$

¿Cuáles deberían ser los coeficientes? Por ahora, ignoramos los temas de convergencia y nos centramos en lo que debería ser la serie, si es que existe. Volveremos a hablar de la convergencia más adelante en esta sección. Si la serie de la Ecuación 6.4 es una representación para f en $x = a$, ciertamente queremos que la serie sea igual a $f (a)$ en $x = a$. Si evaluamos la serie en $x = a$, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n &= c_0 + c_1 (a - a) + c_2 (a - a)^2 + \cdots \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es igual a $f (a)$ si el coeficiente $c_0 = f (a)$. Además, queremos que la primera derivada de la serie de potencias sea igual a $f' (a)$ en $x = a$. Diferenciando la Ecuación 6.4 término a término, vemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = c_1 + 2c_2\,(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots.$$

Por lo tanto, en $x = a$, la derivada es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) &= c_1 + 2c_2\,(a-a) + 3c_3(a-a)^2 + \cdots \\ &= c_1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de la serie es igual a $f'(a)$ si el coeficiente $c_1 = f'(a)$. Si continuamos de este modo, buscamos coeficientes c_n tales que todas las derivadas de la serie de potencias de la Ecuación 6.4 coincidan con todas las derivadas correspondientes de f en $x = a$. La segunda y tercera derivadas de la Ecuación 6.4 están dadas por

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = 2c_2 + 3.\,2c_3\,(x-a) + 4.\,3c_4(x-a)^2 + \cdots$$

y

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = 3.\,2c_3 + 4.\,3.\,2c_4\,(x-a) + 5.\,4.\,3c_5(x-a)^2 + \cdots.$$

Por lo tanto, en $x = a$, la segunda y tercera derivadas

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) &= 2c_2 + 3.\,2c_3\,(a-a) + 4.\,3c_4(a-a)^2 + \cdots \\ &= 2c_2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) &= 3.\,2c_3 + 4.\,3.\,2c_4\,(a-a) + 5.\,4.\,3c_5(a-a)^2 + \cdots \\ &= 3.\,2c_3\end{aligned}$$

igual a $f''(a)$ y $f'''(a)$, respectivamente, si $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$ y $c_3 = \frac{f'''(a)}{3}$ De forma más general, vemos que si f tiene una representación en serie de potencias en $x = a$, entonces los coeficientes deben ser dados por $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Es decir, la serie debe ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots.$$

Esta serie de potencias para f se conoce como la serie de Taylor para f en a. Si $a = 0$, entonces esta serie se conoce como la serie de Maclaurin para f.

Definición

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = a$, entonces la **serie de Taylor** para la función f en a es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \quad (6.5)$$

La serie de Taylor para f en 0 se conoce como la **serie de Maclaurin** para f.

Más adelante en esta sección, mostraremos ejemplos de cómo calcular series de Taylor y hablaremos de las condiciones bajo las cuales la serie de Taylor para una función convergerá a esa función. Aquí exponemos un resultado importante. Recordemos de la Singularidad de las series de potencias que las representaciones en serie de potencias son únicas. Por lo tanto, si una función f tiene una serie de potencias en a, entonces debe ser la serie de Taylor para f en a.

Teorema 6.6

Singularidad de la serie de Taylor

Si una función f tiene una serie de potencias en *a* que converge a f en algún intervalo abierto que contenga *a*, entonces esa serie de potencias es la serie de Taylor para f en *a*.

La prueba se deduce directamente de la Singularidad de las series de potencias.

Para determinar si una serie de Taylor converge, tenemos que mirar su secuencia de sumas parciales. Estas sumas parciales son polinomios finitos, conocidos como **polinomios de Taylor**.

MEDIOS

Visite el archivo de Historia de las Matemáticas de MacTutor para leer breves biografías de Brook Taylor (http://www.openstax.org/l/20_BTaylor) y Colin Maclaurin (http://www.openstax.org/l/20_CMaclaurin) y cómo desarrollaron los conceptos que llevan su nombre.

Polinomios de Taylor

La *enésima* suma parcial de la serie de Taylor para una función f en a se conoce como el *enésimo* polinomio de Taylor. Por ejemplo, las sumas parciales 0, 1, 2 y 3 de la serie de Taylor están dadas por

$$\begin{aligned} p_0(x) &= f(a), \\ p_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a), \\ p_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2, \\ p_3(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3, \end{aligned}$$

respectivamente. Estas sumas parciales se conocen como los polinomios 0, 1, 2 y 3 de Taylor de f en a, respectivamente. Si $a = 0$, entonces estos polinomios se conocen como **polinomios de Maclaurin** para f. Ahora ofrecemos una definición formal de los polinomios de Taylor y Maclaurin para una función f.

Definición

Si f tiene *n* derivadas en $x = a$, entonces el *enésimo* polinomio de Taylor para f en a es

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

El *enésimo* polinomio de Taylor para f en 0 se conoce como el *enésimo* polinomio de Maclaurin para f.

Ahora mostramos cómo utilizar esta definición para calcular varios polinomios de Taylor para $f(x) = \ln x$ en $x = 1$.

EJEMPLO 6.11

Calcular polinomios de Taylor

Calcule los polinomios de Taylor p_0, p_1, p_2 y p_3 para $f(x) = \ln x$ en $x = 1$. Utilice una herramienta gráfica para comparar el gráfico de f con los gráficos de p_0, p_1, p_2 y p_3.

Solución

Para calcular estos polinomios de Taylor, necesitamos evaluar f y sus tres primeras derivadas en $x = 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_0(x) &= f(1) = 0, \\ p_1(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) = x-1, \\ p_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2, \\ p_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Los gráficos de $y = f(x)$ y los tres primeros polinomios de Taylor se muestran en la Figura 6.5.

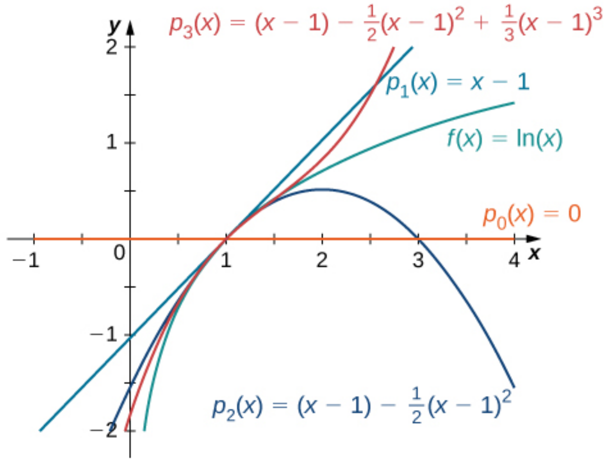


Figura 6.5 La función $y = \ln x$ y los polinomios de Taylor p_0, p_1, p_2 y p_3 en $x = 1$ están trazadas en este gráfico.

6.10 Calcule los polinomios de Taylor p_0, p_1, p_2 y p_3 para $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = 1$.

Ahora mostramos cómo calcular los polinomios de Maclaurin para e^x, $\operatorname{sen} x$, y $\cos x$. Como ya se ha dicho, los polinomios de Maclaurin son polinomios de Taylor centrados en cero.

EJEMPLO 6.12

Cálculo de polinomios de Maclaurin

Para cada una de las siguientes funciones, halle las fórmulas de los polinomios de Maclaurin p_0, p_1, p_2 y p_3. Halle una fórmula para el *enésimo* polinomio de Maclaurin y escríbala utilizando la notación sigma. Utilice una herramienta gráfica para comparar los gráficos de p_0, p_1, p_2 y p_3 con f.

a. $f(x) = e^x$

b. $f(x) = \operatorname{sen} x$
c. $f(x) = \cos x$

Solución

a. Dado que $f(x) = e^x$, sabemos que $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ para todos los enteros positivos *n*. Por lo tanto,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

para todos los enteros positivos *n*. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} p_0(x) &= f(0) = 1, \\ p_1(x) &= f(0) + f'(0)x = 1 + x, \\ p_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \\ p_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3, \\ p_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

La función y los tres primeros polinomios de Maclaurin se muestran en la Figura 6.6.

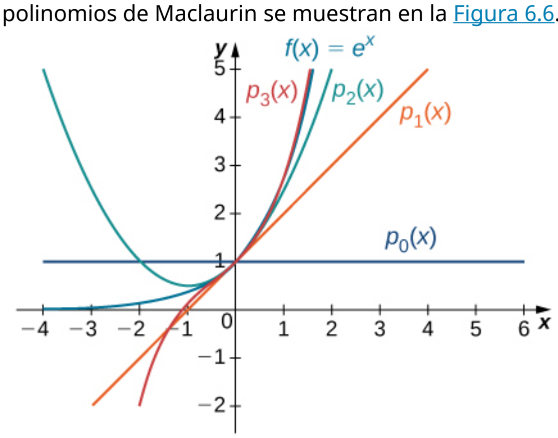


Figura 6.6 El gráfico muestra la función $y = e^x$ y los polinomios de Maclaurin p_0, p_1, p_2 y p_3.

b. Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, los valores de la función y sus cuatro primeras derivadas en $x = 0$ se dan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0, \end{aligned}$$

Como la cuarta derivada es $\operatorname{sen} x$, el patrón se repite. Es decir, $f^{(2m)}(0) = 0$ y $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$ para $m \geq 0$. Por lo tanto, tenemos

$$
\begin{aligned}
&p_0(x) = 0,\\
&p_1(x) = 0 + x = x,\\
&p_2(x) = 0 + x + 0 = x,\\
&p_3(x) = 0 + x + 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 = x - \tfrac{x^3}{3!},\\
&p_4(x) = 0 + x + 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 + 0 = x - \tfrac{x^3}{3!},\\
&p_5(x) = 0 + x + 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 + 0 + \tfrac{1}{5!}x^5 = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!},
\end{aligned}
$$

y para $m \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
p_{2m+1}(x) &= p_{2m+2}(x)\\
&= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \tfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Los gráficos de la función y sus polinomios de Maclaurin se muestran en la Figura 6.7.

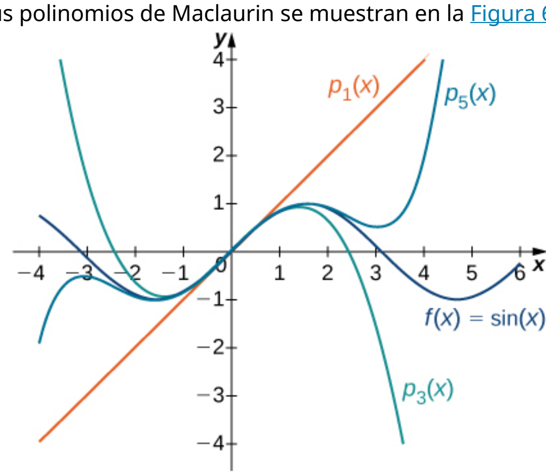


Figura 6.7 El gráfico muestra la función $y = \operatorname{sen} x$ y los polinomios de Maclaurin p_1, p_3 y p_5.

c. Para $f(x) = \cos x$, los valores de la función y sus cuatro primeras derivadas en $x = 0$ se dan de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lcl lcl}
f(x) &=& \cos x & f(0) &=& 1\\
f'(x) &=& -\operatorname{sen} x & f'(0) &=& 0\\
f''(x) &=& -\cos x & f''(0) &=& -1\\
f'''(x) &=& \operatorname{sen} x & f'''(0) &=& 0\\
f^{(4)}(x) &=& \cos x & f^{(4)}(0) &=& 1
\end{array}
$$

Como la cuarta derivada es $\cos x$, el patrón se repite. En otras palabras, $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$ y $f^{(2m+1)} = 0$ para $m \geq 0$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&p_0(x) = 1,\\
&p_1(x) = 1 + 0 = 1,\\
&p_2(x) = 1 + 0 - \tfrac{1}{2!}x^2 = 1 - \tfrac{x^2}{2!},\\
&p_3(x) = 1 + 0 - \tfrac{1}{2!}x^2 + 0 = 1 - \tfrac{x^2}{2!},\\
&p_4(x) = 1 + 0 - \tfrac{1}{2!}x^2 + 0 + \tfrac{1}{4!}x^4 = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!},\\
&p_5(x) = 1 + 0 - \tfrac{1}{2!}x^2 + 0 + \tfrac{1}{4!}x^4 + 0 = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!},
\end{aligned}
$$

y para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} p_{2m}(x) &= p_{2m+1}(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Los gráficos de la función y los polinomios de Maclaurin aparecen en la Figura 6.8.

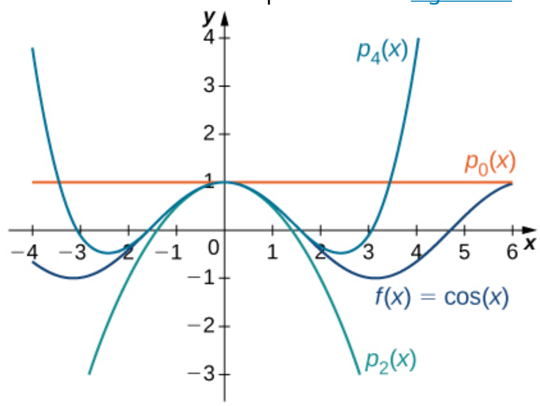


Figura 6.8 La función $y = \cos x$ y los polinomios de Maclaurin p_0, p_2 y p_4 están trazados en este gráfico.

6.11 Halle fórmulas para los polinomios de Maclaurin p_0, p_1, p_2 y p_3 para $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Halle una fórmula para el *enésimo* polinomio de Maclaurin. Escriba su respuesta utilizando la notación sigma.

Teorema de Taylor con resto

Recordemos que el *enésimo* polinomio de Taylor para una función f en *a* es la *enésima* suma parcial de la serie de Taylor para f en *a*. Por lo tanto, para determinar si la serie de Taylor converge, necesitamos determinar si la secuencia de polinomios de Taylor $\{p_n\}$ converge. Sin embargo, no solo queremos saber si la secuencia de polinomios de Taylor converge, sino que queremos saber si converge a f. Para responder esta pregunta, definimos el resto $R_n(x)$ como

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Para que la secuencia de polinomios de Taylor converja a f, necesitamos que el resto R_n converja a cero. Para determinar si R_n converge a cero, introducimos **el teorema de Taylor con resto**. Este teorema no solo es útil para demostrar que una serie de Taylor converge a su función correspondiente, sino que también nos permitirá la aproximación del *enésimo* polinomio de Taylor a la función.

Aquí buscamos un límite en $|R_n|$. Considere el caso más sencillo: $n = 0$. Supongamos que p_0 es el polinomio 0 de Taylor en *a* para una función f. El resto R_0 satisface

$$\begin{aligned} R_0(x) &= f(x) - p_0(x) \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

Si f es diferenciable en un intervalo I que contiene *a* y *x*, entonces por el teorema de valor medio existe un número real *c* entre *a* y *x* tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$. Por lo tanto,

$$R_0(x) = f'(c)(x-a).$$

Utilizando el teorema de valor medio con un argumento similar, podemos demostrar que si f es *n* veces diferenciable en un intervalo I que contiene *a* y *x*, entonces el *enésimo* resto R_n satisface

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algún número real *c* entre *a* y *x*. Es importante señalar que el valor *c* en el numerador anterior no es el centro *a*, sino un valor desconocido *c* entre *a* y *x*. Esta fórmula nos permite obtener un límite en el resto R_n. Si sabemos que

$\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ está delimitada por algún número real *M* en este intervalo *I*, entonces

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para todo *x* en el intervalo *I*.

Enunciamos ahora el teorema de Taylor, que estipula la relación formal entre una función f y su polinomio de Taylor de *enésimo* orden $p_n(x)$. Este teorema nos permite acotar el error cuando se utiliza un polinomio de Taylor para aproximar el valor de una función y será importante para demostrar que una serie de Taylor para f converge a f.

Teorema 6.7

Teorema de Taylor con resto

Supongamos que f es una función que se puede diferenciar $n+1$ veces en un intervalo *I* que contiene el número real *a*. Supongamos que p_n es el *enésimo* polinomio de Taylor de f en *a* y que

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

es el *enésimo* resto. Entonces, para cada *x* en el intervalo *I*, existe un número real *c* entre *a* y *x* tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Si existe un número real *M* tal que $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para todo $x \in I$, entonces

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para todo *x* en *I*.

Prueba

Fije un punto $x \in I$ e introduzca la función *g* tal que

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}.$$

Afirmamos que *g* satisface los criterios del teorema de Rolle. Como *g* es una función polinómica (en *t*), es una función diferenciable. Además, *g* es cero en $t=a$ y $t=x$ porque

$$\begin{aligned}
g(a) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - R_n(x) \\
&= f(x) - p_n(x) - R_n(x) \\
&= 0, \\
g(x) &= f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Por lo tanto, *g* satisface el teorema de Rolle, y en consecuencia, existe *c* entre *a* y *x* tal que $g'(c) = 0$. Ahora calculamos g'. Utilizando la regla del producto, observamos que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] = \frac{-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= -f'(t) + \left[f'(t) - f''(t)(x-t)\right] + \left[f''(t)(x-t) - \tfrac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right] + \cdots \\
&\quad + \left[\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] + (n+1)R_n(x)\tfrac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Observe que hay un efecto telescópico. Por lo tanto,

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}.$$

Por el teorema de Rolle, concluimos que existe un número c entre a y x tal que $g'(c) = 0$. Dado que

$$g'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

concluimos que

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Sumando el primer término del lado izquierdo a ambos lados de la ecuación y dividiendo ambos lados de la ecuación entre $\frac{(n+1)(x-c)^n}{(x}$, concluimos que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

como se deseaba. A partir de este hecho, se deduce que si existe M tal que $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$ para todo x en I, entonces

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

□

El teorema de Taylor no solo nos permite demostrar que una serie de Taylor converge a una función, sino que también nos permite estimar la exactitud de los polinomios de Taylor en la aproximación de los valores de las funciones. Empezamos por ver las aproximaciones lineales y cuadráticas de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 8$ y determinamos la exactitud de estas aproximaciones para estimar $\sqrt[3]{11}$.

EJEMPLO 6.13

Uso de aproximaciones lineales y cuadráticas para estimar los valores de funciones

Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

a. Calcule el primer y segundo polinomio de Taylor para f en $x = 8$. Utilice una herramienta gráfica para comparar estos polinomios con f cerca de $x = 8$.
b. Utilice estos dos polinomios para estimar $\sqrt[3]{11}$.
c. Utilice el teorema de Taylor para acotar el error.

Solución

a. Para $f(x) = \sqrt[3]{x}$, los valores de la función y sus dos primeras derivadas en $x = 8$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} & f(8) &= 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{3x^{2/3}} & f'(8) &= \frac{1}{12} \\ f''(x) &= \frac{-2}{9x^{5/3}} & f''(8) &= -\frac{1}{144}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los polinomios de Taylor de primer y segundo orden en $x = 8$ están dados por

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(8) + f'(8)(x-8) \\ &= 2 + \frac{1}{12}(x-8) \\ p_2(x) &= f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2. \end{aligned}$$

La función y los polinomios de Taylor se muestran en la Figura 6.9.

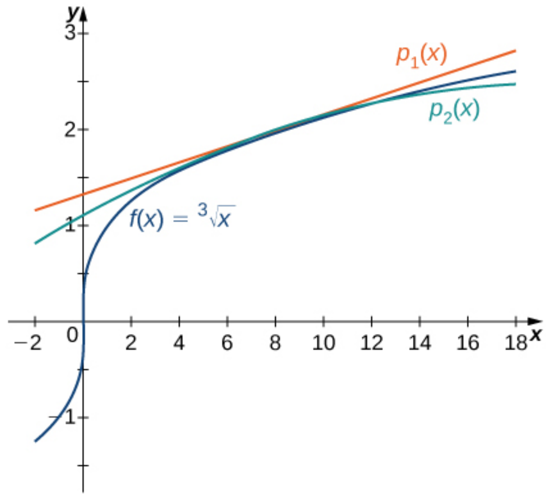


Figura 6.9 Los gráficos de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y las aproximaciones lineales y cuadráticas $p_1(x)$ y $p_2(x)$.

b. Utilizando el polinomio de Taylor de primer orden en $x = 8$, podemos estimar

$$\sqrt[3]{11} \approx p_1(11) = 2 + \frac{1}{12}(11 - 8) = 2{,}25.$$

Utilizando el polinomio de Taylor de segundo orden en $x = 8$, obtenemos

$$\sqrt[3]{11} \approx p_2(11) = 2 + \frac{1}{12}(11 - 8) - \frac{1}{288}(11 - 8)^2 = 2{,}21875.$$

c. Por el Teorema de Taylor con resto existe un *c* en el intervalo $(8, 11)$ tal que el resto cuando se aproxima a $\sqrt[3]{11}$ por el polinomio de Taylor de primer orden satisface

$$R_1(11) = \frac{f''(c)}{2!}(11 - 8)^2.$$

No conocemos el valor exacto de *c*, por lo que hallamos un límite superior en $R_1(11)$ determinando el valor máximo de f'' en el intervalo $(8, 11)$. Dado que $f''(x) = -\frac{2}{9x^{5/3}}$, el mayor valor para $|f''(x)|$ en ese intervalo se produce en $x = 8$. Si utilizamos el hecho de que $f''(8) = -\frac{1}{144}$, obtenemos

$$|R_1(11)| \leq \frac{1}{144.\,2!}(11 - 8)^2 = 0{,}03125.$$

Del mismo modo, para estimar $R_2(11)$, utilizamos el hecho de que

$$R_2(11) = \frac{f'''(c)}{3!}(11 - 8)^3.$$

Dado que $f'''(x) = \frac{10}{27x^{8/3}}$, el valor máximo de f''' en el intervalo $(8, 11)$ es $f'''(8) \approx 0{,}0014468$. Por lo tanto, tenemos

$$|R_2(11)| \leq \frac{0{,}0011468}{3!}(11 - 8)^3 \approx 0{,}0065104.$$

6.12 Calcule el primer y segundo polinomio de Taylor para $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$. Utilice estos polinomios para estimar $\sqrt{6}$. Utilice el teorema de Taylor para acotar el error.

EJEMPLO 6.14

Aproximación de sen *x* mediante polinomios de Maclaurin

Del Ejemplo 6.12b., los polinomios de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ están dados por

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(x) &= p_{2m+2}(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

para $m = 0, 0, 1, 2, \ldots.$

a. Utilice el polinomio de Maclaurin de quinto orden para $\operatorname{sen} x$ para aproximar a $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right)$ y acotar el error.

b. Para qué valores de *x* el polinomio de Maclaurin de quinto orden se aproxima a $\operatorname{sen} x$ con una exactitud de 0,0001?

Solución

a. El polinomio de Maclaurin de quinto orden es

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Utilizando este polinomio, podemos estimar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) &\approx p_5\left(\frac{\pi}{18}\right) \\ &= \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \\ &\approx 0{,}173648. \end{aligned}$$

Para estimar el error, utilice el hecho de que el polinomio de Maclaurin de sexto orden es $p_6(x) = p_5(x)$ y calcule un límite para $R_6\left(\frac{\pi}{18}\right)$. Por la Singularidad de la serie de Taylor, el resto es

$$R_6\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7$$

para algún *c* entre 0 y $\frac{\pi}{18}$. Si utilizamos el hecho de que $\left|f^{(7)}(x)\right| \le 1$ para todo *x*, hallamos que la magnitud del error es como máximo

$$\frac{1}{7!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^7 \le 9{,}8 \times 10^{-10}.$$

b. Necesitamos hallar los valores de *x* tales que

$$\frac{1}{7!}|x|^7 \le 0{,}0001.$$

Resolviendo esta inecuación para *x*, tenemos que el polinomio de Maclaurin de quinto orden da una estimación con una precisión de 0,0001 siempre que $|x| < 0{,}907$.

6.13 Utilice el polinomio de Maclaurin de cuarto orden para el $\cos x$ para aproximar a $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Ahora que podemos acotar el resto $R_n(x)$, podemos utilizar este límite para demostrar que una serie de Taylor para f en *a* converge a f.

Representación de funciones con series de Taylor y Maclaurin

Ahora discutiremos los problemas de convergencia de las series de Taylor. Comenzamos mostrando cómo calcular una serie de Taylor para una función y cómo calcular su intervalo de convergencia.

EJEMPLO 6.15

Cálculo de una serie de Taylor

Calcule la serie de Taylor para $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1$. Determine el intervalo de convergencia.

Solución

Para $f(x) = \frac{1}{x}$, los valores de la función y sus cuatro primeras derivadas en $x = 1$ son

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) & = & \frac{1}{x} & f(1) & = & 1 \\ f'(x) & = & -\frac{1}{x^2} & f'(1) & = & -1 \\ f''(x) & = & \frac{2}{x^3} & f''(1) & = & 2! \\ f'''(x) & = & -\frac{3.2}{x^4} & f'''(1) & = & -3! \\ f^{(4)}(x) & = & \frac{4.3.2}{x^5} & f^{(4)}(1) & = & 4!. \end{array}$$

Es decir, tenemos $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, la serie de Taylor para f en $x = 1$ está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n.$$

Para hallar el intervalo de convergencia, utilizamos el criterio del cociente. Tenemos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}\right|}{|(-1)^n (x-1)^n|} = |x-1|.$$

Así, la serie converge si $|x-1| < 1$. Es decir, la serie converge para $0 < x < 2$. A continuación, tenemos que comprobar los extremos. En $x = 2$, vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

diverge por la prueba de divergencia. Asimismo, en $x = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (0-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

diverge. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $(0, 2)$.

☑ 6.14 Calcule la serie de Taylor para $f(x) = \frac{1}{2x}$ en $x = 2$ y determine su intervalo de convergencia.

Sabemos que la serie de Taylor calculada en este ejemplo converge en el intervalo $(0, 2)$, pero ¿cómo sabemos que realmente converge a f? Consideraremos esta pregunta de forma más general en un momento, pero para este ejemplo, podemos responder esta pregunta escribiendo

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}.$$

Es decir, f puede representarse mediante la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$. Como se trata de una serie geométrica, converge a $\frac{1}{x}$ siempre y cuando $|1-x| < 1$. Por lo tanto, la serie de Taylor calculada en el Ejemplo 6.15 sí converge a $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0, 2)$.

Consideramos ahora la pregunta más general: si una serie de Taylor para una función f converge en algún intervalo, ¿cómo podemos determinar si realmente converge a f? Para responder esta pregunta, recordemos que una serie converge a un valor determinado si y solo si su secuencia de sumas parciales converge a ese valor. Dada una serie de Taylor para f en a, la *enésima* suma parcial está dada por el *enésimo* polinomio de Taylor p_n. Por lo tanto, para determinar si la serie de Taylor converge a f, tenemos que determinar si

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x).$$

Dado que el resto $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, la serie de Taylor converge a f si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Ahora enunciamos este teorema formalmente.

Teorema 6.8

Convergencia de las series de Taylor

Supongamos que f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene *a*. Entonces la serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

converge a $f(x)$ para todo *x* en I si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para todo *x* en I.

Con este teorema, podemos demostrar que una serie de Taylor para f en *a* converge a f si podemos demostrar que el resto $R_n(x) \to 0$. Para demostrar que $R_n(x) \to 0$, solemos utilizar el límite

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

del teorema de Taylor con resto.

En el siguiente ejemplo, calcularemos la serie de Maclaurin para e^x y $\operatorname{sen} x$ y demostraremos que estas series convergen a las funciones correspondientes para todos los números reales demostrando que los restos $R_n(x) \to 0$ para todos los números reales *x*.

EJEMPLO 6.16

Cálculo de serie de Maclaurin

Para cada una de las siguientes funciones, calcule la serie de Maclaurin y su intervalo de convergencia. Utilice el Teorema de Taylor con resto para demostrar que la serie de Maclaurin para f converge a f en ese intervalo.

a. e^x
b. $\operatorname{sen} x$

Solución

a. Utilizando el *enésimo* polinomio de Maclaurin para e^x calculado en el Ejemplo 6.12a., determinamos que la serie de Maclaurin para e^x está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Para determinar el intervalo de convergencia, utilizamos el criterio del cociente. Dado que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1},$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

para todo *x*. Por lo tanto, la serie converge absolutamente para todo *x*, y así, el intervalo de convergencia es

$\left(-\infty, \infty\right)$. Para demostrar que la serie converge a e^x para todo x, utilizamos el hecho de que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 0$ y e^x es una función creciente en $\left(-\infty, \infty\right)$. Por lo tanto, para cualquier número real b, el valor máximo de e^x para todo $|x| \leq b$ es e^b. Por lo tanto,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^b}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Como acabamos de mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

converge para todo x, por la prueba de divergencia, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

para cualquier número real x. Combinando este hecho con el teorema del emparedado, el resultado es $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

b. Utilizando el *enésimo* polinomio de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ calculado en el Ejemplo 6.12b., determinamos que la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ está dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Para aplicar el criterio del cociente, considere

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)}.$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

para todo x, obtenemos el intervalo de convergencia como $\left(-\infty, \infty\right)$. Para demostrar que la serie de Maclaurin converge a $\operatorname{sen} x$, observe el $R_n(x)$. Para cada x existe un número real c entre 0 y x tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Dado que $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$ para todos los enteros n y todos los números reales c, tenemos

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

para todos los números reales x. Utilizando la misma idea que en la parte a., el resultado es $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo x, y por lo tanto, la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ converge a $\operatorname{sen} x$ para todo x real.

✓ 6.15 Calcule la serie de Maclaurin para $f(x) = \cos x$. Utilice el criterio del cociente para demostrar que el

intervalo de convergencia es $\left(-\infty, \infty\right)$. Demuestre que la serie de Maclaurin converge a $\cos x$ para todos los números reales *x*.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Demostrar que *e* es irracional

En este proyecto, utilizamos los polinomios de Maclaurin para e^x para demostrar que *e* es irracional. La prueba se basa en suponer que *e* es racional y llegar a una contradicción. Por lo tanto, en los siguientes pasos, suponemos $e = r/s$ para algunos enteros *r* y *s* donde $s \neq 0$.

1. Escriba los polinomios de Maclaurin $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ para e^x. Evalúe $p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1), p_4(1)$ para estimar *e*.
2. Supongamos que $R_n(x)$ denota el resto cuando se utiliza $p_n(x)$ para estimar e^x. Por lo tanto, $R_n(x) = e^x - p_n(x)$, y $R_n(1) = e - p_n(1)$. Suponiendo que $e = \frac{r}{s}$ para los enteros *r* y *s*, evalúe $R_0(1), R_1(1), R_2(1), R_3(1), R_4(1)$.
3. Utilizando los resultados de la parte 2, demuestre que para cada resto $R_0(1), R_1(1), R_2(1), R_3(1), R_4(1)$, podemos hallar un número entero *k* tal que $kR_n(1)$ es un número entero para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
4. Escriba la fórmula del *enésimo* polinomio de Maclaurin $p_n(x)$ para e^x y el resto correspondiente $R_n(x)$. Demuestre que $sn!R_n(1)$ es un número entero.
5. Utilice el teorema de Taylor para escribir una fórmula explícita para $R_n(1)$. Concluya que $R_n(1) \neq 0$, y por lo tanto, $sn!R_n(1) \neq 0$.
6. Utilice el teorema de Taylor para calcular una estimación de $R_n(1)$. Utilice esta estimación combinada con el resultado de la parte 5 para demostrar que $|sn!R_n(1)| < \frac{se}{n+1}$. Concluya que si *n* es suficientemente grande, entonces $|sn!R_n(1)| < 1$. Por lo tanto, $sn!R_n(1)$ es un número entero de magnitud inferior a 1. Por lo tanto, $sn!R_n(1) = 0$. Pero a partir de la parte 5, sabemos que $sn!R_n(1) \neq 0$. Hemos llegado a una contradicción, y en consecuencia, la suposición original de que *e* es racional debe ser falsa.

SECCIÓN 6.3 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule los polinomios de Taylor de orden dos que aproximan la función dada centrada en el punto dado.

116. $f(x) = 1 + x + x^2$ en $a = 1$

117. $f(x) = 1 + x + x^2$ en $a = -1$

118. $f(x) = \cos(2x)$ en $a = \pi$

119. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$

120. $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$

121. $f(x) = \ln x$ en $a = 1$

122. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 1$

123. $f(x) = e^x$ en $a = 1$

En los siguientes ejercicios, verifique que la elección dada de n en la estimación del resto $|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, donde M es el valor máximo de $\left|f^{(n+1)}(z)\right|$ en el intervalo entre a y el punto indicado, produce $|R_n| \leq \frac{1}{1.000}$. Halle el valor del polinomio de Taylor p_n de f en el punto indicado.

124. **[T]** $\sqrt{10}; a = 9, n$ n $= 3$

125. **[T]** $(28)^{1/3}; a = 27, n = 1$

126. **[T]** $\operatorname{sen}(6); a = 2\pi, n = 5$

127. **[T]** $e^2; a = 0, n = 9$

128. **[T]** $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right); a = 0, n = 4$

129. **[T]** $\ln(2); a = 1, n = 1.000$

130. Integre la aproximación $\operatorname{sen} t \approx t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040}$ evaluada en πt para aproximar $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t} dt$.

131. Integre la aproximación $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^6}{720}$ evaluada en $-x^2$ para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

En los siguientes ejercicios, halle el menor valor de n tal que la estimación del resto $|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, donde M es el valor máximo de $\left|f^{(n+1)}(z)\right|$ en el intervalo entre a y el punto indicado, produce $|R_n| \leq \frac{1}{1.000}$ en el intervalo indicado.

132. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-\pi, \pi]$, $a = 0$

133. $f(x) = \cos x$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $a = 0$

134. $f(x) = e^{-2x}$ en $[-1, 1]$, $a = 0$

135. $f(x) = e^{-x}$ en $[-3, 3]$, $a = 0$

En los siguientes ejercicios, el máximo del lado derecho del resto estimado $|R_1| \leq \frac{\max|f''(z)|}{2} R^2$ en $[a - R, a + R]$ se produce en a o $a \pm R$. Estime el valor máximo de R tal que $\frac{\max|f''(z)|}{2} R^2 \leq 0{,}1$ en $[a - R, a + R]$ trazando este máximo en función de R.

136. **[T]** e^x aproximado por $1 + x$, $a = 0$

137. **[T]** $\operatorname{sen} x$ aproximado por x, $a = 0$

138. **[T]** $\ln x$ aproximado por $x - 1$, $a = 1$

139. **[T]** $\cos x$ aproximado por 1, $a = 0$

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Taylor de la función dada centrada en el punto indicado.

140. x^4 en $a = -1$

141. $1 + x + x^2 + x^3$ en $a = -1$

142. $\operatorname{sen} x$ en $a = \pi$

143. $\cos x$ en $a = 2\pi$

144. $\operatorname{sen} x$ en $x = \frac{\pi}{2}$

145. $\cos x$ en $x = \frac{\pi}{2}$

146. e^x en $a = -1$

147. e^x en $a = 1$

148. $\frac{1}{(x-1)^2}$ en $a = 0$ (*Pista:* Diferencie $\frac{1}{1-x}$.) grandes.

149. $\frac{1}{(x-1)^3}$ en $a = 0$

150. $F(x) = \int_0^x \cos\left(\sqrt{t}\right) dt$; $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(2n)!}$ en $a = 0$ (*Nota*: f es la serie de Taylor de $\cos\left(\sqrt{t}\right)$.)

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Taylor de cada función alrededor de $x = 1$.

151. $f(x) = 2 - x$

152. $f(x) = x^3$

153. $f(x) = (x - 2)^2$

154. $f(x) = \ln x$

155. $f(x) = \frac{1}{x}$

156. $f(x) = \frac{1}{2x - x^2}$

157. $f(x) = \frac{x}{4x-2x^2-1}$

158. $f(x) = e^{-x}$

159. $f(x) = e^{2x}$

[T] *En los siguientes ejercicios, identifique el valor de x tal que la serie dada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sea el valor de la serie Maclaurin de* $f(x)$ *en* x. *Aproxime el valor de* $f(x)$ *utilizando* $S_{10} = \sum_{n=0}^{10} a_n$.

160. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

161. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

162. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!}$

163. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Los siguientes ejercicios hacen uso de las funciones $S_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ *y* $C_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ *en* $[-\pi, \pi]$.

164. **[T]** Grafique $\text{sen}^2 x - (S_5(x))^2$ en $[-\pi, \pi]$. Compare la diferencia máxima con el cuadrado de la estimación del resto de Taylor para $\text{sen}\, x$.

165. **[T]** Grafique $\cos^2 x - (C_4(x))^2$ en $[-\pi, \pi]$. Compare la diferencia máxima con el cuadrado de la estimación del resto de Taylor para $\cos x$.

166. **[T]** Grafique $|2S_5(x) C_4(x) - \text{sen}(2x)|$ en $[-\pi, \pi]$.

167. **[T]** Compare $\frac{S_5(x)}{C_4(x)}$ sobre $[-1, 1]$ a $\tan x$. Compare esto con la estimación del resto de Taylor para la aproximación de $\tan x$ por $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$.

168. **[T]** Grafique $e^x - e_4(x)$ donde $e_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ en $[0, 2]$. Compare el error máximo con la estimación del resto de Taylor.

169. (Aproximaciones de Taylor y cálculo de raíces). Recordemos que el método de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ aproxima las soluciones de $f(x) = 0$ cerca de la entrada x_0.

a. Si f y g son funciones inversas, explique por qué una solución de $g(x) = a$ es el valor $f(a)$ de f.
b. Supongamos que $p_N(x)$ es el polinomio de Maclaurin de $\text{ené}-\text{ésimo}$ orden de e^x. Utilice el método de Newton para aproximar las soluciones de $p_N(x) - 2 = 0$ para $N = 4, 5, 6$.
c. Explique por qué las raíces aproximadas de $p_N(x) - 2 = 0$ son valores aproximados de $\ln(2)$.

En los siguientes ejercicios, utilice el hecho de que si $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge en un intervalo que contiene c, entonces $\lim_{x\to c} q(x) = a_0$ para evaluar cada límite mediante la serie de Taylor.

170. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

171. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}$

172. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{x^4}$

173. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{2x}$

6.4 Trabajar con la serie de Taylor

Objetivos de aprendizaje

6.4.1 Escribir los términos de la serie binomial.
6.4.2 Reconocer las expansiones en serie de Taylor de las funciones comunes.
6.4.3 Reconocer y aplicar las técnicas para calcular la serie de Taylor de una función.
6.4.4 Utilizar las series de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales.
6.4.5 Utilizar las series de Taylor para evaluar integrales no elementales.

En la sección anterior, definimos las series de Taylor y mostramos cómo calcular las series de Taylor para varias funciones comunes calculando explícitamente los coeficientes de los polinomios de Taylor. En esta sección mostramos cómo utilizar esas series de Taylor para derivar series de Taylor para otras funciones. A continuación, presentamos dos aplicaciones comunes de las series de potencias. En primer lugar, mostramos cómo se pueden utilizar las series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales. En segundo lugar, mostramos cómo pueden utilizarse las series de

potencias para evaluar integrales cuando la antiderivada del integrando no puede expresarse en términos de funciones elementales. En un ejemplo, consideramos $\int e^{-x^2}\,dx$, una integral que surge con frecuencia en la teoría de la probabilidad.

La serie binomial

Nuestro primer objetivo en esta sección es determinar la serie de Maclaurin para la función $f(x) = (1+x)^r$ para todos los números reales r. La serie de Maclaurin para esta función se conoce como **serie binomial**. Empezamos considerando el caso más sencillo: r es un número entero no negativo. Recordemos que, para $r = 0, 1, 2, 3, 4,$ $f(x) = (1+x)^r$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^0 = 1, \\ f(x) &= (1+x)^1 = 1+x, \\ f(x) &= (1+x)^2 = 1+2x+x^2, \\ f(x) &= (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3, \\ f(x) &= (1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4. \end{aligned}$$

Las expresiones del lado derecho se conocen como expansiones binomiales y los coeficientes se conocen como coeficientes binomiales. De forma más general, para cualquier número entero no negativo r, el coeficiente binomial de x^n en la expansión binomial de $(1+x)^r$ está dada por

$$\binom{r}{n} = \frac{r!}{n!\,(r-n)!} \tag{6.6}$$

y

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^r \\ &= \binom{r}{0}1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots + \binom{r}{r-1}x^{r-1} + \binom{r}{r}x^r \\ &= \sum_{n=0}^{r}\binom{r}{n}x^n. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Por ejemplo, utilizando esta fórmula para $r = 5$, vemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^5 \\ &= \binom{5}{0}1 + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5 \\ &= \tfrac{5!}{0!5!}1 + \tfrac{5!}{1!4!}x + \tfrac{5!}{2!3!}x^2 + \tfrac{5!}{3!2!}x^3 + \tfrac{5!}{4!1!}x^4 + \tfrac{5!}{5!0!}x^5 \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso en que el exponente r es cualquier número real, no necesariamente un entero no negativo. Si r no es un número entero no negativo, entonces $f(x) = (1+x)^r$ no puede escribirse como un polinomio finito. Sin embargo, podemos calcular una serie de potencias para f. En concreto, buscamos la serie Maclaurin para f. Para ello, calculamos las derivadas de f y evalúelas en $x = 0$.

$$\begin{array}{lcllcl} f(x) &=& (1+x)^r & f(0) &=& 1 \\ f'(x) &=& r(1+x)^{r-1} & f'(0) &=& r \\ f''(x) &=& r(r-1)(1+x)^{r-2} & f''(0) &=& r(r-1) \\ f'''(x) &=& r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3} & f'''(0) &=& r(r-1)(r-2) \\ f^{(n)}(x) &=& r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} & f^{(n)}(0) &=& r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1) \end{array}$$

Concluimos que los coeficientes de la serie binomial están dados por

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}. \tag{6.8}$$

Observamos que si r es un número entero no negativo, entonces la derivada $(r+1)$ $f^{(r+1)}$ es la función cero, y la serie termina. Además, si r es un número entero no negativo, entonces la Ecuación 6.8 para los coeficientes coincide con la

Ecuación 6.6 para los coeficientes, y la fórmula de la serie binomial coincide con la Ecuación 6.7 para la expansión binomial finita. De forma más general, para denotar los coeficientes binomiales de cualquier número real r, definimos

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

Con esta notación, podemos escribir la serie binomial para $(1+x)^r$ como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots. \quad (6.9)$$

Ahora tenemos que determinar el intervalo de convergencia de la serie binomial de la Ecuación 6.9. Aplicamos el criterio del cociente. Por lo tanto, consideramos

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)||x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)||x|^n} \\ &= \frac{|r-n||x|}{|n+1|}. \end{aligned}$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| < 1$$

si y solo si $|x| < 1$, concluimos que el intervalo de convergencia para la serie binomial es $(-1, 1)$. El comportamiento en los puntos finales depende de r. Se puede demostrar que para $r \geq 0$ la serie converge en ambos puntos finales; para $-1 < r < 0$, la serie converge en $x = 1$ y diverge en $x = -1$; y para $r < -1$, la serie diverge en ambos puntos finales. La serie binomial sí converge a $(1+x)^r$ en $(-1, 1)$ para todos los números reales r, pero probar este hecho mostrando que el resto $R_n(x) \to 0$ es difícil.

Definición

Para cualquier número real r, la serie de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^r$ es la serie binomial. Converge a f para $|x| < 1$, y escribimos

$$\begin{aligned} (1+x)^r &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \\ &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots \end{aligned}$$

para $|x| < 1$.

Podemos utilizar esta definición para calcular la serie binomial de $f(x) = \sqrt{1+x}$ y utilizar la serie para aproximar $\sqrt{1{,}5}$.

EJEMPLO 6.17

Cálculo de series binomiales

a. Calcule la serie binomial para $f(x) = \sqrt{1+x}$.
b. Utilice el polinomio de Maclaurin de tercer orden $p_3(x)$ para estimar $\sqrt{1{,}5}$. Utilice el teorema de Taylor para acotar el error. Utilice una herramienta gráfica para comparar los gráficos de f y p_3.

Solución

a. Aquí $r = \frac{1}{2}$. Utilizando la definición de la serie binomial, obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{(1/2)(-1/2)}{2!}x^2+\tfrac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}x^3+\cdots\\ &= 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2!}\,\tfrac{1}{2^2}x^2+\tfrac{1}{3!}\,\tfrac{1.3}{2^3}x^3-\cdots+\tfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\,\tfrac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n}x^n+\cdots\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n}x^n.\end{aligned}$$

b. A partir del resultado de la parte a. el polinomio de Maclaurin de tercer orden es

$$p_3(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sqrt{1{,}5} &= \sqrt{1+0{,}5}\\ &\approx 1+\tfrac{1}{2}(0{,}5)-\tfrac{1}{8}(0{,}5)^2+\tfrac{1}{16}(0{,}5)^3\\ &\approx 1{,}2266.\end{aligned}$$

A partir del teorema de Taylor, el error satisface

$$R_3(0{,}5)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0{,}5)^4$$

para algunos c entre 0 y $0{,}5$. Dado que $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{2^4(1+x)^{7/2}}$, y el valor máximo de $\left|f^{(4)}(x)\right|$ en el intervalo $(0,0{,}5)$ se produce en $x=0$, tenemos

$$|R_3(0{,}5)|\le\frac{15}{4!2^4}(0{,}5)^4\approx 0{,}00244.$$

La función y el polinomio de Maclaurin p_3 se grafican en la Figura 6.10.

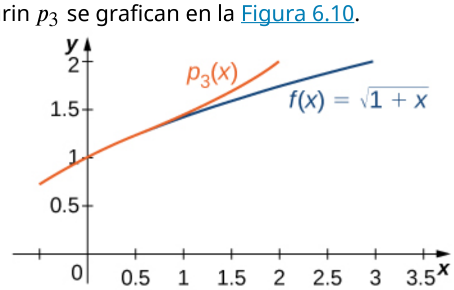


Figura 6.10 El polinomio de Maclaurin de tercer orden $p_3(x)$ proporciona una buena aproximación para $f(x)=\sqrt{1+x}$ para x cerca de cero.

6.16 Calcule la serie binomial para $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

Funciones comunes expresadas como series de Taylor

En este punto, hemos derivado las series de Maclaurin para funciones exponenciales, trigonométricas y logarítmicas, así como para funciones de la forma $f(x)=(1+x)^r$. En la Tabla 6.1, resumimos los resultados de estas series. Observamos que la convergencia de la serie de Maclaurin para $f(x)=\ln(1+x)$ en el punto final $x=1$ y la serie de Maclaurin para $f(x)=\tan^{-1}x$ en los puntos finales $x=1$ y $x=-1$ se basa en un teorema más avanzado que el que presentamos aquí. (Consulte el teorema de Abel para ver este punto más técnico).

Función	Serie de Maclaurin	Intervalo de convergencia
$f(x) = \frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$-1 < x < 1$
$f(x) = e^x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$-\infty < x < \infty$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$-\infty < x < \infty$
$f(x) = \cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$-\infty < x < \infty$
$f(x) = \ln(1+x)$ grandes.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$-1 < x \leq 1$
$f(x) = \tan^{-1} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$-1 \leq x \leq 1$
$f(x) = (1+x)^r$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$	$-1 < x < 1$

Tabla 6.1 Serie de Maclaurin para funciones comunes

Anteriormente en el capítulo, mostramos cómo se pueden combinar las series de potencias para crear nuevas series de potencias. Aquí utilizamos estas propiedades, combinadas con las series de Maclaurin en la Tabla 6.1, para crear series de Maclaurin para otras funciones.

EJEMPLO 6.18

Derivar series de Maclaurin a partir de una serie conocida

Calcule la serie de Maclaurin de cada una de las siguientes funciones utilizando una de las series que aparecen en la Tabla 6.1.

a. $f(x) = \cos\sqrt{x}$
b. $f(x) = \operatorname{senoh} x$

Solución

a. Utilizando la serie de Maclaurin para $\cos x$ calculamos que la serie de Maclaurin para $\cos\sqrt{x}$ está dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$
$$= 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \cdots.$$

Esta serie converge a $\cos\sqrt{x}$ para todos los valores x en el dominio de $\cos\sqrt{x}$; es decir, para todo $x \geq 0$.

b. Para calcular la serie de Maclaurin para $\operatorname{senoh} x$, utilizamos el hecho de que

$$\operatorname{senoh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Utilizando la serie de Maclaurin para e^x, vemos que el enésimo término de la serie de Maclaurin para $\operatorname{senoh} x$ está dado por

$$\frac{x^n}{n!} - \frac{(-x)^n}{n!}.$$

Para n par, este término es cero. Para n impar, este término es $\frac{2x^n}{n!}$. Por lo tanto, la serie de Maclaurin para $\operatorname{senoh} x$ solo tiene términos de orden impar y está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

6.17 Calcule la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}\left(x^2\right)$.

También mostramos anteriormente en este capítulo cómo las series de potencias pueden diferenciarse término a término para crear una nueva serie de potencias. En el Ejemplo 6.19, diferenciamos la serie binomial para $\sqrt{1+x}$ término a término para calcular la serie binomial para $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Observe que podríamos construir la serie binomial para $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ directamente de la definición, pero diferenciando la serie binomial para $\sqrt{1+x}$ es un cálculo más fácil.

EJEMPLO 6.19

Diferenciar una serie para calcular una nueva serie

Utilice la serie binomial para $\sqrt{1+x}$ para calcular la serie binomial para $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solución

Las dos funciones están relacionadas por

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

por lo que la serie binomial para $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ está dada por

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 2\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n} x^n.\end{aligned}$$

6.18 Calcule la serie binomial para $f(x) = \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$

En este ejemplo, diferenciamos una serie de Taylor conocida para construir una serie de Taylor para otra función. La capacidad de diferenciar las series de potencias término a término las convierte en una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales. A continuación mostramos cómo se logra esto.

Resolución de ecuaciones diferenciales con series de potencias

Considere la ecuación diferencial

$$y'(x) = y.$$

Recordemos que se trata de una ecuación separable de primer orden y su solución es $y = Ce^x$. Esta ecuación se resuelve fácilmente utilizando las técnicas discutidas anteriormente en el texto. Sin embargo, para la mayoría de las ecuaciones diferenciales aún no disponemos de herramientas analíticas para resolverlas. Las series de potencias son una herramienta extremadamente útil para resolver muchos tipos de ecuaciones diferenciales. En esta técnica, buscamos una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y determinar cuáles serían los coeficientes necesarios. En el siguiente ejemplo, consideramos un problema de valor inicial que implica $y' = y$ para ilustrar la técnica.

EJEMPLO 6.20

Solución en serie de potencias de una ecuación diferencial

Utilice la serie de potencias para resolver el problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Solución

Supongamos que existe una solución en serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots.$$

Diferenciando esta serie término a término, obtenemos

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots.$$

Si y satisface la ecuación diferencial, entonces

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_3 x^3 + \cdots.$$

Utilizando la Singularidad de las series de potencias sobre la singularidad de las representaciones en series de potencias, sabemos que estas series solo pueden ser iguales si sus coeficientes son iguales. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1, \\ c_1 &= 2c_2, \\ c_2 &= 3c_3, \\ c_3 &= 4c_4, \\ &\vdots. \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $y(0) = 3$ combinada con la representación en serie de potencias

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

hallamos que $c_0 = 3$. Ahora estamos preparados para resolver el resto de los coeficientes. Si utilizamos el hecho de que $c_0 = 3$, tenemos

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0 = 3 = \frac{3}{1!}, \\ c_2 &= \frac{c_1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2!}, \\ c_3 &= \frac{c_2}{3} = \frac{3}{3.2} = \frac{3}{3!}, \\ c_4 &= \frac{c_3}{4} = \frac{3}{4.3.2} = \frac{3}{4!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
y &= 3\left[1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right] \\
&= 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Puede que reconozca

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

como la serie de Taylor para e^x. Por lo tanto, la solución es $y = 3e^x$.

6.19 Utilice las series de potencias para resolver $y' = 2y, \quad y(0) = 5.$

Consideramos ahora un ejemplo que involucra una ecuación diferencial que no podemos resolver con los métodos discutidos previamente. Esta ecuación diferencial

$$y' - xy = 0$$

se conoce como la ecuación de Airy. Tiene muchas aplicaciones en física matemática, como el modelado de la difracción de la luz. Aquí mostramos cómo resolverla utilizando series de potencias.

EJEMPLO 6.21

Solución en series de potencias de la ecuación de Airy

Utilice las series de potencias para resolver

$$y'' - xy = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = a$ y $y'(0) = b$.

Solución

Buscamos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots.$$

Diferenciando esta función término a término, obtenemos

$$
\begin{aligned}
y' &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots, \\
y'' &= 2.1c_2 + 3.2c_3 x + 4.3c_4 x^2 + \cdots.
\end{aligned}
$$

Si y satisface la ecuación $y'' = xy$, entonces

$$2.1c_2 + 3.2c_3 x + 4.3c_4 x^2 + \cdots = x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\right).$$

Utilizando la Singularidad de las series de potencias sobre la singularidad de las representaciones en series de potencias, sabemos que los coeficientes del mismo orden deben ser iguales. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
2.1c_2 &= 0, \\
3.2c_3 &= c_0, \\
4.3c_4 &= c_1, \\
5.4c_5 &= c_2, \\
&\vdots.
\end{aligned}
$$

En general, para $n \geq 3$, tenemos $n.(n-1)c_n = c_{n-3}$. De hecho, todos los coeficientes se pueden escribir en términos de c_0 y c_1. Para ver esto, primero hay que tener en cuenta que $c_2 = 0$. Entonces

$$c_3 = \frac{c_0}{3.2},$$
$$c_4 = \frac{c_1}{4.3}.$$

Para c_5, c_6, c_7, vemos que

$$c_5 = \frac{c_2}{5.4} = 0,$$
$$c_6 = \frac{c_3}{6.5} = \frac{c_0}{6.5.3.2},$$
$$c_7 = \frac{c_4}{7.6} = \frac{c_1}{7.6.4.3}.$$

Por lo tanto, la solución en serie de la ecuación diferencial está dada por

$$y = c_0 + c_1 x + 0.\, x^2 + \frac{c_0}{3.\,2} x^3 + \frac{c_1}{4.\,3} x^4 + 0.\, x^5 + \frac{c_0}{6.\,5.\,3.\,2} x^6 + \frac{c_1}{7.\,6.\,4.\,3} x^7 + \cdots.$$

La condición inicial $y(0) = a$ implica $c_0 = a$. Diferenciando esta serie término a término y utilizando el hecho de que $y'(0) = b$, concluimos que $c_1 = b$. Por lo tanto, la solución de este problema de valor inicial es

$$y = a\left(1 + \frac{x^3}{3.\,2} + \frac{x^6}{6.\,5.\,3.\,2} + \cdots\right) + b\left(x + \frac{x^4}{4.\,3} + \frac{x^7}{7.\,6.\,4.\,3} + \cdots\right).$$

6.20 Utilice las series de potencias para resolver $y'' + x^2 y = 0$ con la condición inicial $y(0) = a$ y $y'(0) = b$.

Evaluación de integrales no elementales

La resolución de ecuaciones diferenciales es una aplicación común de las series de potencias. Pasamos ahora a una segunda aplicación. Mostramos cómo se pueden utilizar las series de potencias para evaluar integrales en las que intervienen funciones cuyas antiderivadas no se pueden expresar mediante funciones elementales.

Una integral que surge con frecuencia en las aplicaciones de la teoría de la probabilidad es $\int e^{-x^2} dx$.

Desafortunadamente, la antiderivada del integrando e^{-x^2} no es una función elemental. Por función elemental entendemos una función que puede escribirse mediante un número finito de combinaciones algebraicas o composiciones de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas o potencias. Observamos que el término "función elemental" no es sinónimo de función no complicada. Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} + e^{x^3} - \operatorname{sen}(5x + 4)$ es una función elemental, aunque no es una función que se vea muy sencilla. Cualquier integral de la forma $\int f(x)\, dx$ donde la antiderivada de f no se pueda escribir como una función elemental se considera una **integral no elemental**.

Las integrales no elementales no pueden evaluarse con las técnicas básicas de integración que se han comentado anteriormente. Una forma de evaluar estas integrales es expresando el integrando como una serie de potencias e integrando término a término. Demostramos esta técnica considerando $\int e^{-x^2} dx$.

EJEMPLO 6.22

Uso de las series de Taylor para evaluar una integral definida

a. Exprese $\int e^{-x^2} dx$ como una serie infinita.

b. Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error de $0{,}01$.

Solución

a. La serie de Maclaurin para e^{-x^2} está dada por

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} dx &= \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \right) dx \\ &= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots. \end{aligned}$$

b. Utilizando el resultado de la parte a. tenemos

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots.$$

La suma de los cuatro primeros términos es aproximadamente $0{,}74$. Mediante la prueba de series alternadas, esta estimación es precisa con un error inferior a $\frac{1}{216} \approx 0{,}0046296 < 0{,}01$.

6.21 Exprese $\int \cos\sqrt{x} dx$ como una serie infinita. Evalúe $\int_0^1 \cos\sqrt{x} dx$ con un error de $0{,}01$.

Como se ha mencionado anteriormente, la integral $\int e^{-x^2} dx$ surge a menudo en la teoría de la probabilidad. En concreto, se utiliza cuando se estudian conjuntos de datos que se distribuyen normalmente, lo que significa que los valores de los datos se encuentran bajo una curva en forma de campana. Por ejemplo, si un conjunto de valores de datos se distribuye normalmente con la media μ y desviación típica σ, entonces la probabilidad de que un valor elegido al azar se encuentre entre $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} dx. \tag{6.10}$$

(Vea la Figura 6.11).

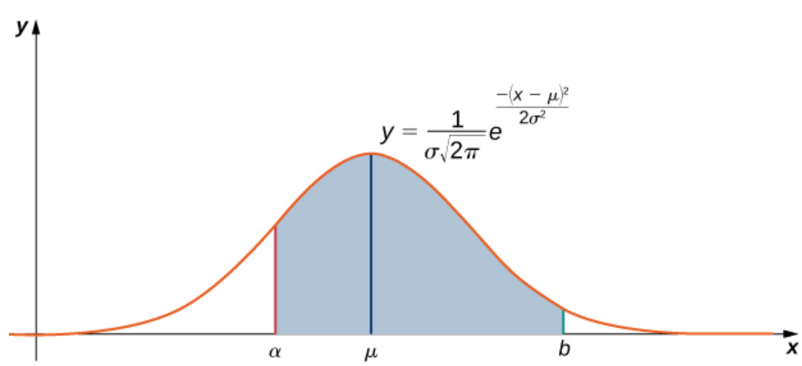


Figura 6.11 Si los valores de los datos se distribuyen normalmente con la media μ y desviación típica σ, la probabilidad de que un valor de datos seleccionado al azar esté entre a y b es el área bajo la curva $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)}$ entre $x = a$ y $x = b$.

Para simplificar esta integral, por lo general suponemos que $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Esta cantidad z se conoce como la puntuación z de un valor de datos. Con esta simplificación, la integral de la Ecuación 6.10 se convierte en

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-z^2/2} dz. \tag{6.11}$$

En el Ejemplo 6.23, mostramos cómo podemos utilizar esta integral en el cálculo de probabilidades.

EJEMPLO 6.23

Uso de las series de Maclaurin para aproximar una probabilidad

Supongamos que un conjunto de puntuaciones de pruebas estandarizadas se distribuye normalmente con la media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 50$. Utilice la Ecuación 6.11 y los seis primeros términos de la serie de Maclaurin para $e^{-x^2/2}$ para aproximar la probabilidad de que la puntuación de una prueba seleccionada al azar esté entre $x = 100$ y $x = 200$. Utilice la prueba de las series alternadas para determinar la precisión de su aproximación.

Solución

Dado que $\mu = 100, \sigma = 50$, y estamos tratando de determinar el área bajo la curva de $a = 100$ a $b = 200$, la integral de la Ecuación 6.11 se convierte en

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-z^2/2} dz.$$

La serie de Maclaurin para $e^{-x^2/2}$ está dada por

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^1.1!} + \frac{x^4}{2^2.2!} - \frac{x^6}{2^3.3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n.n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n.\,n!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-z^2/2} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(1 - \frac{z^2}{2^1.\,1!} + \frac{z^4}{2^2.\,2!} - \frac{z^6}{2^3.\,3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^n.\,n!} + \cdots\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(C + z - \frac{z^3}{3.2^1.1!} + \frac{z^5}{5.2^2.2!} - \frac{z^7}{7.2^3.3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)2^n.n!} + \cdots\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-z^2/2} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{40} - \frac{128}{336} + \frac{512}{3456} - \frac{2^{11}}{11.2^5.5!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Utilizando los cinco primeros términos, estimamos que la probabilidad es aproximadamente $0{,}4922$. Mediante la prueba de las series alternadas, vemos que esta estimación es exacta con una precisión de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{13}}{13.\,2^6.\,6!} \approx 0{,}00546.$$

Análisis

Si está familiarizado con la teoría de la probabilidad, sabrá que la probabilidad de que un valor de los datos se encuentre dentro de dos desviaciones típicas de la media es aproximadamente $95\ \%$. Aquí calculamos la probabilidad de que un valor de los datos se encuentre entre la media y dos desviaciones típicas por encima de la media, por lo que la estimación debería estar en torno a $47{,}5\ \%$. La estimación, combinada con el límite de la exactitud, se encuentra dentro de este rango.

6.22 Utilice los cinco primeros términos de la serie de Maclaurin para $e^{-x^2/2}$ para estimar la probabilidad de que la puntuación de una prueba seleccionada al azar esté entre 100 y 150. Utilice la prueba de series

alternadas para determinar la exactitud de esta estimación.

Otra aplicación en la que surge una integral no elemental es el periodo de un péndulo. La integral es

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$$

Una integral de esta forma se conoce como integral elíptica de primer tipo. Las integrales elípticas surgieron originalmente cuando se intentaba calcular la longitud de arco de una elipse. Ahora mostramos cómo utilizar las series de potencias para aproximar esta integral.

EJEMPLO 6.24

Periodo de un péndulo

El periodo de un péndulo es el tiempo que tarda un péndulo en realizar una oscilación completa de ida y vuelta. Para un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo $\theta_{\max}$ con la vertical, su periodo T está dada por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

donde g es la aceleración debido a la gravedad y $k = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx.}}}{2}\right)$ (vea la Figura 6.12). (Observamos que esta fórmula para el periodo surge de un modelo no linealizado de un péndulo. En algunos casos, para simplificar, se utiliza un modelo linealizado y $\operatorname{sen}\theta$ se aproxima por θ.) Utilice la serie binomial

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n} x^n$$

para estimar el periodo de este péndulo. Específicamente, aproxime el periodo del péndulo si

a. se utiliza solo el primer término de la serie binomial, y
b. se utilizan los dos primeros términos de la serie binomial

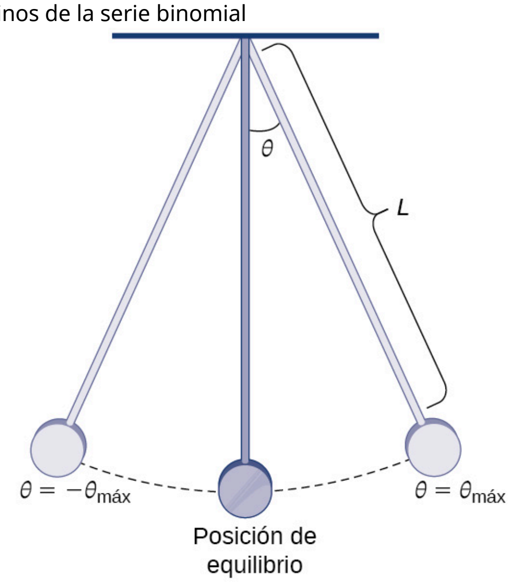


Figura 6.12 Este péndulo tiene una longitud L y forma un ángulo máximo $\theta_{\max}$ con la vertical.

Solución

Utilizamos la serie binomial, sustituyendo x con $-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta$. Entonces podemos escribir el periodo como

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1.3}{2!2^2} k^4 \operatorname{sen}^4 \theta + \cdots\right) d\theta.$$

a. Utilizando solo el primer término del integrando, la estimación de primer orden es

$$T \approx 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} d\theta = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Si $\theta_{\max}$ es pequeño, entonces $k = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx.}}}{2}\right)$ es pequeño. Afirmamos que cuando k es pequeño, es una buena estimación. Para justificar esta afirmación, considere

$$\int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1.3}{2!2^2}k^4 \operatorname{sen}^4\theta + \cdots\right) d\theta.$$

Dado que $|\operatorname{sen} x| \le 1$, esta integral está delimitada por

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1.3}{2!2^2}k^4 + \cdots\right) d\theta < \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1.3}{2!2^2}k^4 + \cdots\right).$$

Además, se puede demostrar que cada coeficiente del lado derecho es menor que 1 y, por tanto, que esta expresión está delimitada por

$$\frac{\pi k^2}{2}\left(1 + k^2 + k^4 + \cdots\right) = \frac{\pi k^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - k^2},$$

que es pequeño para k pequeño.

b. Para valores mayores de $\theta_{\max}$, podemos aproximar T utilizando más términos en el integrando. Utilizando los dos primeros términos de la integral, llegamos a la estimación

$$\begin{aligned} T &\approx 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Las aplicaciones de las series de Taylor en esta sección pretenden destacar su importancia. En general, las series de Taylor son útiles porque nos permiten representar funciones conocidas mediante polinomios, proporcionándonos así una herramienta para aproximar valores de funciones y estimar integrales complicadas. Además, nos permiten definir nuevas funciones como series de potencias, lo que nos proporciona una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales.

SECCIÓN 6.4 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, utilice las sustituciones adecuadas para escribir la serie de Maclaurin para el binomio dado.

174. $(1 - x)^{1/3}$

175. $\left(1 + x^2\right)^{-1/3}$

176. $(1 - x)^{1{,}01}$

177. $(1 - 2x)^{2/3}$

En los siguientes ejercicios, utilice la sustitución $(b + x)^r = (b + a)^r\left(1 + \frac{x-a}{b+a}\right)^r$ en la expansión binomial para calcular la serie de Taylor de cada función con el centro dado.

178. $\sqrt{x + 2}$ en $a = 0$

179. $\sqrt{x^2 + 2}$ en $a = 0$

180. $\sqrt{x + 2}$ en $a = 1$

181. $\sqrt{2x - x^2}$ en $a = 1$ (*Pista:* $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$) grandes.

182. $(x - 8)^{1/3}$ en $a = 9$

183. $\sqrt{x}$ en $a = 4$

184. $x^{1/3}$ en $a = 27$

185. $\sqrt{x}$ en $x = 9$

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema del binomio para estimar cada número, calculando suficientes términos para obtener una estimación precisa con un error de como máximo $1/1.000$ dólares.

186. **[T]** $(15)^{1/4}$ utilizando $(16 - x)^{1/4}$

187. **[T]** $(1001)^{1/3}$ utilizando $(1.000 + x)^{1/3}$

En los siguientes ejercicios, utilice la aproximación binomial $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \frac{7x^5}{256}$ *para* $|x| < 1$ *para aproximar cada número. Compare este valor con el valor dado por una calculadora científica.*

188. **[T]** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ utilizando $x = \frac{1}{2}$ en $(1 - x)^{1/2}$

189. **[T]** $\sqrt{5} = 5 \times \frac{1}{\sqrt{5}}$ utilizando $x = \frac{4}{5}$ en $(1 - x)^{1/2}$

190. **[T]** $\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ utilizando $x = \frac{2}{3}$ en $(1 - x)^{1/2}$

191. **[T]** $\sqrt{6}$ utilizando $x = \frac{5}{6}$ en $(1 - x)^{1/2}$

192. Integre la aproximación binomial de $\sqrt{1 - x}$ para calcular una aproximación de $\int_0^x \sqrt{1 - t}dt.$

193. **[T]** Recordemos que el gráfico de $\sqrt{1 - x^2}$ es un semicírculo superior de radio 1. Integre la aproximación binomial de $\sqrt{1 - x^2}$ al orden 8 de $x = -1$ a $x = 1$ para estimar $\frac{\pi}{2}$.

En los siguientes ejercicios, utilice la expansión $(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \cdots$ *para escribir los cinco primeros términos (no necesariamente un polinomio cuaternario) de cada expresión.*

194. $(1 + 4x)^{1/3}; a = 0$

195. $(1 + 4x)^{4/3}; a = 0$

196. $(3 + 2x)^{1/3}; a = -1$

197. $\left(x^2 + 6x + 10\right)^{1/3}; a = -3$

198. Utilice $(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \cdots$ con $x = 1$ para aproximar a $2^{1/3}$.

199. Utilice la aproximación $(1 - x)^{2/3} = 1 - \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{4x^3}{81} - \frac{7x^4}{243} - \frac{14x^5}{729} + \cdots$ para $|x| < 1$ para aproximar a $2^{1/3} = 2{,}2^{-2/3}$.

200. Calcule la $25-$ésima derivada de $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{13}$ en $x = 0$.

201. Calcule la 99–ésima derivada de $f(x) = \left(1 + x^4\right)^{25}$.

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Maclaurin de cada función.

202. $f(x) = xe^{2x}$

203. $f(x) = 2^x$

204. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

205. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}, \quad (x > 0),$

206. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$ grandes.

207. $f(x) = e^{x^3}$

208. $f(x) = \cos^2 x$ utilizando la identidad $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ grandes.

209. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Maclaurin de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ integrando la serie de Maclaurin de f término a término. Si f no está estrictamente definida en cero, puede sustituir el valor de la serie de Maclaurin en cero.

210. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt;\ f(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$

211. $F(x) = \tan^{-1} x;\quad f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$

212. $F(x) = \tanh^{-1} x;\quad f(t) = \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}$

213. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1} x;\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{t^{2k}}{k!}$

214. $F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt;\quad f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$

215. $F(x) = \int_0^x \cos\left(\sqrt{t}\right)\,dt;\quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$

216. $F(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt;\quad f(t) = \frac{1-\cos t}{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+2)!}$

217. $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt;\quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1}$

En los siguientes ejercicios, calcule al menos los tres primeros términos distintos de cero (no necesariamente un polinomio cuadrático) de la serie de Maclaurin de f.

218. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ grandes.

219. $f(x) = \tan x$

220. $f(x) = \ln(\cos x)$ grandes.

221. $f(x) = e^x \cos x$

222. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

223. $f(x) = \sec^2 x$

224. $f(x) = \tanh x$

225. $f(x) = \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (vea la expansión para $\tan x$)

En los siguientes ejercicios, halle el radio de convergencia de la serie de Maclaurin de cada función.

226. $\ln(1 + x)$ grandes.

227. $\frac{1}{1+x^2}$

228. $\tan^{-1} x$

229. $\ln\left(1 + x^2\right)$ grandes.

230. Calcule la serie de Maclaurin de $\operatorname{senoh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

231. Calcule la serie de Maclaurin de $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

232. Diferencie término a término la serie de Maclaurin de $\operatorname{senoh} x$ y compare el resultado con la serie de Maclaurin de $\cosh x$.

233. **[T]** Supongamos que $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ y $C_n(x) = \sum_{n=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ denotan los respectivos polinomios de Maclaurin de orden $2n + 1$ de $\operatorname{sen} x$ y orden $2n$ de $\cos x$. Grafique los errores $\frac{S_n(x)}{C_n(x)} - \tan x$ para $n = 1, .., 5$ y compárelos con $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} - \tan x$ en $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

234. Utilice la identidad $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$ para calcular la expansión en serie de la potencia de $\operatorname{sen}^2 x$ en $x = 0$. (*Pista:* Integre la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}(2x)$ término a término).

235. Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcule las expansiones en serie de potencias de xy' y $x^2 y''$.

236. **[T]** Supongamos que $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ satisface $y' = -2xy$ y $y(0) = 0$. Demuestre que $a_{2k+1} = 0$ para todo k y que $a_{2k+2} = \frac{-a_{2k}}{k+1}$. Grafique la suma parcial S_{20} de y en el intervalo $[-4, 4]$.

237. **[T]** Supongamos que un conjunto de puntuaciones de pruebas estandarizadas se distribuye normalmente con la media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 10$. Determine una integral que represente la probabilidad de que la puntuación de un examen esté entre 90 y 110 y utilice la integral del orden 10 Polinomio de Maclaurin de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ para estimar esta probabilidad.

238. **[T]** Supongamos que un conjunto de puntuaciones de pruebas estandarizadas se distribuye normalmente con la media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 10$. Determine una integral que represente la probabilidad de que la puntuación de un examen esté entre 70 y 130 y utilice la integral del orden 50 Polinomio de Maclaurin de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ para estimar esta probabilidad.

239. **[T]** Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a una función $f(x)$ tal que $f(0) = 1, f'(0) = 0$, y $f''(x) = -f(x)$. Halle una fórmula para a_n y grafique la suma parcial S_N para $N = 20$ en $[-5, 5]$.

240. **[T]** Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a una función $f(x)$ tal que $f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$, y $f''(x) = -f(x)$. Halle una fórmula para a_n y grafique la suma parcial S_N para $N = 10$ en $[-5, 5]$.

241. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a una función y tal que $y'' - y' + y = 0$ donde $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Halle una fórmula que relacione a_{n+2}, a_{n+1}, y a_n y calcule $a_0, ..., a_5$.

242. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge a una función y tal que $y'' - y' + y = 0$ donde $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$. Halle una fórmula que relacione a_{n+2}, a_{n+1}, y a_n y calcule $a_1, ..., a_5$.

El error de aproximación de la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ por la de una aproximación de Taylor $\int_a^b P_n(t)\,dt$ es como máximo $\int_a^b R_n(t)\,dt$. En los siguientes ejercicios, la estimación del resto de Taylor $R_n \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ garantiza que la integral del polinomio de Taylor del orden dado se aproxima a la integral de f con un error inferior a $\frac{1}{10}$.

a. Evalúe la integral del polinomio de Taylor correspondiente y verifique que se aproxima al valor del CAS con un error inferior a $\frac{1}{100}$.
b. Compare la exactitud de la estimación de la integral polinómica con la estimación del resto.

243. **[T]** $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt; P_s = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}$ (Puede suponer que el valor absoluto de la novena derivada de $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ está delimitada por $0{,}1.$)

244. **[T]** $\int_0^2 e^{-x^2}dx; p_{11} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \cdots - \frac{x^{22}}{11!}$ (Puede suponer que el valor absoluto de la $23.º$ derivada de e^{-x^2} es menor que $2 \times 10^{14}.$)

Los siguientes ejercicios tratan con las integrales de Fresnel.

245. Las integrales de Fresnel están definidas por $C(x) = \int_0^x \cos\left(t^2\right)\, dt$ y $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt.$ Calcule la serie de potencias de $C(x)$ y $S(x)$ y grafique las sumas $C_N(x)$ y $S_N(x)$ de los primeros $N = 50$ términos distintos de cero en $[0, 2\pi]$.

246. **[T]** Las integrales de Fresnel se utilizan en aplicaciones de diseño de carreteras y ferrocarriles y otras aplicaciones debido a las propiedades de curvatura de la curva con coordenadas $(C(t), S(t))$. Grafique la curva (C_{50}, S_{50}) para $0 \le t \le 2\pi$, cuyas coordenadas se calcularon en el ejercicio anterior.

247. Estime $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\, dx$ aproximando $\sqrt{1-x}$ utilizando la aproximación binomial $1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{2128} - \frac{7x^5}{256}.$

248. **[T]** Utilice la aproximación de Newton del binomio $\sqrt{1-x^2}$ para aproximar a π de la siguiente forma. El círculo centrado en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ con radio $\frac{1}{2}$ tiene un semicírculo superior $y = \sqrt{x}\sqrt{1-x}$. El sector de este círculo delimitado por el eje x entre $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$ y por la línea que une $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ corresponde a $\frac{1}{6}$ del círculo y tiene área $\frac{\pi}{24}$. Este sector es la unión de un triángulo rectángulo con altura $\frac{\sqrt{3}}{4}$ y base $\frac{1}{4}$ y la región por debajo del gráfico entre $x = 0$ y $x = \frac{1}{4}$. Para hallar el área de esta región se puede escribir $y = \sqrt{x}\sqrt{1-x} = \sqrt{x} \times \left(\text{expansión binomial de} \sqrt{1-x}\right)$ e integrar término a término. Utilice este enfoque con la aproximación binomial del ejercicio anterior para estimar π.

249. Utilice la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$ para aproximar el periodo de un péndulo que tiene una longitud de 10 metros y un ángulo máximo de $\theta_{\max} = \frac{\pi}{6}$ donde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx.}}}{2}\right)$. Compare esto con la estimación del ángulo pequeño $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

250. Supongamos que un péndulo debe tener un periodo de 2 segundos y un ángulo máximo de $\theta_{\max} = \frac{\pi}{6}$. Utilice $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$ para aproximar la longitud deseada del péndulo. ¿Qué longitud se predice con la estimación del ángulo pequeño $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$?

251. Evalúe $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$ en la aproximación
$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{3}{8}k^4\operatorname{sen}^4\theta + \cdots\right) d\theta$$
para obtener una estimación mejorada de T.

252. **[T]** Una fórmula equivalente para el periodo de un péndulo con amplitud $\theta_{\max}$ es

$$T\left(\theta_{\max}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{0}^{\theta_{\max}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\left(\theta_{\max}\right)}}$$

donde L es la longitud del péndulo y g es la constante de aceleración gravitatoria. Cuando $\theta_{\max}=\frac{\pi}{3}$ obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{\cos t-1/2}}\approx\sqrt{2}\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{3}+\frac{181t^6}{720}\right).$$

Integre esta aproximación para estimar $T\left(\frac{\pi}{3}\right)$ en términos de L y g. Suponiendo que $g=9{,}806$ metros por segundo al cuadrado, halle una longitud aproximada L tal que $T\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$ segundos.

Revisión del capítulo

Términos clave

diferenciación término a término de una serie de potencias técnica para evaluar la derivada de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ evaluando la derivada de cada término por separado para crear la nueva serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1}$

integración término a término de una serie de potencias técnica para integrar una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ integrando cada término por separado para crear la nueva serie de potencias $C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

integral no elemental integral para la que la antiderivada del integrando no puede expresarse como una función elemental

intervalo de convergencia conjunto de números reales *x* para los que converge una serie de potencias

Polinomio de Maclaurin un polinomio de Taylor centrado en 0; el *enésimo* polinomio de Taylor para f en 0 es el *enésimo* polinomio de Maclaurin para f

polinomios de Taylor el *enésimo* polinomio de Taylor para f en $x = a$ es $p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

radio de convergencia si existe un número real $R > 0$ tal que una serie de potencias centrada en $x = a$ converge para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$, entonces *R* es el radio de convergencia; si la serie de potencias solo converge en $x = a$, el radio de convergencia es $R = 0$; si la serie de potencias converge para todos los números reales *x*, el radio de convergencia es $R = \infty$

serie binomial la serie de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^r$; está dada por $(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ para $|x| < 1$

serie de Maclaurin una serie de Taylor para una función f en $x = 0$ se conoce como serie de Maclaurin para f

serie de potencias una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias centrada en $x = 0$; una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es una serie de potencias centrada en $x = a$

serie de Taylor una serie de potencias en *a* que converge a una función f en algún intervalo abierto que contenga *a*

teorema de Taylor con resto para una función f y el *enésimo* polinomio de Taylor para f en $x = a$, el resto $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ satisface $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún *c* entre *x* y *a*; si existe un intervalo I que contiene *a* y un número real *M* tal que $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para todo *x* en *I*, entonces $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$

Ecuaciones clave

Serie de potencias centrada en $x = 0$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$

Serie de potencias centrada en $x = a$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$
La serie de Taylor para la función f en el punto $x = a$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$

Conceptos clave

6.1 Series y funciones de potencia

- Para una serie de potencias centrada en $x = a$, se cumple una de las tres propiedades siguientes:
  i. La serie de potencias solo converge en $x = a$. En este caso, decimos que el radio de convergencia es $R = 0$.
  ii. La serie de potencias converge para todos los números reales *x*. En este caso, decimos que el radio de convergencia es $R = \infty$.
  iii. Existe un número real *R* tal que la serie converge para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$. En este caso, el radio de convergencia es *R*.
- Si una serie de potencias converge en un intervalo finito, la serie puede converger o no en los puntos finales.
- El criterio del cociente puede utilizarse a menudo para determinar el radio de convergencia.
- La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ nos permite representar ciertas funciones mediante series geométricas.

6.2 Propiedades de las series de potencia

- Dadas dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ que convergen a las funciones *f* y *g* en un intervalo común *I*, la suma y la diferencia de las dos series convergen a $f \pm g$, respectivamente, en *I*. Además, para cualquier número real *b* y entero $m \geq 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} bx^m c_n x^n$ converge a $bx^m f(x)$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(bx^m\right)^n$ converge a $f\left(bx^m\right)$ siempre que bx^m esté en el intervalo *I*.
- Dadas dos series de potencias que convergen en un intervalo $(-R, R)$, el producto de Cauchy de las dos series de potencias converge en el intervalo $(-R, R)$.
- Dada una serie de potencias que converge a una función *f* en un intervalo $(-R, R)$, la serie se puede diferenciar término a término y la serie resultante converge a f' en $(-R, R)$. La serie también se puede integrar término a término y la serie resultante converge a $\int f(x)\,dx$ en $(-R, R)$.

6.3 Series de Taylor y Maclaurin

- Los polinomios de Taylor se utilizan para aproximar funciones cercanas a un valor $x = a$. Los polinomios de Maclaurin son polinomios de Taylor en $x = 0$.
- Los polinomios de Taylor de *enésimo* orden para una función f son las sumas parciales de las series de Taylor para f.
- Si una función f tiene una representación en serie de potencias en $x = a$, entonces está dada por su serie de Taylor en $x = a$.
- Una serie de Taylor para f converge a f si y solo si $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ donde $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$.
- La serie de Taylor, para e^x, $\operatorname{sen} x$, y $\cos x$ a las funciones respectivas para todo *x* real.

6.4 Trabajar con la serie de Taylor

- La serie binomial es la serie de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^r$. Converge para $|x| < 1$.
- Las series de Taylor para las funciones pueden derivarse a menudo mediante operaciones algebraicas con una serie de Taylor conocida o diferenciando o integrando una serie de Taylor conocida.
- Las series de potencias pueden utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales.
- Las series de Taylor pueden utilizarse para ayudar a aproximar integrales que no pueden evaluarse por otros medios.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? En los siguientes ejercicios, justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

253. Si el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es 5, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ también es 5.

254. Las series de potencias pueden utilizarse para demostrar que la derivada de e^x es e^x. (*Pista:* Recordemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.)

255. Para valores pequeños de x, $\operatorname{sen} x \approx x$.

256. El radio de convergencia de la serie de Maclaurin de $f(x) = 3^x$ es 3.

En los siguientes ejercicios, halle el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las series dadas.

257. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x-1)^n$

258. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

259. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3nx^n}{12^n}$

260. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^n} (x-e)^n$

En los siguientes ejercicios, halle la representación en serie de potencias para la función dada. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de esa serie.

261. $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

262. $f(x) = \frac{8x+2}{2x^2-3x+1}$

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de potencias de la función dada utilizando la diferenciación término a término o la integración.

263. $f(x) = \tan^{-1}(2x)$

264. $f(x) = \frac{x}{\left(2+x^2\right)^2}$

En los siguientes ejercicios, evalúe la expansión en serie de Taylor de orden cuatro para la función dada en el punto especificado. ¿Cuál es el error de la aproximación?

265. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4, a = -3$

266. $f(x) = e^{1/(4x)}, a = 4$

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Maclaurin para la función dada.

267. $f(x) = \cos(3x)$ grandes.

268. $f(x) = \ln(x+1)$

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Taylor en el valor dado.

269. $f(x) = \operatorname{sen} x, a = \frac{\pi}{2}$

270. $f(x) = \frac{3}{x}, a = 1$

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Maclaurin para la función dada.

271. $f(x) = e^{-x^2} - 1$

272. $f(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$

En los siguientes ejercicios, calcule la serie de Maclaurin para $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ integrando la serie de Maclaurin de $f(x)$ término por término.

273. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

274. $f(x) = 1 - e^x$

275. Utilice las series de potencias para demostrar la fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

En los siguientes ejercicios se consideran los problemas de los pagos de las anualidades.

276. Para las anualidades con un valor actual de $\$1$ millón de dólares, calcule los pagos anuales que se entregan durante 25 años asumiendo tasas de interés de $1\ \%, 5\ \%,\ \text{y}\ 10\ \%.$

277. Un ganador de la lotería tiene una renta vitalicia con un valor actual de $\$10$ millones. ¿Qué tipo de interés necesitarían para vivir con pagos anuales perpetuos de $\$250.000$?

278. Calcule el valor actual necesario de una renta vitalicia para respaldar pagos anuales de $\$15.000$ que se entregan durante 25 años asumiendo tasas de interés de $1\ \%, 5\ \%,\ \text{y}\ 10\ \%.$

7 ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES



Figura 7.1 El Nautilus pompilius es un animal marino que vive en el océano Pacífico tropical. Los científicos creen que han existido en su mayor parte sin cambios durante unos 500 millones de años (créditos: modificación del trabajo de Jitze Couperus, Flickr).

Esquema del capítulo

Introducción

El Nautilus pompilius es una criatura fascinante. Este animal se alimenta de cangrejos ermitaños, peces y otros crustáceos. Tiene un caparazón duro con muchas cámaras conectadas en forma de espiral y puede retraerse en su caparazón para evitar a los depredadores. Cuando se corta una parte de la concha, queda al descubierto una espiral perfecta, con cámaras en su interior que se asemejan a los anillos de crecimiento de un árbol.

La función matemática que describe una espiral puede expresarse utilizando coordenadas rectangulares (o cartesianas). Sin embargo, si cambiamos nuestro sistema de coordenadas a algo que funcione un poco mejor con los patrones circulares, la función se vuelve mucho más sencilla de describir. El sistema de coordenadas polares es muy adecuado para describir este tipo de curvas. ¿Cómo podemos utilizar este sistema de coordenadas para describir espirales y otras figuras radiales? (Vea el Ejemplo 7.14).

En este capítulo también estudiamos las ecuaciones paramétricas, que nos dan una forma conveniente de describir curvas, o de estudiar la posición de una partícula u objeto en dos dimensiones en función del tiempo. Utilizaremos ecuaciones paramétricas y coordenadas polares para describir muchos temas más adelante en este texto.

7.1 Ecuaciones paramétricas

Objetivos de aprendizaje

7.1.1 Graficar una curva descrita por ecuaciones paramétricas.
7.1.2 Convertir las ecuaciones paramétricas de una curva en la forma $y = f(x)$.
7.1.3 Reconocer las ecuaciones paramétricas de las curvas básicas, como una línea y un círculo.
7.1.4 Reconocer las ecuaciones paramétricas de una cicloide.

En esta sección examinamos las ecuaciones paramétricas y sus gráficos. En el sistema de coordenadas bidimensional, las ecuaciones paramétricas son útiles para describir curvas que no son necesariamente funciones. El parámetro es una variable independiente de la que dependen tanto *x* como *y*, y a medida que el parámetro aumenta, los valores de *x* y *y* trazan una trayectoria a lo largo de una curva plana. Por ejemplo, si el parámetro es *t* (una elección común), entonces *t* podría representar el tiempo. Entonces *x* y *y* se definen como funciones del tiempo, y $(x(t), y(t))$ puede describir la posición en el plano de un objeto determinado mientras se mueve a lo largo de una trayectoria curva.

Ecuaciones paramétricas y sus gráficos

Consideremos la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Nuestro año dura aproximadamente 365,25 días, pero para esta discusión utilizaremos 365 días. El 1 de enero de cada año, la ubicación física de la Tierra con respecto al Sol es prácticamente la misma, excepto en los años bisiestos, en los que el desfase introducido por el $\frac{1}{4}$ día de tiempo orbital se incorpora en el calendario. Llamamos al 1 de enero "día 1" del año. Entonces, por ejemplo, el día 31 es el 31 de enero, el día 59 es el 28 de febrero, y así sucesivamente.

El número del día en un año puede considerarse una variable que determina la posición de la Tierra en su órbita. A medida que la Tierra gira alrededor del Sol, su ubicación física cambia con respecto a este. Después de un año completo, volvemos al punto de partida y comienza un nuevo año. Según las leyes del movimiento planetario de Kepler, la forma de la órbita es elíptica, con el Sol en un foco de la elipse. Estudiamos esta idea con más detalle en Secciones cónicas.

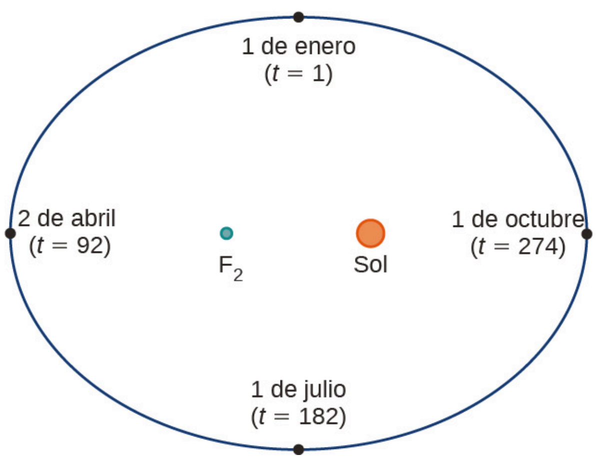


Figura 7.2 La órbita de la Tierra alrededor del Sol en un año.

La Figura 7.2 representa la órbita de la Tierra alrededor del Sol durante un año. El punto marcado como F_2 es uno de los

focos de la elipse; el otro foco lo ocupa el Sol. Si superponemos los ejes de coordenadas sobre este gráfico, podemos asignar pares ordenados a cada punto de la elipse (Figura 7.3). Entonces cada valor de *x* en el gráfico es un valor de posición en función del tiempo, y cada valor de *y* es también un valor de posición en función del tiempo. Por lo tanto, cada punto del gráfico corresponde a un valor de la posición de la Tierra en función del tiempo.

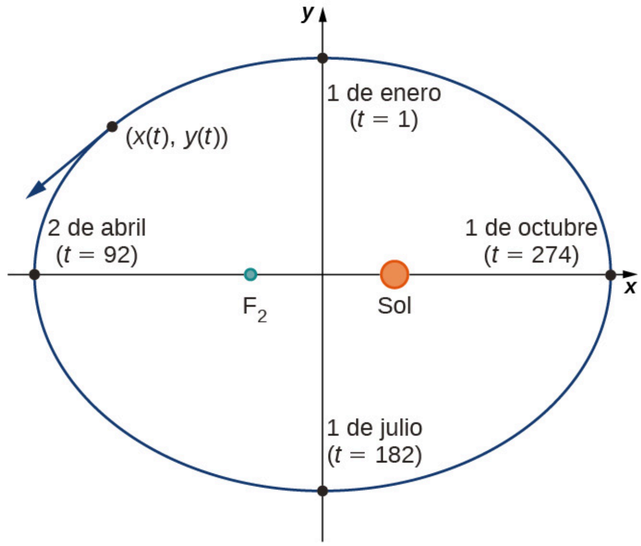


Figura 7.3 Ejes de coordenadas superpuestos a la órbita de la Tierra.

Podemos determinar las funciones para $x(t)$ y de $y(t)$, parametrizando así la órbita de la Tierra alrededor del Sol. La variable t se denomina parámetro independiente y, en este contexto, representa el tiempo relativo al comienzo de cada año.

Una curva en el plano (x, y) se puede representar con ecuaciones paramétricas. Las ecuaciones que se utilizan para definir la curva se denominan **ecuaciones paramétricas**.

Definición

Si *x* y *y* son funciones continuas de *t* en un intervalo *I*, entonces las ecuaciones

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t)$$

se llaman ecuaciones paramétricas y *t* se llama **parámetro**. El conjunto de puntos (x, y) que se obtienen al variar *t* sobre el intervalo *I* se denomina gráfico de las ecuaciones paramétricas. El gráfico de las ecuaciones paramétricas se llama **curva paramétrica** o *curva plana*, y se indica como *C*.

Observe en esta definición que *x* y *y* se utilizan de dos maneras. La primera es como funciones de la variable independiente *t*. Cuando se varía *t* en el intervalo *I*, las funciones $x(t)$ y de $y(t)$ generan un conjunto de pares ordenados (x, y). Este conjunto de pares ordenados genera el gráfico de las ecuaciones paramétricas. En este segundo uso, para designar los pares ordenados, *x* y *y* son variables. Es importante distinguir las variables *x* y *y* de las funciones $x(t)$ y de $y(t)$.

EJEMPLO 7.1

Graficar una curva definida con ecuaciones paramétricas

Dibuje las curvas descritas por las siguientes ecuaciones paramétricas:

a. $x(t) = t - 1, \quad y(t) = 2t + 4, \quad -3 \le t \le 2$
b. $x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t + 1, \quad -2 \le t \le 3$
c. $x(t) = 4\cos t, \quad y(t) = 4\,\text{sen}\, t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Solución

a. Para crear un gráfico de esta curva, primero hay que crear una tabla de valores. Dado que la variable independiente en ambos $x(t)$ y de $y(t)$ es *t*, supongamos que *t* aparece en la primera columna. Entonces $x(t)$ y de $y(t)$ aparecerá

en la segunda y tercera columna de la tabla

t	$x(t)$ grandes.	$y(t)$
−3	−4	−2
−2	−3	0
−1	−2	2
0	−1	4
1	0	6
2	1	8

La segunda y la tercera columna de esta tabla proporcionan un conjunto de puntos que hay que graficar. El gráfico de estos puntos aparece en la Figura 7.4. Las flechas del gráfico indican la **orientación** del mismo, es decir, la dirección en que se mueve un punto en el gráfico cuando t varía de -3 a 2

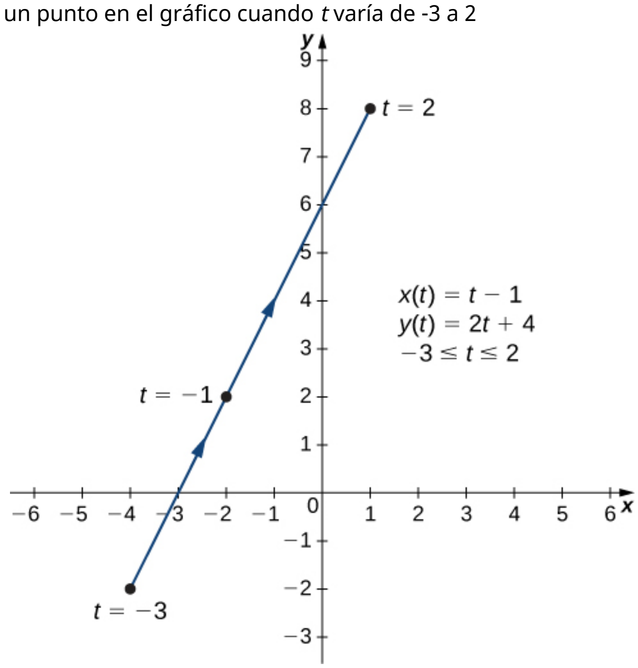


Figura 7.4 Gráfico de la curva plana descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte a.

b. Para crear un gráfico de esta curva, vuelva a establecer una tabla de valores

t	$x(t)$ grandes.	$y(t)$
−2	1	−3
−1	−2	−1
0	−3	1
1	−2	3

t	$x(t)$ grandes.	$y(t)$
2	1	5
3	6	7

La segunda y la tercera columna de esta tabla dan un conjunto de puntos para graficar (Figura 7.5). El primer punto del gráfico (correspondiente a $t = -2$) tiene coordenadas $(1, -3)$, y el último punto (correspondiente a $t = 3$) tiene coordenadas $(6, 7)$. A medida que t avanza de -2 a 3, el punto de la curva recorre una parábola. La dirección en la que se mueve el punto se llama de nuevo orientación y se indica en el gráfico.

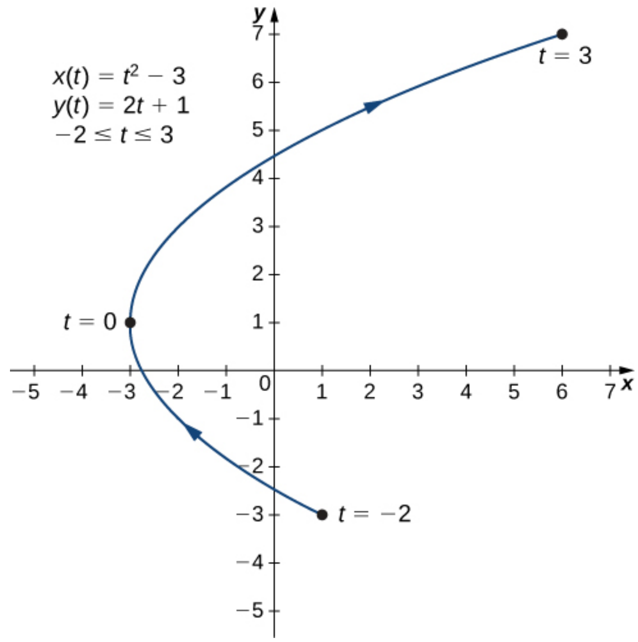


Figura 7.5 Gráfico de la curva plana descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte b.

c. En este caso, utilice múltiplos de $\pi/6$ para t y crear otra tabla de valores

t	$x(t)$ grandes.	$y(t)$	t	$x(t)$ grandes.	$y(t)$
0	4	0	$\frac{7\pi}{6}$	$-2\sqrt{3} \approx -3{,}5$	2
$\frac{\pi}{6}$	$2\sqrt{3} \approx 3{,}5$	2	$\frac{4\pi}{3}$	-2	$-2\sqrt{3} \approx -3{,}5$
$\frac{\pi}{3}$	2	$2\sqrt{3} \approx 3{,}5$	$\frac{3\pi}{2}$	0	-4
$\frac{\pi}{2}$	0	4	$\frac{5\pi}{3}$	2	$-2\sqrt{3} \approx -3{,}5$
$\frac{2\pi}{3}$	-2	$2\sqrt{3} \approx 3{,}5$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\sqrt{3} \approx 3{,}5$	2
$\frac{5\pi}{6}$	$-2\sqrt{3} \approx -3{,}5$	2	2π	4	0
π	-4	0			

El gráfico de esta curva plana aparece en el siguiente gráfico.

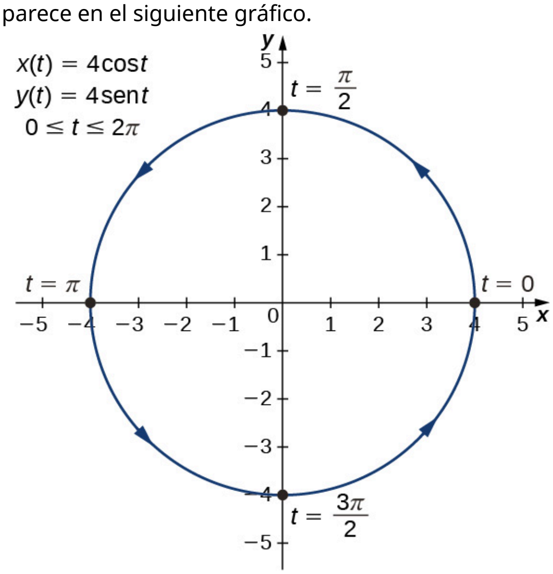


Figura 7.6 Gráfico de la curva plana descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte c.

Este es el gráfico de un círculo de radio 4 centrado en el origen, con una orientación contraria a las agujas del reloj. Los puntos inicial y final de la curva tienen coordenadas $(4, 0)$.

7.1 Dibuje la curva descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = 3t + 2, \quad y(t) = t^2 - 1, \quad -3 \leq t \leq 2.$$

Eliminar el parámetro

Para entender mejor el gráfico de una curva representada con ecuaciones paramétricas es útil reescribir las dos ecuaciones como una única ecuación que relaciona las variables *x* y *y*. Entonces podemos aplicar cualquier conocimiento previo de ecuaciones de curvas en el plano para identificar la curva. Por ejemplo, las ecuaciones que describen la curva plana en el Ejemplo 7.1b. son

$$x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t + 1, \quad -2 \leq t \leq 3.$$

Resolviendo la segunda ecuación para *t* se obtiene

$$t = \frac{y-1}{2}.$$

Esto se puede sustituir en la primera ecuación:

$$x = \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 3 = \frac{y^2 - 2y + 1}{4} - 3 = \frac{y^2 - 2y - 11}{4}.$$

Esta ecuación describe a *x* como una función de *y*. Estos pasos son un ejemplo de la *eliminación del parámetro*. El gráfico de esta función es una parábola que se abre hacia la derecha. Recordemos que la curva del plano comenzó en $(1, -3)$ y terminó en $(6, 7)$. Estas terminaciones se deben a la restricción del parámetro *t*.

EJEMPLO 7.2

Eliminar el parámetro

Elimine el parámetro de cada una de las curvas planas descritas por las siguientes ecuaciones paramétricas y describa el gráfico resultante.

a. $x(t) = \sqrt{2t + 4}, \quad y(t) = 2t + 1, \quad -2 \leq t \leq 6$
b. $x(t) = 4\cos t, \quad y(t) = 3\,\text{sen}\,t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución

a. Para eliminar el parámetro, podemos resolver cualquiera de las ecuaciones para t. Por ejemplo, resolviendo la primera ecuación para t se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2t+4} \\ x^2 &= 2t+4 \\ x^2-4 &= 2t \\ t &= \tfrac{x^2-4}{2}. \end{aligned}$$

Observe que cuando elevamos al cuadrado ambos lados es importante señalar que $x \geq 0$. Sustituyendo $t = \frac{x^2-4}{2}$ en $y(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= 2t+1 \\ y &= 2\left(\tfrac{x^2-4}{2}\right)+1 \\ y &= x^2-4+1 \\ y &= x^2-3, \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una parábola que se abre hacia arriba. Sin embargo, existe una restricción de dominio debido a los límites del parámetro t. Cuando $t = -2$, $x = \sqrt{2(-2)+4} = 0$, y cuando $t = 6$, $x = \sqrt{2(6)+4} = 4$. El gráfico de esta curva plana es el siguiente

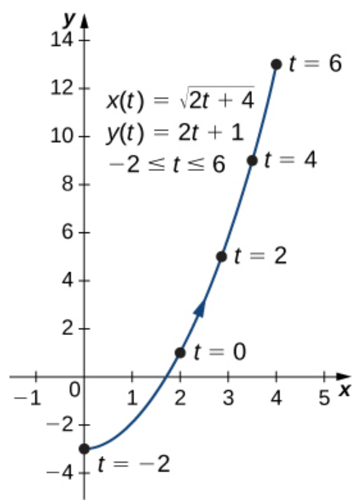


Figura 7.7 Gráfico de la curva plana descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte a.

b. A veces es necesario ser un poco creativo para eliminar el parámetro. Las ecuaciones paramétricas de este ejemplo son

$$x(t) = 4\cos t \text{ y } y(t) = 3\,\text{sen}\, t.$$

Resolver directamente cualquiera de las dos ecuaciones para t no es aconsejable porque el seno y el coseno no son funciones uno a uno. Sin embargo, dividiendo la primera ecuación entre 4 y la segunda entre 3 (y suprimiendo la t) nos da

$$\cos t = \frac{x}{4} \text{ y } \text{sen}\, t = \frac{y}{3}.$$

Ahora use la identidad pitagórica $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ y sustituya las expresiones para $\text{sen}\, t$ y $\cos t$ con las expresiones equivalentes en términos de x ye y. Esto da

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{3}\right)^2 &= 1 \\ \tfrac{x^2}{16} + \tfrac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una elipse horizontal centrada en el origen, con semieje mayor 4 y semieje menor 3 como se muestra en el siguiente gráfico

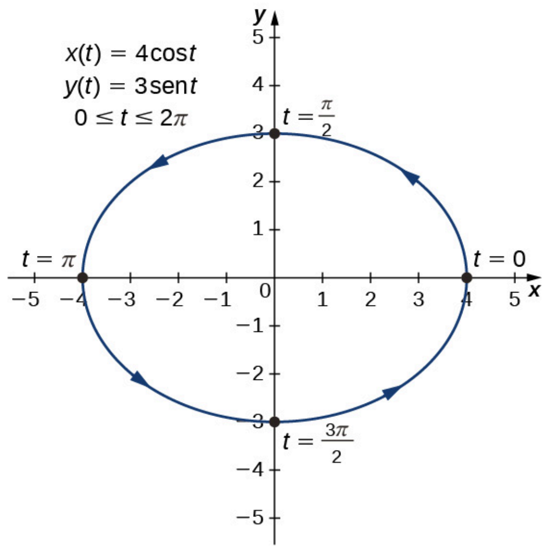


Figura 7.8 Gráfico de la curva plana descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte b.

A medida que *t* avanza de 0 a 2π, un punto de la curva atraviesa la elipse una vez, en sentido contrario a las agujas del reloj. Recordemos que la órbita de la Tierra alrededor del Sol también es elíptica. Este es un ejemplo perfecto de la utilización de curvas paramétricas para modelar un fenómeno del mundo real.

7.2 Elimine el parámetro de la curva plana definida por las siguientes ecuaciones paramétricas y describa el gráfico resultante.

$$x(t) = 2 + \frac{3}{t}, \quad y(t) = t - 1, \quad 2 \leq t \leq 6$$

Hasta ahora hemos visto el método de eliminación del parámetro, suponiendo que conocemos un conjunto de ecuaciones paramétricas que describen una curva plana. ¿Y si queremos empezar con la ecuación de una curva y determinar un par de ecuaciones paramétricas para esa curva? Esto es ciertamente posible, y de hecho es posible hacerlo de muchas maneras diferentes para una curva determinada. El proceso se conoce como **parametrización de una curva**.

EJEMPLO 7.3

Parametrizar una curva

Halle dos pares de ecuaciones paramétricas diferentes para representar el gráfico de $y = 2x^2 - 3$.

Solución

En primer lugar, siempre es posible parametrizar una curva definiendo $x(t) = t$, luego sustituyendo *x* por *t* en la ecuación para $y(t)$. Esto nos da la parametrización

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t^2 - 3.$$

Dado que no hay restricción en el dominio en el gráfico original, no hay restricción en los valores de *t.*

Tenemos total libertad en la elección de la segunda parametrización. Por ejemplo, podemos elegir $x(t) = 3t - 2$. Lo único que tenemos que comprobar es que no hay restricciones impuestas a *x*; es decir, el rango de $x(t)$ son todos números reales. Este es el caso de $x(t) = 3t - 2$. Ahora, dado que $y = 2x^2 - 3$, podemos sustituir $x(t) = 3t - 2$ para *x.* Esto da

$$\begin{aligned} y(t) &= 2(3t-2)^2 - 3 \\ &= 2\left(9t^2 - 12t + 4\right) - 3 \\ &= 18t^2 - 24t + 8 - 3 \\ &= 18t^2 - 24t + 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una segunda parametrización de la curva puede escribirse como

$$x(t) = 3t - 2 \text{ y } y(t) = 18t^2 - 24t + 5.$$

7.3 Halle dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para representar el gráfico de $y = x^2 + 2x$.

Cicloides y otras curvas paramétricas

Imagine que va a dar un paseo en bicicleta por el campo. Los neumáticos permanecen en contacto con la carretera y giran siguiendo un patrón predecible. Ahora supongamos que una hormiga muy decidida está cansada después de un largo día y quiere llegar a casa. Así que se aferra al lado del neumático y consigue un viaje gratis. El camino que recorre esta hormiga por una carretera recta se llama **cicloide** (Figura 7.9). Una cicloide generada por un círculo (o rueda de bicicleta) de radio *a* viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

Para ver por qué esto es cierto, considere la trayectoria que sigue el centro de la rueda. El centro se mueve a lo largo del eje *x* a una altura constante igual al radio de la rueda. Si el radio es *a*, entonces las coordenadas del centro pueden ser dadas por las ecuaciones

$$x(t) = at, \quad y(t) = a$$

para cualquier valor de t. A continuación, consideremos la hormiga, que gira alrededor del centro siguiendo una trayectoria circular. Si la bicicleta se mueve de izquierda a derecha, las ruedas giran en el sentido de las agujas del reloj. Una posible parametrización del movimiento circular de la hormiga (respecto al centro de la rueda) está dada por

$$x(t) = -a \operatorname{sen} t, \quad y(t) = -a \cos t.$$

(El signo negativo es necesario para invertir la orientación de la curva. Si no existiera el signo negativo, tendríamos que imaginar que la rueda gira en sentido contrario a las agujas del reloj). Sumando estas ecuaciones se obtienen las ecuaciones de la cicloide.

$$x(t) = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

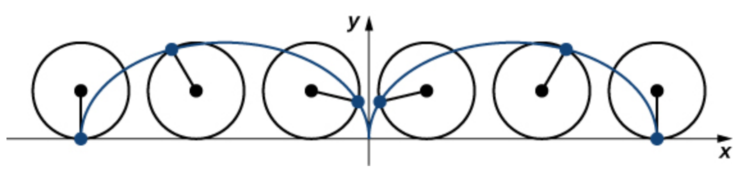


Figura 7.9 Una rueda que se desplaza por una carretera sin resbalar; la punta del borde de la rueda traza una cicloide.

Supongamos ahora que la rueda de la bicicleta no se desplaza por una carretera recta, sino que se mueve por el interior de una rueda mayor, como en la Figura 7.10. En este gráfico, el círculo verde se desplaza alrededor del círculo azul en sentido contrario a las agujas del reloj. Un punto en el borde del círculo verde traza el gráfico rojo, que se llama hipocicloide.

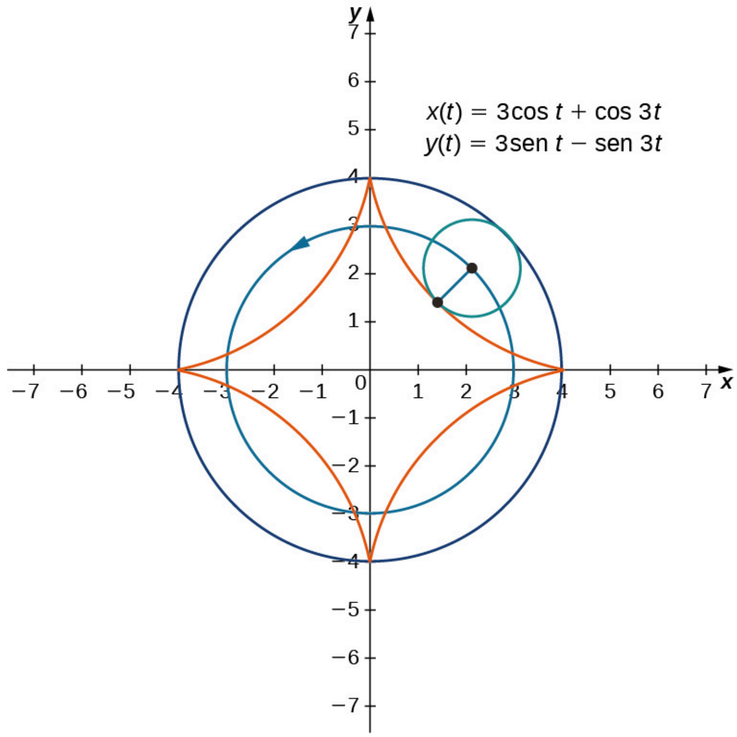


Figura 7.10 Gráfico de la hipocicloide descrita por las ecuaciones paramétricas indicadas.

Las ecuaciones paramétricas generales de una hipocicloide son

$$x(t) = (a-b)\ \cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\ t$$
$$y(t) = (a-b)\ \text{sen}\, t - b\,\text{sen}\left(\frac{a-b}{b}\right)\ t.$$

Estas ecuaciones son un poco más complicadas, pero la derivación es algo similar a las ecuaciones de la cicloide. En este caso suponemos que el radio del círculo mayor es *a* y el del menor es *b*. Entonces el centro de la rueda se desplaza a lo largo de un círculo de radio $a - b$. Este hecho explica el primer término de cada ecuación anterior. El periodo de la segunda función trigonométrica en ambas $x(t)$ y de $y(t)$ es igual a $\frac{2\pi b}{a-b}$.

El cociente $\frac{a}{b}$ está relacionado con el número de **cúspides** del gráfico (las cúspides son las esquinas o extremos puntiagudos del gráfico), como se ilustra en la Figura 7.11. Esta razón puede dar lugar a algunos gráficos muy interesantes, dependiendo de si la relación es racional o no. La Figura 7.10 corresponde a $a = 4$ y $b = 1$. El resultado es una hipocicloide con cuatro cúspides. La Figura 7.11 muestra otras posibilidades. Las dos últimas hipocicloides tienen valores irracionales para $\frac{a}{b}$. En estos casos las hipocicloides tienen un número infinito de cúspides, por lo que nunca vuelven a su punto de partida. Estos son ejemplos de lo que se conoce como *curvas de relleno de espacio*.

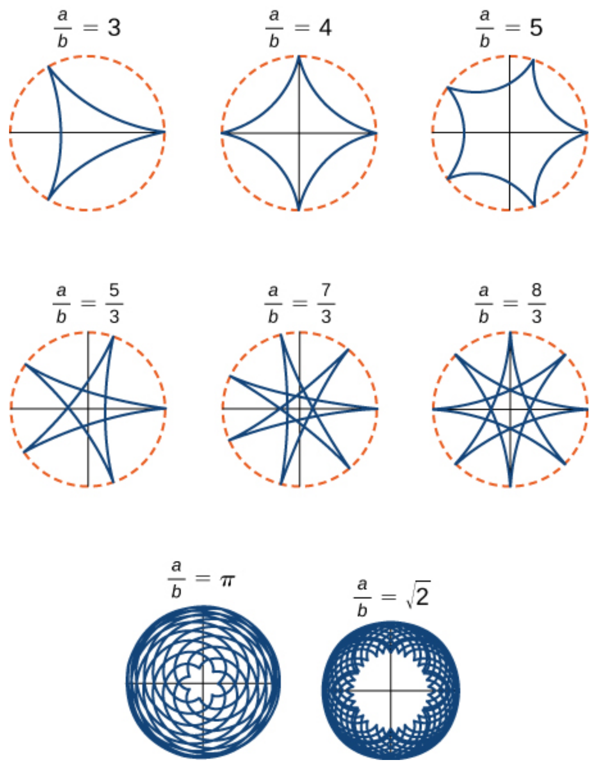


Figura 7.11 Gráfico de varias hipocicloides correspondientes a diferentes valores de a/b.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

La bruja de Agnesi

Muchas curvas planas de las matemáticas llevan el nombre de las personas que las investigaron por primera vez, como el folium de Descartes (hoja de Descartes) o la espiral de Arquímedes. Sin embargo, quizá el nombre más extraño para una curva sea el de la bruja de Agnesi. ¿Por qué una bruja?

María Gaetana Agnesi (1718-1799) fue una de las pocas mujeres matemáticas reconocidas de la Italia del siglo XVIII. Escribió un popular libro sobre geometría analítica, publicado en 1748, que incluía una interesante curva que había sido estudiada por Fermat en 1630. El matemático Guido Grandi demostró en 1703 cómo construir esta curva, a la que más tarde llamó "versoria", término latino que designa una cuerda utilizada en la navegación. Agnesi utilizó el término italiano para esta cuerda, "versiera", pero en latín, esta misma palabra significa "duende femenino" Cuando el libro de Agnesi se tradujo al inglés en 1801, el traductor utilizó el término "bruja" para la curva, en vez de cuerda. El nombre de "bruja de Agnesi" se ha mantenido desde entonces.

La bruja de Agnesi es una curva definida de la siguiente forma: Comience con un círculo de radio *a* para que los puntos $(0, 0)$ y $(0, 2a)$ sean puntos en el círculo (Figura 7.12). Supongamos que *O* es el origen. Elija cualquier otro punto *A* del círculo y dibuje la línea secante *OA*. Supongamos que *B* es el punto de intersección de la línea *OA* con la línea horizontal que pasa por $(0, 2a)$. La línea vertical que pasa por *B* interseca la línea horizontal que pasa por *A* en el punto *P*. Al variar el punto *A*, el camino que recorre el punto *P* es el de la curva de Agnesi para el círculo dado.

Las curvas de la bruja de Agnesi tienen aplicaciones en física, incluido el modelado de las ondas de agua y las distribuciones de las líneas espectrales. En teoría de la probabilidad, la curva describe la función de densidad de probabilidad de la distribución de Cauchy. En este proyecto usted parametrizará estas curvas.

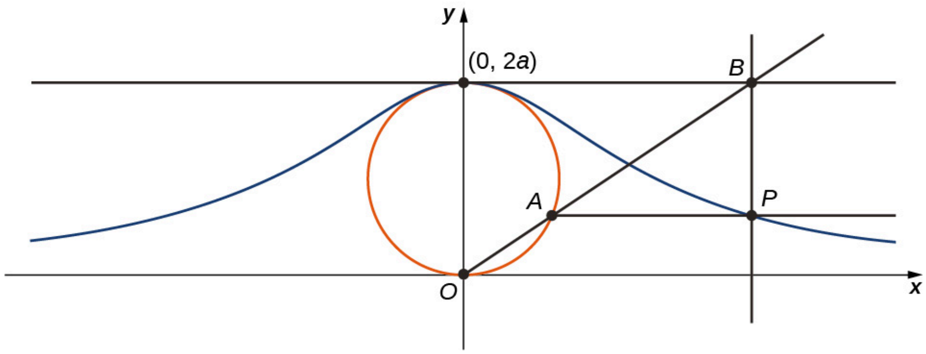


Figura 7.12 A medida que el punto *A* se mueve alrededor del círculo, el punto *P* traza curva de la bruja de Agnesi para el círculo dado.

1. En la figura, marque los siguientes puntos, longitudes y ángulos:
   a. *C* es el punto del eje *x* con la misma coordenada *x* que *A*.
   b. *x* es la coordenada *x* de *P* y *y* es la coordenada *y*de *P*.
   c. *E* es el punto $(0, a)$.
   d. *F* es el punto del segmento de línea *OA* tal que el segmento de línea *EF* es perpendicular al segmento de línea *OA*.
   e. *b* es la distancia de *O* a *F*.
   f. *c* es la distancia de *F* a *A*.
   g. *d* es la distancia de *O* a *B*.
   h. θ es la medida del ángulo $\angle COA$.

   El objetivo de este proyecto es parametrizar la bruja utilizando θ como parámetro. Para ello, escriba las ecuaciones de *x* y *y* en términos de solo θ.
2. Demuestre que $d = \frac{2a}{\operatorname{sen} \theta}$.
3. Tenga en cuenta que $x = d \cos \theta$. Demuestre que $x = 2a \cot \theta$. Al hacer esto, habrá parametrizado la coordenada *x* de la curva con respecto a θ. Si puede obtener una ecuación similar para *y*, habrá parametrizado la curva.
4. En términos de θ, cuál es el ángulo $\angle EOA$?
5. Demuestre que $b + c = 2a \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.
6. Demuestre que $y = 2a \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \operatorname{sen} \theta$.
7. Demuestre que $y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$. Ahora ha parametrizado la coordenada *y* de la curva con respecto a θ.
8. Concluya que una parametrización de la curva de bruja dada es
$$x = 2a \cot \theta, y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta, -\infty < \theta < \infty .$$
9. Utilice su parametrización para demostrar que la curva de bruja dada es el gráfico de la función $f(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Viajes con mi hormiga: Las cicloides acortadas y alargadas.
Anteriormente en esta sección, vimos las ecuaciones paramétricas para una cicloide, que es la trayectoria que un punto en el borde de una rueda traza cuando rueda a lo largo de una trayectoria recta. En este proyecto estudiamos dos variantes diferentes de la cicloide, denominadas cicloide acortada y cicloide alargada.

En primer lugar, revisemos la derivación de las ecuaciones paramétricas de una cicloide. Recordemos que consideramos a una hormiga tenaz que intentaba llegar a casa colgándose del borde de una rueda de bicicleta. Hemos supuesto que la hormiga se subió al neumático en el mismo borde, donde el neumático toca el suelo. Cuando la rueda gira, la hormiga se mueve con el borde del neumático (Figura 7.13).

Como hemos comentado, tenemos mucha flexibilidad a la hora de parametrizar una curva. En este caso dejamos que nuestro parámetro t represente el ángulo que ha girado el neumático. Al observar la Figura 7.13, vemos que después de que el neumático haya girado un ángulo t, la posición del centro de la rueda, $C = (x_C, y_C)$, está dada por

$$x_C = at \text{ y } y_C = a.$$

Además, supongamos que $A = (x_A, y_A)$ denota la posición de la hormiga, observamos que

$$x_C - x_A = a \operatorname{sen} t \text{ y } y_C - y_A = a \cos t.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_A &= x_C - a \operatorname{sen} t = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y_A &= y_C - a \cos t = a - a \cos t = a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

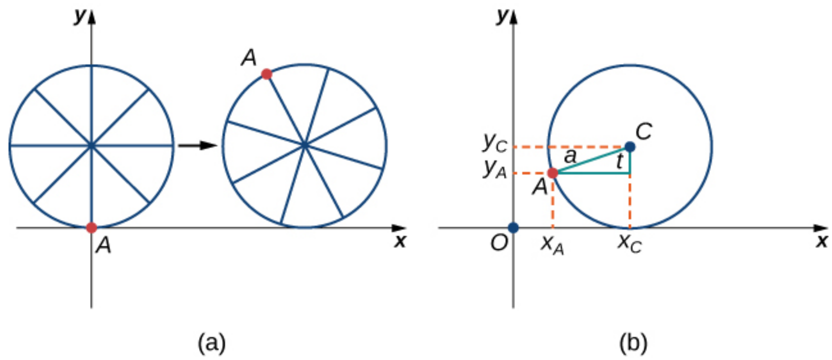


Figura 7.13 (a) La hormiga se aferra al borde del neumático de la bicicleta mientras esta rueda por el suelo. (b) Se utiliza la geometría para determinar la posición de la hormiga después de que el neumático haya girado un ángulo t.

Observe que son las mismas representaciones paramétricas que teníamos antes, pero ahora hemos asignado un significado físico a la variable paramétrica t.

Al cabo de un rato la hormiga se marea de dar vueltas y más vueltas sobre el borde del neumático. Así que sube por uno de los radios hacia el centro de la rueda. Al subir hacia el centro de la rueda, la hormiga ha cambiado su trayectoria de movimiento. La nueva trayectoria tiene menos movimiento ascendente y descendente y se denomina cicloide acortada (Figura 7.14). Como se muestra en la figura, suponemos que b denota la distancia a lo largo del radio desde el centro de la rueda hasta la hormiga. Como antes, suponemos que t representa el ángulo que ha girado el neumático. Asimismo, suponemos que $C = (x_C, y_C)$ representa la posición del centro de la rueda y $A = (x_A, y_A)$ representa la posición de la hormiga.

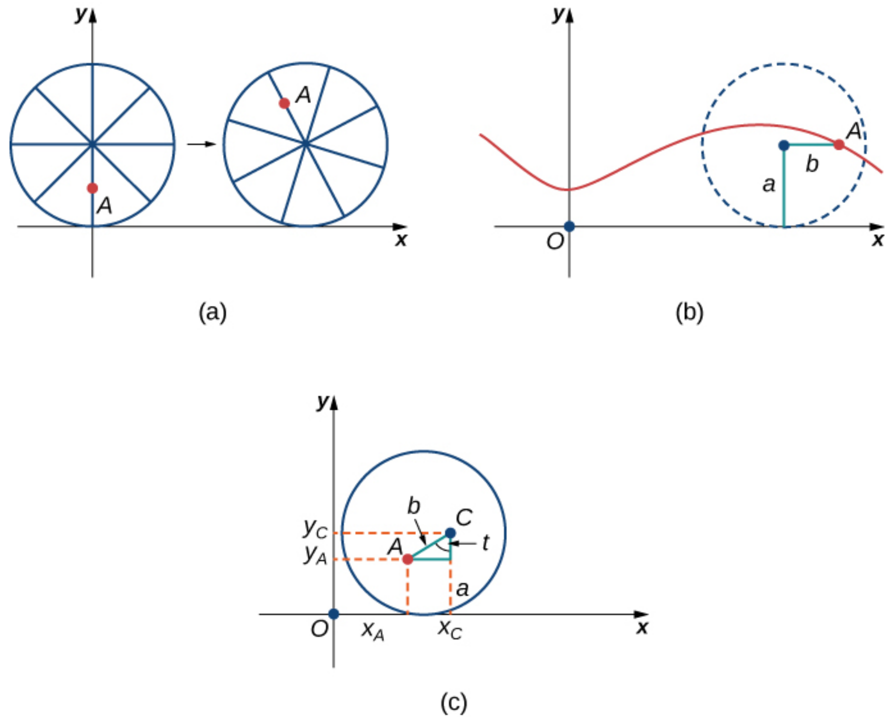


Figura 7.14 (a) La hormiga sube por uno de los radios hacia el centro de la rueda. (b) La trayectoria del movimiento de la hormiga después de acercarse al centro de la rueda. Esto se conoce como cicloide acortada. (c) La nueva disposición, ahora que la hormiga se ha acercado al centro de la rueda.

1. ¿Cuál es la posición del centro de la rueda después de que el neumático haya girado un ángulo t?
2. Utilice la geometría para hallar expresiones para $x_C - x_A$ y para $y_C - y_A$.
3. A partir de sus respuestas de las partes 1 y 2, ¿cuáles son las ecuaciones paramétricas que representan la cicloide acortada?

   Una vez que la cabeza de la hormiga se aclara, se da cuenta de que el ciclista ha hecho un giro y ahora está viajando lejos de su casa. Así que deja la rueda de la bicicleta y mira a su alrededor. Afortunadamente, hay un conjunto de vías de tren cerca, que se dirigen de nuevo en la dirección correcta. Así que la hormiga se dirige a las vías del tren para esperar. Al cabo de un rato, pasa un tren que va en la dirección correcta, y la hormiga consigue saltar y alcanzar el borde de la rueda del tren (¡sin aplastarse!).

   La hormiga sigue preocupada por si se marea, pero la rueda del tren es resbaladiza y no tiene radios por los cuales subir, así que decide agarrarse al borde de la rueda y esperar lo mejor. Ahora, las ruedas de los trenes tienen un reborde para mantener la rueda en las vías. Por lo tanto, en este caso, como la hormiga está colgada del mismo extremo del reborde, la distancia del centro de la rueda a la hormiga es realmente mayor que el radio de la rueda (Figura 7.15).

   El planteamiento aquí es esencialmente el mismo que cuando la hormiga subió por el radio de la rueda de la bicicleta. Suponemos que b denota la distancia desde el centro de la rueda a la hormiga, y que t representa el ángulo que ha girado el neumático. Asimismo, suponemos que $C = (x_C, y_C)$ representa la posición del centro de la rueda y $A = (x_A, y_A)$ representa la posición de la hormiga (Figura 7.15).

   Cuando la distancia del centro de la rueda a la hormiga es mayor que el radio de la rueda, su trayectoria de movimiento se llama cicloide alargada. En la figura se muestra el gráfico de una cicloide alargada

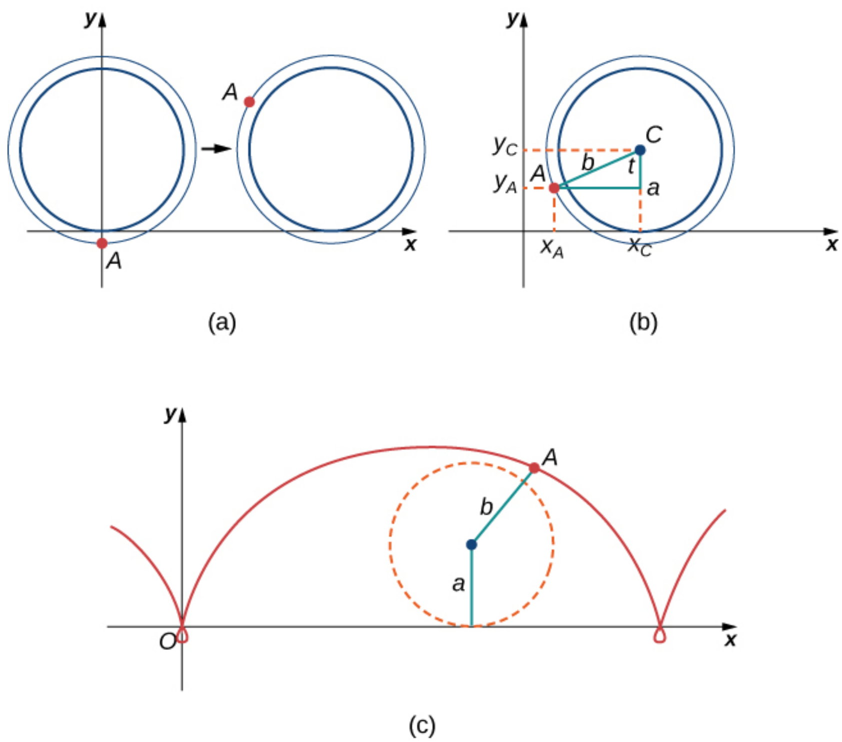


Figura 7.15 (a) La hormiga se cuelga del reborde de la rueda del tren. (b) El nuevo planteamiento, ahora que la hormiga ha saltado a la rueda del tren. (c) La hormiga se desplaza por una cicloide alargada.

4. Usando el mismo enfoque que usó en las partes 1 a 3, halle las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del movimiento de la hormiga.
5. ¿Qué observa en su respuesta a la parte 3 y en su respuesta a la parte 4?
   Fíjese en que la hormiga en realidad está viajando hacia atrás en algunos momentos (los "bucles" del gráfico), aunque el tren siga avanzando. Probablemente estará *muy* mareada cuando llegue a casa

SECCIÓN 7.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, dibuje las siguientes curvas eliminando el parámetro t. Indique la orientación de la curva.

1. $x = t^2 + 2t,\ y = t + 1$

2. $x = \cos(t),\ y = \operatorname{sen}(t),\ (0, 2\pi]$

3. $x = 2t + 4,\ y = t - 1$

4. $x = 3 - t,\ y = 2t - 3,\ 1{,}5 \le t \le 3$

En los siguientes ejercicios, elimine el parámetro y dibuje los gráficos.

5. $x = 2t^2, \quad y = t^4 + 1$

En los siguientes ejercicios, utilice un dispositivo tecnológico (CAS o calculadora) para graficar las ecuaciones paramétricas.

6. **[T]** $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - 1$

7. **[T]** $x = e^{-t}, \quad y = e^{2t} - 1$

8. **[T]** $x = 3\cos t, \quad y = 4\operatorname{sen} t$

9. **[T]** $x = \sec t, \quad y = \cos t$

En los siguientes ejercicios, dibuje las ecuaciones paramétricas eliminando el parámetro. Indique las asíntotas del gráfico.

10. $x = e^t, \quad y = e^{2t} + 1$

11. $x = 6\,\text{sen}(2\theta), y = 4\cos(2\theta)$

12. $x = \cos\theta, \quad y = 2\,\text{sen}(2\theta)$
grandes.

13. $x = 3 - 2\cos\theta, \quad y = -5 + 3\,\text{sen}\,\theta$

14. $x = 4 + 2\cos\theta, \quad y = -1 + \text{sen}\,\theta$

15. $x = \sec t, \quad y = \tan t$

16. $x = \ln(2t), \quad y = t^2$

17. $x = e^t, \quad y = e^{2t}$

18. $x = e^{-2t}, \quad y = e^{3t}$

19. $x = t^3, \quad y = 3\ln t$

20. $x = 4\sec\theta, \quad y = 3\tan\theta$

En los siguientes ejercicios, convierta las ecuaciones paramétricas de una curva en forma rectangular. No es necesario ningún dibujo. Indique el dominio de la forma rectangular.

21. $x = t^2 - 1, \quad y = \frac{t}{2}$

22. $x = \frac{1}{\sqrt{t+1}}, \quad y = \frac{t}{1+t}, t > -1$

23. $x = 4\cos\theta, y = 3\,\text{sen}\,\theta, \theta \in (0, 2\pi]$

24. $x = \cosh t, \quad y = \text{senoh}\,t$

25. $x = 2t - 3, \quad y = 6t - 7$

26. $x = t^2, \quad y = t^3$

27. $x = 1 + \cos t, \quad y = 3 - \text{sen}\,t$

28. $x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4$

29. $x = \sec t, \quad y = \tan t, \pi \le t < \frac{3\pi}{2}$

30. $x = 2\cosh t, \quad y = 4\,\text{senoh}\,t$

31. $x = \cos(2t), \quad y = \text{sen}\,t$

32. $x = 4t + 3, y = 16t^2 - 9$

33. $x = t^2, \quad y = 2\ln t, t \ge 1$

34. $x = t^3, \quad y = 3\ln t, t \ge 1$

35. $x = t^n, \quad y = n\ln t, t \ge 1,$ donde n es un número natural

36. $x = \ln(5t)$, $y = \ln(t^2)$ donde $1 \le t \le e$

37. $x = 2\,\text{sen}(8t)$, $y = 2\cos(8t)$ grandes.

38. $x = \tan t$, $y = \sec^2 t - 1$

En los siguientes ejercicios, los pares de ecuaciones paramétricas representan rectas, parábolas, círculos, elipses o hipérbolas. Nombre el tipo de curva básica que representa cada par de ecuaciones.

39. $x = 3t + 4$, $y = 5t - 2$

40. $x - 4 = 5t$, $y + 2 = t$

41. $x = 2t + 1$, $y = t^2 - 3$

42. $x = 3\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$

43. $x = 2\cos(3t)$, $y = 2\,\text{sen}(3t)$

44. $x = \cosh t$, $y = \text{senoh}\,t$

45. $x = 3\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$

46. $x = 2\cos(3t)$, $y = 5\,\text{sen}(3t)$ grandes.

47. $x = 3\cosh(4t)$, $y = 4\,\text{senoh}(4t)$

48. $x = 2 \cosh t$
$y = 2 \operatorname{senoh} t$

49. Demuestre que $\begin{array}{l} x = h + r \cos \theta \\ y = k + r \operatorname{sen} \theta \end{array}$ representa la ecuación de un círculo.

50. Utilice las ecuaciones del problema anterior para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una circunferencia cuyo radio es 5 y cuyo centro es $(-2,\ 3)$.

En los siguientes ejercicios, utilice una herramienta gráfica para graficar la curva representada por las ecuaciones paramétricas e identifique la curva a partir de su ecuación.

51. **[T]** $x = \theta + \operatorname{sen} \theta$
$y = 1 - \cos \theta$

52. **[T]** $x = 2t - 2 \operatorname{sen} t$
$y = 2 - 2 \cos t$

53. **[T]** $x = t - 0{,}5 \operatorname{sen} t$
$y = 1 - 1{,}5 \cos t$

54. Un avión que viaja horizontalmente a 100 m/s sobre un terreno plano a una altura de 4.000 metros debe dejar caer un paquete de emergencia sobre un objetivo en el suelo. La trayectoria del paquete está dada por $x = 100t,\ y = -4{,}9t^2 + 4.000,\ t \geq 0$ donde el origen es el punto en el suelo directamente debajo del avión en el momento de la liberación. ¿Cuántos metros horizontales antes del objetivo debe soltar el paquete para dar en el blanco?

55. La trayectoria de una bala está dada por $x = v_0 (\cos \alpha)\ t,\ y = v_0 (\operatorname{sen} \alpha)\ t - \frac{1}{2} g t^2$ donde $v_0 = 500 \text{ m/s}$, $g = 9{,}8 = 9{,}8 \text{ m/s}^2$, y $\alpha = 30$ grados. ¿Cuándo llegará la bala al suelo? ¿A qué distancia de la pistola la bala llegará al suelo?

56. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico para dibujar la curva representada por $x = \operatorname{sen}(4t),\ y = \operatorname{sen}(3t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

57. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico para dibujar $x = 2 \tan(t),\ y = 3 \sec(t),\ -\pi < t < \pi$.

58. Dibuje la curva conocida como *epitrocoide* que da la trayectoria de un punto en un círculo de radio *b* cuando rueda por el exterior de un círculo de radio *a*. Las ecuaciones son

$$x = (a + b) \cos t - c \cdot \cos \left[\frac{(a+b)t}{b} \right]$$
$$y = (a + b) \operatorname{sen} t - c \cdot \operatorname{sen} \left[\frac{(a+b)t}{b} \right].$$

Supongamos que $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$.

59. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico para dibujar la curva en espiral dada por $x = t \cos(t),\ y = t \operatorname{sen}(t)$ de $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

60. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico para graficar la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = 2\cot(t), y = 1 - \cos(2t), -\pi/2 \leq t \leq \pi/2.$ Esta curva se conoce como la bruja de Agnesi.

61. **[T]** Dibújela curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = \cosh(t)$ donde $y = \operatorname{senoh}(t),$ $-2 \leq t \leq 2.$

7.2 Cálculo de curvas paramétricas

Objetivos de aprendizaje

7.2.1 Determinar las derivadas y las ecuaciones de las tangentes de las curvas paramétricas.
7.2.2 Hallar el área bajo una curva paramétrica.
7.2.3 Utilizar la ecuación de la longitud de arco de una curva paramétrica.
7.2.4 Aplicar la fórmula de la superficie a un volumen generado por una curva paramétrica.

Ahora que hemos introducido el concepto de curva parametrizada, nuestro siguiente paso es aprender a trabajar con este concepto en el contexto del cálculo. Por ejemplo, si conocemos una parametrización de una curva determinada, ¿es posible calcular la pendiente de una línea tangente a la curva? ¿Y la longitud de arco de la curva? ¿O el área bajo la curva?

Otro escenario: supongamos que queremos representar la ubicación de una pelota de béisbol después de que la bola salga de la mano del lanzador. Si la posición de la pelota de béisbol está representada por la curva plana $(x(t), y(t))$, entonces deberíamos ser capaces de utilizar el cálculo para calcular la velocidad de la pelota en cualquier momento. Además, deberíamos ser capaces de calcular la distancia que ha recorrido esa pelota en función del tiempo.

Derivadas de ecuaciones paramétricas

Empezamos preguntando cómo calcular la pendiente de una línea tangente a una curva paramétrica en un punto. Considere la curva plana definida por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = 2t + 3, \quad y(t) = 3t - 4, \quad -2 \leq t \leq 3.$$

El gráfico de esta curva aparece en la Figura 7.16. Es un segmento de línea que comienza en $(-1, -10)$ y termina en $(9, 5)$.

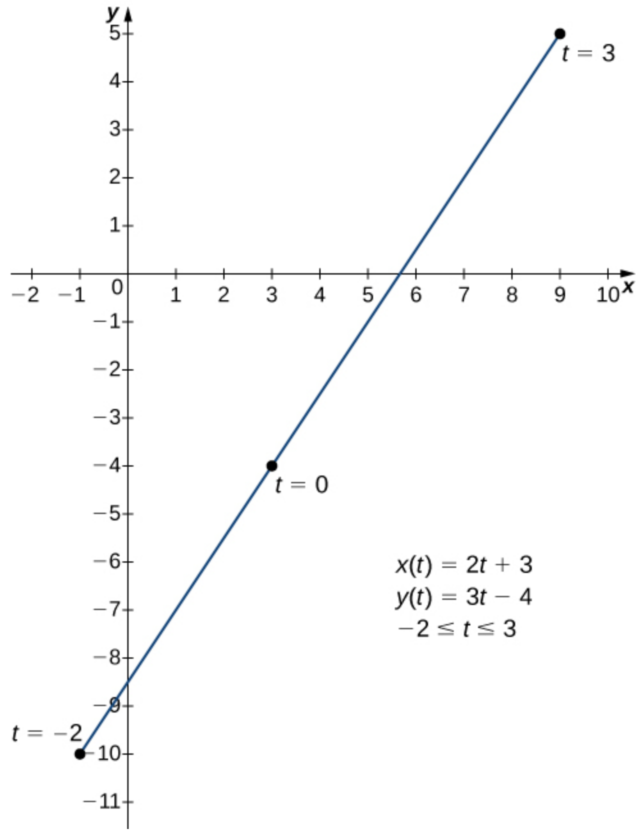


Figura 7.16 Gráfico del segmento de línea descrito por las ecuaciones paramétricas dadas.

Podemos eliminar el parámetro resolviendo primero la ecuación $x(t) = 2t + 3$ para *t*:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t + 3 \\ x - 3 &= 2t \\ t &= \frac{x-3}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en $y(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= 3t - 4 \\ y &= 3\left(\frac{x-3}{2}\right) - 4 \\ y &= \frac{3x}{2} - \frac{9}{2} - 4 \\ y &= \frac{3x}{2} - \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

La pendiente de esta línea está dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$. A continuación calculamos $x'(t)$ y de $y'(t)$. Esto da $x'(t) = 2$ y $y'(t) = 3$. Observe que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3}{2}$. Esto no es casualidad, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 7.1

Derivada de ecuaciones paramétricas

Considere la curva plana definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ y de $y = y(t)$. Supongamos que $x'(t)$ y de $y'(t)$ existen, y supongamos que $x'(t) \neq 0$. Entonces la derivada $\frac{dy}{dx}$ está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (7.1)$$

Prueba

Este teorema se puede demostrar utilizando la regla de la cadena. En particular, supongamos que el parámetro *t* se

puede eliminar, obteniendo una función diferenciable $y = F(x)$. Entonces $y(t) = F(x(t))$. Diferenciando ambos lados de esta ecuación mediante la regla de la cadena produce

$$y'(t) = F'(x(t))\, x'(t),$$

así que

$$F'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Pero $F'(x(t)) = \frac{dy}{dx}$, lo cual demuestra el teorema.

□

La Ecuación 7.1 puede utilizarse para calcular las derivadas de las curvas planas, así como los puntos críticos. Recordemos que un punto crítico de una función diferenciable $y = f(x)$ es cualquier punto $x = x_0$ de manera que $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe. La Ecuación 7.1 da una fórmula para la pendiente de una línea tangente a una curva definida paramétricamente independientemente de que la curva pueda ser descrita por una función $y = f(x)$ o no.

EJEMPLO 7.4

Cálculo de la derivada de una curva paramétrica

Calcule la derivada $\frac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes curvas planas definidas paramétricamente y ubique cualquier punto crítico en sus respectivos gráficos.

a. $x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t - 1, \quad -3 \le t \le 4$
b. $x(t) = 2t + 1, \quad y(t) = t^3 - 3t + 4, \quad -2 \le t \le 5$
c. $x(t) = 5\cos t, \quad y(t) = 5\,\text{sen}\, t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Solución

a. Para aplicar la Ecuación 7.1, primero hay que calcular $x'(t)$ y de $y'(t)$:

$$x'(t) = 2t$$
$$y'(t) = 2.$$

A continuación, sustituya esto en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2t}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}.$$

Esta derivada es indefinida cuando $t = 0$. Si calculamos $x(0)$ y de $y(0)$ da como resultado $x(0) = (0)^2 - 3 = -3$ y $y(0) = 2(0) - 1 = -1$, que corresponde al punto $(-3, -1)$ en el gráfico. El gráfico de esta curva es una parábola que se abre hacia la derecha, y el punto $(-3, -1)$ es su vértice como se muestra

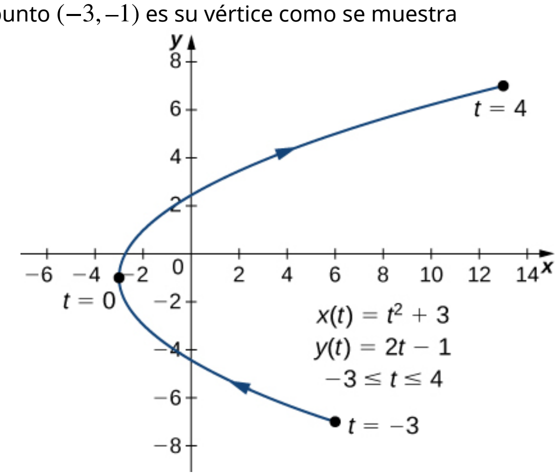


Figura 7.17 Gráfico de la parábola descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte a.

b. Para aplicar la Ecuación 7.1, primero hay que calcular $x'(t)$ y de $y'(t)$:

$$x'(t) = 2$$
$$y'(t) = 3t^2 - 3,$$

A continuación, sustituya esto en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-3}{2}.$$

Esta derivada es cero cuando $t = \pm 1$. Cuando $t = -1$ tenemos

$$x(-1) = 2(-1) + 1 = -1 \text{ y } y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = -1 + 3 + 4 = 6,$$

que corresponde al punto $(-1, 6)$ en el gráfico. Cuando $t = 1$ tenemos

$$x(1) = 2(1) + 1 = 3 \text{ y } y(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 1 - 3 + 4 = 2,$$

que corresponde al punto $(3, 2)$ en el gráfico. El punto $(3, 2)$ es un mínimo relativo y el punto $(-1, 6)$ es un máximo relativo, como se ve en el siguiente gráfico

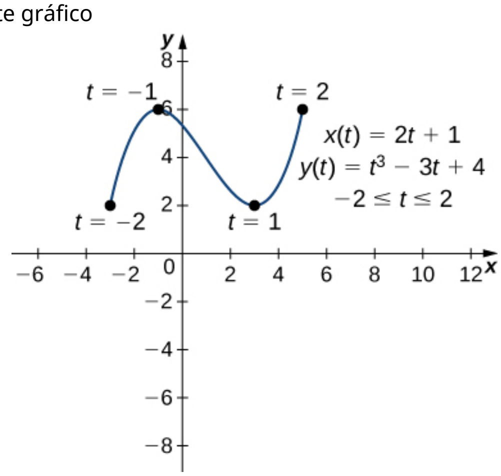


Figura 7.18 Gráfico de la curva descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte b.

c. Para aplicar la Ecuación 7.1, primero hay que calcular $x'(t)$ y de $y'(t)$:

$$x'(t) = -5 \operatorname{sen} t$$
$$y'(t) = 5 \cos t.$$

A continuación, sustituya esto en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 \cos t}{-5 \operatorname{sen} t}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\cot t.$$

Esta derivada es cero cuando $\cos t = 0$ y es indefinida cuando $\operatorname{sen} t = 0$. Esto da $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},$ y 2π como puntos críticos para *t*. Sustituyendo cada uno de ellos en $x(t)$ y de $y(t)$, obtenemos

t	$x(t)$ **grandes.**	$y(t)$
0	5	0
$\frac{\pi}{2}$	0	5

t	$x(t)$ grandes.	$y(t)$
π	−5	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	−5
2π	5	0

Estos puntos corresponden a los lados, la parte superior y la parte inferior del círculo representado por las ecuaciones paramétricas (Figura 7.19). En los bordes izquierdo y derecho del círculo, la derivada es indefinida, y en la parte superior e inferior, la derivada es igual a cero.

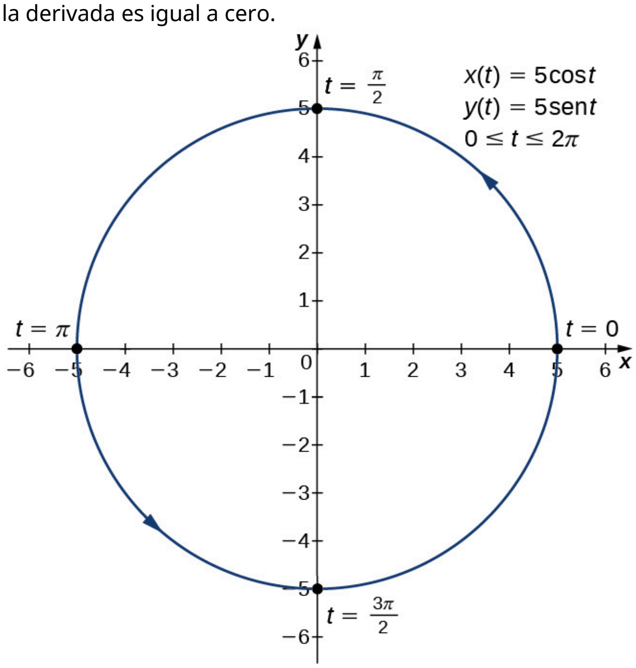


Figura 7.19 Gráfico de la curva descrita por las ecuaciones paramétricas de la parte c.

7.4 Calcule la derivada dy/dx para la curva plana definida por las ecuaciones

$$x(t) = t^2 - 4t, \quad y(t) = 2t^3 - 6t, \quad -2 \le t \le 3$$

y ubique cualquier punto crítico en su gráfico.

EJEMPLO 7.5

Hallar una línea tangente

Halle la ecuación de la línea tangente a la curva definida por las ecuaciones

$$x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t - 1, \quad -3 \le t \le 4 \text{ cuando } t = 2.$$

Solución

En primer lugar, halle la pendiente de la línea tangente utilizando la Ecuación 7.1, lo que significa calcular $x'(t)$ y de $y'(t)$:

$$x'(t) = 2t$$
$$y'(t) = 2.$$

A continuación, sustitúyalas en la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2t}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}.$$

Cuando $t = 2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, así que esta es la pendiente de la línea tangente. Si calculamos $x(2)$ y de $y(2)$ da

$$x(2) = (2)^2 - 3 = 1 \text{ y } y(2) = 2(2) - 1 = 3,$$

que corresponde al punto $(1, 3)$ en el gráfico (Figura 7.20). Ahora utilice la forma punto-pendiente de la ecuación de una línea para hallar la ecuación de la línea tangente:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 3 &= \tfrac{1}{2}(x - 1) \\ y - 3 &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} \\ y &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

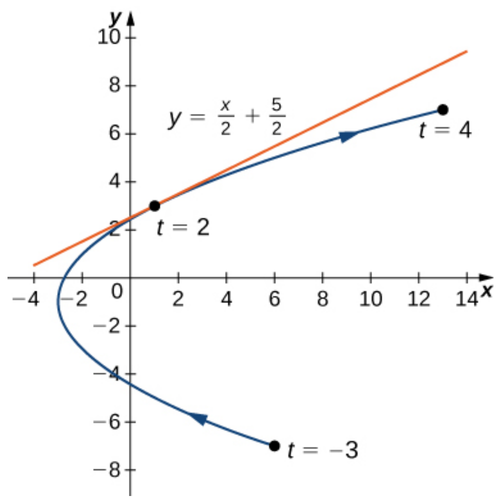


Figura 7.20 Línea tangente a la parábola descrita por las ecuaciones paramétricas dadas cuando $t = 2$.

7.5 Halle la ecuación de la línea tangente a la curva definida por las ecuaciones

$$x(t) = t^2 - 4t, \quad y(t) = 2t^3 - 6t, \quad -2 \le t \le 10 \text{ cuando } t = 5.$$

Derivadas de segundo orden

Nuestro siguiente objetivo es ver cómo tomar la segunda derivada de una función definida paramétricamente. La segunda derivada de una función $y = f(x)$ se define como la derivada de la primera derivada; es decir,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right].$$

Dado que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, podemos sustituir la y en ambos lados de esta ecuación por $\frac{dy}{dx}$. Esto nos da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(d/dt)(dy/dx)}{dx/dt}. \qquad (7.2)$$

Si conocemos dy/dx en función de t, entonces esta fórmula es fácil de aplicar.

EJEMPLO 7.6

Calcular una segunda derivada

Calcule la segunda derivada d^2y/dx^2 para la curva plana definida por las ecuaciones paramétricas $x(t) = t^2 - 3, y(t) = 2t - 1, -3 \leq t \leq 4.$

Solución

Del Ejemplo 7.4 sabemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$. Utilizando la Ecuación 7.2, obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(d/dt)(dy/dx)}{dx/dt} = \frac{(d/dt)(1/t)}{2t} = \frac{-t^{-2}}{2t} = -\frac{1}{2t^3}.$$

7.6 Calcule la segunda derivada d^2y/dx^2 para la curva plana definida por las ecuaciones

$$x(t) = t^2 - 4t, \quad y(t) = 2t^3 - 6t, \quad -2 \leq t \leq 3$$

y ubique cualquier punto crítico en su gráfico.

Integrales con ecuaciones paramétricas

Ahora que hemos visto cómo calcular la derivada de una curva plana, la siguiente pregunta es la siguiente: ¿Cómo hallar el área bajo una curva definida paramétricamente? Recordemos la cicloide definida por las ecuaciones $x(t) = t - \operatorname{sen} t, \quad y(t) = 1 - \cos t$. Supongamos que queremos hallar el área de la región sombreada en el siguiente gráfico.

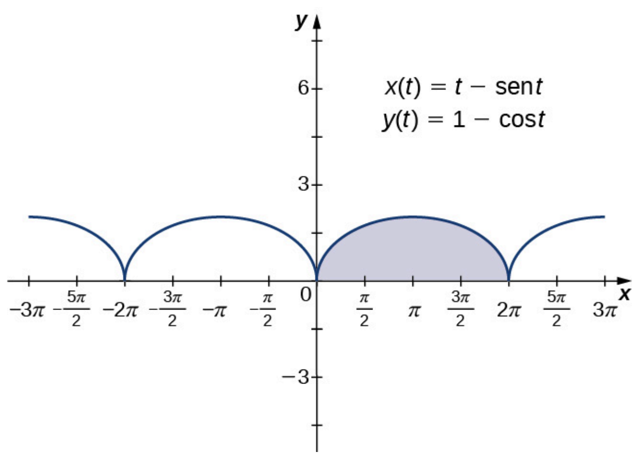


Figura 7.21 Gráfico de una cicloide con el arco sobre $[0, 2\pi]$ resaltado.

Para derivar una fórmula para el área bajo la curva definida por las funciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

asumimos que $x(t)$ es creciente en el intervalo $t \in [a, b]$ y $x(t)$ es diferenciable y comienza con una partición igual del intervalo $a \leq t \leq b$. Supongamos que $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ y considere el siguiente gráfico.

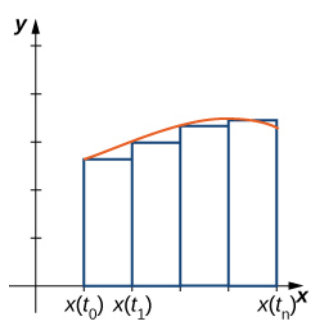


Figura 7.22 Aproximación del área bajo una curva definida paramétricamente.

Utilizamos rectángulos para aproximar el área bajo la curva. La altura del i–ésimo rectángulo es $y\left(t_i{}^{-1}\right)$, por lo que una aproximación del área es

$$\sum_{i=1}^{n} y(t_{i-1})\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} y\left(t_{i-1}\right)\frac{\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)}{\left(t_i-t_{i-1}\right)}\left(t_i-t_{i-1}\right)$$
$$\to \int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)dt \text{ como máx.}\left\{\left(t_i-t_{i-1}\right)\right\}\to 0$$

Esto se deduce de los resultados obtenidos en Cálculo 1 para la función $y\left(t_{i-1}\right)\frac{\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)}{\left(t_i-t_{i-1}\right)}$.

Entonces una suma de Riemann para el área es

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\ \left(x\left(t_i\right)-x\left(t_{i-1}\right)\right).$$

Multiplicando y dividiendo cada área por t_i-t_{i-1} da

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\left(\frac{x\left(t_i\right)-x\left(t_{i-1}\right)}{t_i-t_{i-1}}\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\left(\frac{x\left(t_i\right)-x\left(t_{i-1}\right)}{\Delta t}\right)\Delta t.$$

Si tomamos el límite a medida que n se acerca al infinito da

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n=\int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)\ dt.$$

Si los valores de x es una función decreciente para $a\le t\le b$, una derivación similar mostrará que el área viene dada por $-\int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)dt\ \ =\int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)dt$

Esto nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 7.2

Área bajo una curva paramétrica

Considere la curva plana que no se interseca definida por las ecuaciones paramétricas

$$x=x\left(t\right),\quad y=y\left(t\right),\quad a\le t\le b$$

y asuma que $x\left(t\right)$ es diferenciable. El área bajo esta curva está dada por

$$A=\int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)\ dt. \tag{7.3}$$

EJEMPLO 7.7

Cálculo del área bajo una curva paramétrica

Halle el área bajo la curva de la cicloide definida por las ecuaciones

$$x\left(t\right)=t-\text{sen}\,t,\quad y\left(t\right)=1-\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Solución

Utilizando la Ecuación 7.3, tenemos

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b y(t)\,x'(t)\;dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\;dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\;dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)\;dt \\
&= \tfrac{3t}{2}-2\operatorname{sen} t+\tfrac{\operatorname{sen} 2t}{4}\Big|_0^{2\pi} \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

7.7 Halle el área bajo la curva de la hipocicloide definida por las ecuaciones

$$x(t)=3\cos t+\cos 3t,\quad y(t)=3\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 3t,\quad 0\le t\le \pi.$$

Longitud de arco de una curva paramétrica

Además de hallar el área bajo una curva paramétrica, a veces necesitamos hallar la longitud de arco de una curva paramétrica. En el caso de un segmento de línea, la longitud de arco es igual a la distancia entre los puntos extremos. Si una partícula viaja del punto *A* al punto *B* a lo largo de una curva, la distancia que recorre esa partícula es la longitud del arco. Para desarrollar una fórmula para la longitud de arco, comenzamos con una aproximación por segmentos de línea como se muestra en el siguiente gráfico.

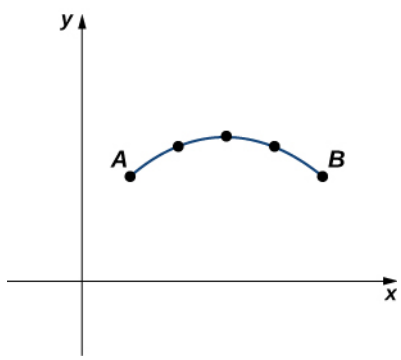


Figura 7.23 Aproximación de una curva mediante segmentos de línea.

Dada una curva plana definida por las funciones $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\le t\le b$, empezamos por dividir el intervalo $[a,b]$ en *n* subintervalos iguales: $t_0=a<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$. El ancho de cada subintervalo está dado por $\Delta t=(b\text{–}a)/n$. Podemos calcular la longitud de cada segmento de línea:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \sqrt{(x(t_1)-x(t_0))^2+(y(t_1)-y(t_0))^2} \\
d_2 &= \sqrt{(x(t_2)-x(t_1))^2+(y(t_2)-y(t_1))^2}\text{ etc.}
\end{aligned}$$

A continuación, súmelos. Suponemos que *s* denota la longitud de arco exacta y s_n denota la aproximación mediante *n* segmentos de línea:

$$s\approx\sum_{k=1}^{n}s_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x\left(t_{k-1}\right)\right)^2+\left(y(t_k)-y\left(t_{k-1}\right)\right)^2}. \tag{7.4}$$

Si asumimos que $x(t)$ y de $y(t)$ son funciones diferenciables de *t*, entonces se aplica el teorema de valor medio (Introducción a las aplicaciones de las derivadas (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-1/pages/4-introduccion)), por lo que en cada subintervalo $[t_{k-1},t_k]$ existen $\hat{t}_k$ y $\tilde{t}_k$ tal que

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\hat{t}_k)(t_k - t_{k-1}) = x'(\hat{t}_k)\Delta t$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\tilde{t}_k)(t_k - t_{k-1}) = y'(\tilde{t}_k)\Delta t.$$

Por lo tanto, la Ecuación 7.4 se convierte en

$$\begin{aligned} s &\approx \sum_{k=1}^{n} s_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'(\hat{t}_k)\Delta t\right)^2 + \left(y'(\tilde{t}_k)\Delta t\right)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'(\hat{t}_k)\right)^2(\Delta t)^2 + \left(y'(\tilde{t}_k)\right)^2(\Delta t)^2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'(\hat{t}_k)\right)^2 + \left(y'(\tilde{t}_k)\right)^2}\right)\Delta t. \end{aligned}$$

Se trata de una suma de Riemann que aproxima la longitud de arco sobre una partición del intervalo $[a, b]$. Si además asumimos que las derivadas son continuas y suponemos que el número de puntos de la partición aumenta sin límite, la aproximación se acerca a la longitud de arco exacta. Esto da

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'(\hat{t}_k)\right)^2 + \left(y'(\tilde{t}_k)\right)^2}\right)\Delta t \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \end{aligned}$$

Cuando se toma el límite, los valores de $\hat{t}_k$ y $\tilde{t}_k$ están contenidos en el mismo intervalo de ancho cada vez menor Δt, por lo que deben converger al mismo valor.

Podemos resumir este método en el siguiente teorema.

Teorema 7.3

Longitud de arco de una curva paramétrica

Considere la curva plana definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2$$

y asuma que $x(t)$ y de $y(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces la longitud de arco de esta curva está dada por

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{7.5}$$

En este punto, una derivación lateral nos lleva a una fórmula previa para la longitud de arco. En particular, supongamos que se puede eliminar el parámetro, lo que resulta en una función $y = F(x)$. Entonces $y(t) = F(x(t))$ y la regla de la cadena da $y'(t) = F'(x(t))\,x'(t)$. Sustituyendo esto en la Ecuación 7.5 se obtiene

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(F'(x)\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left(1 + \left(F'(x)\right)^2\right)}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x'(t) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dt. \end{aligned}$$

Aquí hemos asumido que $x'(t) > 0$, lo cual es una suposición razonable. La regla de la cadena da $dx = x'(t)\ dt$, y suponiendo que $a = x(t_1)$ y $b = x(t_2)$ obtenemos la fórmula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

que es la fórmula de la longitud de arco obtenida en la Introducción a las aplicaciones de la integración.

EJEMPLO 7.8

Hallar la longitud de arco de una curva paramétrica

Halle la longitud de arco del semicírculo definido por las ecuaciones

$$x(t) = 3\cos t, \quad y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Solución

Los valores $t = 0$ a $t = \pi$ trazan la curva roja en la Figura 7.23. Para determinar su longitud, utilice la Ecuación 7.5:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{(-3\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2 t + 9\cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{9\left(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t\right)}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} 3dt = 3t\big|_0^{\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

Observe que la fórmula de la longitud de arco de un semicírculo es πr y el radio de este círculo es 3. Este es un gran ejemplo de cómo utilizar el cálculo para derivar una fórmula conocida de una cantidad geométrica.

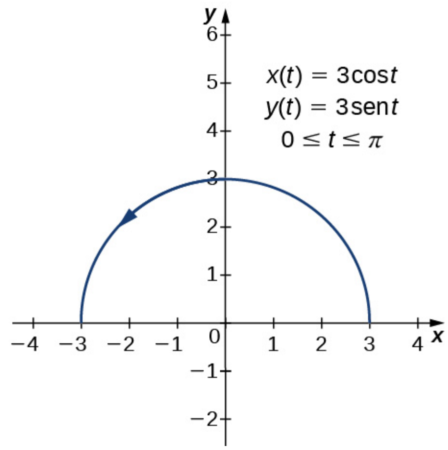


Figura 7.24 La longitud de arco del semicírculo es igual a su radio por π.

7.8 Halle la longitud de arco de la curva definida por las ecuaciones

$$x(t) = 3t^2, \quad y(t) = 2t^3, \quad 1 \le t \le 3.$$

Volvemos ahora al problema planteado al principio de la sección sobre una pelota de béisbol que sale de la mano del lanzador. Ignorando el efecto de la resistencia del aire (¡a menos que sea una pelota curva!), la pelota recorre una trayectoria parabólica. Suponiendo que la mano del lanzador está en el origen y que la pelota se desplaza de izquierda a derecha en la dirección del eje *x* positivo, las ecuaciones paramétricas de esta curva pueden escribirse como

$$x(t) = 140t, \quad y(t) = -16t^2 + 2t$$

donde *t* representa el tiempo. Primero calculamos la distancia que recorre la pelota en función del tiempo. Esta distancia está representada por la longitud de arco. Podemos modificar ligeramente la fórmula de la longitud de arco. Primero hay que reescribir las funciones $x(t)$ y de $y(t)$ utilizando *v* como variable independiente, para eliminar cualquier confusión con el parámetro *t*:

$$x(v) = 140v, \quad y(v) = -16v^2 + 2v.$$

Luego escribimos la fórmula de la longitud de arco de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2}\,dv \\ &= \int_0^t \sqrt{140^2 + (-32v+2)^2}\,dv. \end{aligned}$$

La variable *v* actúa como una variable ficticia que desaparece después de la integración, dejando la longitud de arco en función del tiempo *t*. Para integrar esta expresión podemos utilizar una fórmula del Apéndice A,

$$\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{a^2+u^2}\right| + C.$$

Hemos establecido $a = 140$ y $u = -32v + 2$. Esto da $du = -32dv$, así que $dv = -\frac{1}{32}du$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \sqrt{140^2 + (-32v+2)^2}\,dv &= -\frac{1}{32}\int \sqrt{a^2+u^2}\,du \\ &= -\frac{1}{32}\left[\begin{array}{l} \frac{(-32v+2)}{2}\sqrt{140^2+(-32v+2)^2} \\ +\frac{140^2}{2}\ln\left|(-32v+2) + \sqrt{140^2+(-32v+2)^2}\right| \end{array}\right] + C \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{1}{32}\left[\frac{(-32t+2)}{2}\sqrt{140^2+(-32t+2)^2}+\frac{140^2}{2}\ln\left|(-32t+2)+\sqrt{140^2+(-32t+2)^2}\right|\right] \\ &+\frac{1}{32}\left[\sqrt{140^2+2^2}+\frac{140^2}{2}\ln\left|2+\sqrt{140^2+2^2}\right|\right] \\ &= \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{32}\right)\sqrt{1024t^2-128t+19604}-\frac{1.225}{4}\ln\left|(-32t+2)+\sqrt{1024t^2-128t+19604}\right| \\ &+\frac{\sqrt{19604}}{32}+\frac{1.225}{4}\ln\left(2+\sqrt{19604}\right). \end{aligned}$$

Esta función representa la distancia recorrida por la pelota en función del tiempo. Para calcular la velocidad, tome la derivada de esta función con respecto a t. Aunque esto puede parecer una tarea desalentadora, es posible obtener la respuesta directamente del teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)\,du = f(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s'(t) &= \frac{d}{dt}[s(t)] \\ &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t \sqrt{140^2+(-32v+2)^2}\,dv\right] \\ &= \sqrt{140^2+(-32t+2)^2} \\ &= \sqrt{1024t^2-128t+19604} \\ &= 2\sqrt{256t^2-32t+4.901}. \end{aligned}$$

Un tercio de segundo después de que la pelota salga de la mano del lanzador, la distancia que recorre es igual a

$$\begin{aligned} s\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1/3}{2}-\frac{1}{32}\right)\sqrt{1024\left(\frac{1}{3}\right)^2-128\left(\frac{1}{3}\right)+19604} \\ &-\frac{1.225}{4}\ln\left|\left(-32\left(\frac{1}{3}\right)+2\right)+\sqrt{1024\left(\frac{1}{3}\right)^2-128\left(\frac{1}{3}\right)+19604}\right| \\ &+\frac{\sqrt{19604}}{32}+\frac{1.225}{4}\ln\left(2+\sqrt{19604}\right) \\ &\approx 46{,}69 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Este valor se encuentra a poco más de tres cuartos del camino hacia la base del bateador. La velocidad de la pelota es

$$s'\left(\frac{1}{3}\right) = 2\sqrt{256\left(\frac{1}{3}\right)^2-16\left(\frac{1}{3}\right)+4.901} \approx 140{,}34 \text{ ft/s.}$$

Esta velocidad se traduce en unas 95 mph, una bola rápida de las grandes ligas.

Área superficial generada por una curva paramétrica

Recordemos el problema de hallar el área superficial de un volumen de revolución. En Longitud de la curva y área superficial, derivamos una fórmula para hallar el área superficial de un volumen generado por una función $y = f(x)$ de $x = a$ a $x = b$, que giraba alrededor del eje x:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Ahora consideramos un volumen de revolución generado al girar una curva definida paramétricamente $x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b$ alrededor del eje x como se muestra en la siguiente figura.

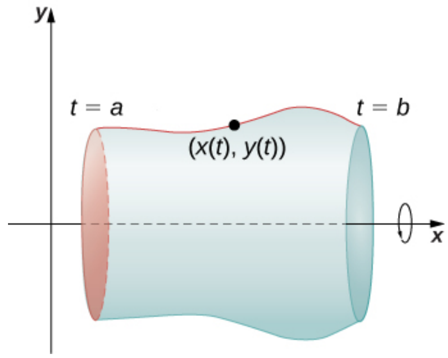


Figura 7.25 Una superficie de revolución generada por una curva definida paramétricamente.

La fórmula análoga para una curva definida paramétricamente es

$$S = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt \tag{7.6}$$

siempre que $y(t)$ no sea negativa en $[a, b]$.

EJEMPLO 7.9

Cálculo del área superficial

Halle el área superficial de una esfera de radio *r* centrada en el origen.

Solución

Partimos de la curva definida por las ecuaciones

$$x(t) = r \cos t, \quad y(t) = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Esto genera un semicírculo superior de radio *r* centrado en el origen como se muestra en el siguiente gráfico.

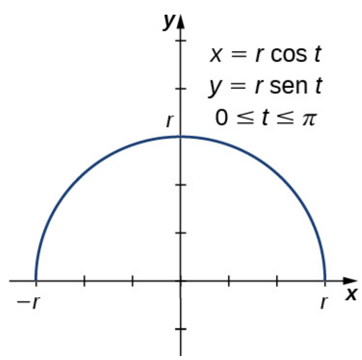


Figura 7.26 Un semicírculo generado por ecuaciones paramétricas.

Cuando esta curva gira alrededor del eje *x*, genera una esfera de radio *r*. Para calcular el área superficial de la esfera, utilizamos la Ecuación 7.6:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r \operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t}\,dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2\left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)}\,dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen} t\,dt \\ &= 2\pi r^2 (-\cos t|_0^\pi) \\ &= 2\pi r^2 (-\cos \pi + \cos 0) \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Esta es, de hecho, la fórmula del área superficial de una esfera.

7.9 Halle el área superficial generada cuando la curva plana definida por las ecuaciones

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = t^2, \quad 0 \le t \le 1$$

se gira alrededor del eje *x*.

SECCIÓN 7.2 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, cada conjunto de ecuaciones paramétricas representa una línea. Sin eliminar el parámetro, halle la pendiente de cada línea.

62. $x = 3 + t, \quad y = 1 - t$

63. $x = 8 + 2t, \quad y = 1$

64. $x = 4 - 3t, \quad y = -2 + 6t$

65. $x = -5t + 7, \quad y = 3t - 1$

En los siguientes ejercicios, determine la pendiente de la línea tangente y, a continuación, halle la ecuación de la línea tangente en el valor dado del parámetro.

66. $x = 3 \operatorname{sen} t, \quad y = 3\cos t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

67. $x = \cos t, \quad y = 8 \operatorname{sen} t, t = \frac{\pi}{2}$

68. $x = 2t, \quad y = t^3, \quad t = -1$

69. $x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t - \frac{1}{t}, \quad t = 1$

70. $x = \sqrt{t}, \quad y = 2t, \quad t = 4$

En los siguientes ejercicios, halle todos los puntos de la curva que tengan la pendiente dada.

71. $x = 4\cos t, \quad y = 4 \operatorname{sen} t,$ pendiente = 0,5

72. $x = 2\cos t, \quad y = 8 \operatorname{sen} t,$ pendiente $= -1$

73. $x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t - \frac{1}{t},$ pendiente $= 1$

74. $x = 2 + \sqrt{t}, \quad y = 2 - 4t,$ pendiente $= 0$

En los siguientes ejercicios, escriba la ecuación de la línea tangente en coordenadas cartesianas para el parámetro t dado.

75. $x = e^{\sqrt{t}}, \quad y = 1 - \ln t^2, \quad t = 1$

76. $x = t \ln t, \quad y = \text{sen}^2 t, t = \frac{\pi}{4}$

77. $x = e^t, \quad y = (t-1)^2, \quad \text{en}(1, 1)$ grandes.

78. Para $x = \text{sen}(2t), y = 2\,\text{sen}\,t$ donde $0 \le t < 2\pi$. Halle todos los valores de t en los que existe una línea tangente horizontal.

79. Para $x = \text{sen}(2t), y = 2\,\text{sen}\,t$ donde $0 \le t < 2\pi$. Halle todos los valores de t en los que existe una línea tangente vertical.

80. Halle todos los puntos de la curva $x = 4\,\text{sen}(t), y = 4\cos(t)$ que tienen la pendiente $0{,}5$

81. Halle $\frac{dy}{dx}$ para $x = \text{sen}(t), y = \cos(t)$.

82. Halle la ecuación de la línea tangente a $x = \text{sen}(t), y = \cos(t)$ en $t = \frac{\pi}{4}$.

83. Para la curva $x = 4t, y = 3t - 2$, halle la pendiente y la concavidad de la curva en $t = 3$.

84. Para la curva paramétrica cuya ecuación es $x = 4\cos\theta, y = 4\,\text{sen}\,\theta$, halle la pendiente y la concavidad de la curva en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

85. Halle la pendiente y la concavidad de la curva cuya ecuación es $x = 2 + \sec\theta, y = 1 + 2\tan\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

86. Halle todos los puntos de la curva $x = t + 4, y = t^3 - 3t$ en los que hay tangentes verticales y horizontales.

87. Halle todos los puntos de la curva $x = \sec\theta, y = \tan\theta$ en los que hay tangentes horizontales y verticales.

En los siguientes ejercicios, calcule d^2y/dx^2.

88. $x = t^4 - 1, \quad y = t - t^2$

89. $x = \text{sen}(\pi t), \quad y = \cos(\pi t)$ grandes.

90. $x = e^{-t}, \quad y = t\,e^{2t}$

En los siguientes ejercicios, halle los puntos de la curva en los que la línea tangente es horizontal o vertical.

91. $x = t(t^2 - 3), \quad y = 3(t^2 - 3)$

92. $x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

En los siguientes ejercicios, calcule dy/dx al valor del parámetro.

93. $x = \cos t, \quad y = \text{sen}\,t, \quad t = \frac{3\pi}{4}$

94. $x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4, \quad t = 9$

95. $x = 4\cos(2\pi s), \quad y = 3\,\text{sen}\,(2\pi s), \quad s = -\frac{1}{4}$

En los siguientes ejercicios, calcule d^2y/dx^2 en el punto dado sin eliminar el parámetro.

96. $x = \frac{1}{2}t^2, \quad y = \frac{1}{3}t^3, \quad t = 2$

97. $x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4, \quad t = 1$

98. Halle los intervalos t en los que la curva $x = 3t^2, y = t^3 - t$ es cóncava hacia arriba y hacia abajo.

99. Determine la concavidad de la curva $x = 2t + \ln t, y = 2t - \ln t$.

100. Dibuje y halle el área bajo un arco de la cicloide $x = r(\theta - \text{sen}\,\theta), y = r(1 - \cos\theta)$.

101. Halle el área delimitada por la curva $x = \cos t, y = e^t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y las líneas $y = 1$ y $x = 0$.

102. Halle el área encerrada por la elipse $x = a\cos\theta, y = b\,\text{sen}\,\theta, 0 \leq \theta < 2\pi$.

103. Halle el área de la región delimitada por $x = 2\,\text{sen}^2\theta, y = 2\,\text{sen}^2\theta\tan\theta$, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

En los siguientes ejercicios, halle el área de las regiones delimitadas por las curvas paramétricas y los valores indicados del parámetro.

104. $x = 2\cot\theta, y = 2\,\text{sen}^2\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$

105. **[T]** $x = 2a\cos t - a\cos(2t), y = 2a\,\text{sen}\,t - a\,\text{sen}(2t), 0 \leq t < 2\pi$

106. **[T]** $x = a\,\text{sen}(2t), y = b\,\text{sen}(t), 0 \leq t < 2\pi$ (el "reloj de arena")

107. **[T]** $x = 2a\cos t - a\,\text{sen}(2t), y = b\,\text{sen}\,t, 0 \leq t < 2\pi$ (la "lágrima")

En los siguientes ejercicios, halle la longitud de arco de la curva en el intervalo indicado del parámetro.

108. $x = 4t + 3, \quad y = 3t - 2, \quad 0 \leq t \leq 2$

109. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

110. $x = \cos(2t), \quad y = \text{sen}(2t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

111. $x = 1 + t^2, \quad y = (1 + t)^3, \quad 0 \leq t \leq 1$

112. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\,\text{sen}\,t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Utilice un CAS para esto y exprese la respuesta como un decimal redondeado a tres decimales).

113. $x = a\cos^3\theta, y = a\,\text{sen}^3\theta$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ (la hipocicloide)

114. Halle la longitud de un arco de la cicloide $x = 4(t - \text{sen}\,t), y = 4(1 - \cos t)$.

115. Calcule la distancia recorrida por una partícula con posición (x, y) a medida que t varía en el intervalo de tiempo dado: $x = \text{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$.

116. Halle la longitud de un arco de la cicloide $x = \theta - \text{sen}\,\theta, y = 1 - \cos\theta$.

117. Demuestre que la longitud total de la elipse $x = 4\,\text{sen}\,\theta, y = 3\cos\theta$ es $L = 16\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\text{sen}^2\theta}\,d\theta$, donde $e = \frac{c}{a}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

118. Calcule la longitud de la curva $x = e^t - t, y = 4e^{t/2}, -8 \leq t \leq 3$.

En los siguientes ejercicios, halle el área superficial que se obtiene cuando se gira la curva dada alrededor del eje x.

119. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 1$

120. $x = a\cos^3\theta, \quad y = a\,\text{sen}^3\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

121. **[T]** Utilice un CAS para hallar el área superficial generada al girar $x = t + t^3, y = t - \frac{1}{t^2}, 1 \le t \le 2$ alrededor del eje *x*. (Respuesta redondeada a tres decimales).

122. Halle el área superficial obtenida al girar $x = 3t^2, y = 2t^3, 0 \le t \le 5$ alrededor del eje *y*.

123. Halle el área superficial generada al girar $x = t^2, y = 2t, 0 \le t \le 4$ alrededor del eje *x*.

124. Halle el área superficial generada al girar $x = t^2, y = 2t^2, 0 \le t \le 1$ alrededor del eje *y*.

7.3 Coordenadas polares

Objetivos de aprendizaje

7.3.1 Localizar puntos en un plano utilizando coordenadas polares.
7.3.2 Convertir puntos entre coordenadas rectangulares y polares.
7.3.3 Dibujar curvas polares a partir de ecuaciones dadas.
7.3.4 Convertir ecuaciones entre coordenadas rectangulares y polares.
7.3.5 Identificar la simetría en curvas y ecuaciones polares.

El sistema de coordenadas rectangulares (o plano cartesiano) proporciona un medio para asignar puntos a pares ordenados y pares ordenados a puntos. Esto se llama un *mapeo biunívoco* de puntos en el plano a pares ordenados. El sistema de coordenadas polares ofrece un método alternativo para asignar puntos a pares ordenados. En esta sección vemos que, en algunas circunstancias, las coordenadas polares pueden ser más útiles que las coordenadas rectangulares.

Definición de coordenadas polares

Para hallar las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas polares, considere la Figura 7.27. El punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) . El segmento de línea que conecta el origen con el punto P mide la distancia desde el origen hasta P y tiene longitud r. El ángulo entre el eje x positivo y el segmento de línea tiene medida θ. Esta observación sugiere una correspondencia natural entre el par de coordenadas (x, y) y los valores r y θ. Esta correspondencia es la base del **sistema de coordenadas polares**. Observe que cada punto del plano cartesiano tiene dos valores (de ahí el término *par ordenado*) asociados. En el sistema de coordenadas polares, cada punto tiene también dos valores asociados: r y θ.

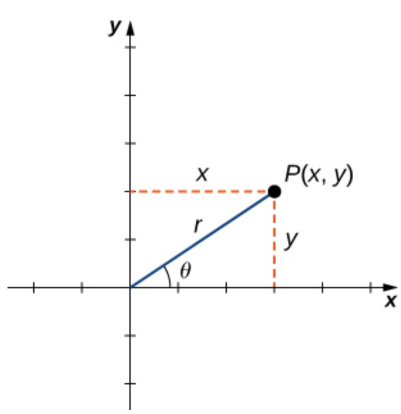


Figura 7.27 Un punto arbitrario en el plano cartesiano.

Utilizando la trigonometría del triángulo rectángulo, las siguientes ecuaciones son verdaderas para el punto P:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ así que } x = r\cos\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \text{ así que } y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Además,

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Cada punto (x, y) en el sistema de coordenadas cartesianas puede representarse, por tanto, como un par ordenado (r, θ) en el sistema de coordenadas polares. La primera coordenada se llama **coordenada radial** y la segunda coordenada se llama **coordenada angular**. Cada punto del plano puede representarse de esta forma.

Observe que la ecuación $\tan\theta = y/x$ tiene un número infinito de soluciones para cualquier par ordenado (x, y) . Sin embargo, si restringimos las soluciones a valores entre 0 y 2π entonces podemos asignar una solución única al cuadrante en el que el punto original (x, y) se encuentra. Entonces el valor correspondiente de r es positivo, por lo que $r^2 = x^2 + y^2$.

Teorema 7.4

Conversión de puntos entre sistemas de coordenadas

Dado un punto P en el plano con coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ) , las siguientes fórmulas de conversión son válidas:

$$x = r\cos\theta \text{ y } y = r\operatorname{sen}\theta, \tag{7.7}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{7.8}$$

Estas fórmulas pueden utilizarse para convertir de coordenadas rectangulares a polares o de polares a rectangulares.

EJEMPLO 7.10

Conversión entre coordenadas rectangulares y polares

Convierta cada uno de los siguientes puntos en coordenadas polares.

a. $(1, 1)$ grandes.
b. $(-3, 4)$ grandes.
c. $(0, 3)$ grandes.
d. $(5\sqrt{3}, -5)$

Convierta cada uno de los siguientes puntos en coordenadas rectangulares.

d. $(3, \pi/3)$ grandes.
e. $(2, 3\pi/2)$ grandes.
f. $(6, -5\pi/6)$

Solución

a. Utilice la sustitución en $x = 1$ y $y = 1$ en la Ecuación 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= 1^2 + 1^2 \\ r &= \sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \tan\theta &= \tfrac{y}{x} \\ &= \tfrac{1}{1} = 1 \\ \theta &= \tfrac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, este punto se puede representar como $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ en coordenadas polares.

b. Utilice la sustitución en $x = -3$ y $y = 4$ en la Ecuación 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (-3)^2 + (4)^2 \\ r &= 5 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= -\frac{4}{3} \\ \theta &= -\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \\ &\approx 2.21. \end{aligned}$$

Por lo tanto, este punto se puede representar como $(5, 2{,}21)$ en coordenadas polares.

c. Utilice la sustitución en $x = 0$ y $y = 3$ en la Ecuación 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (3)^2 + (0)^2 \\ &= 9 + 0 \\ r &= 3 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{3}{0}. \end{aligned}$$

La aplicación directa de la segunda ecuación conduce a la división entre cero. Graficando el punto $(0, 3)$ en el sistema de coordenadas rectangulares revela que el punto está situado en el eje *y* positivo. El ángulo entre el eje *x* positivo y el eje *y* positivo es $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, este punto se puede representar como $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ en coordenadas polares.

d. Utilice la sustitución en $x = 5\sqrt{3}$ y $y = -5$ en la Ecuación 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= \left(5\sqrt{3}\right)^2 + (-5)^2 \\ &= 75 + 25 \\ r &= 10 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{-5}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta &= -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, este punto se puede representar como $\left(10, -\frac{\pi}{6}\right)$ en coordenadas polares.

e. Utilice la sustitución en $r = 3$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$ en la Ecuación 7.7:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} y &= r\,\text{sen}\,\theta \\ &= 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, este punto se puede representar como $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ en coordenadas rectangulares.

f. Utilice la sustitución en $r = 2$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ en la Ecuación 7.7:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 2(0) = 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} y &= r\,\text{sen}\,\theta \\ &= 2\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 2(-1) = -2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, este punto se puede representar como $(0, -2)$ en coordenadas rectangulares.

g. Utilice la sustitución en $r = 6$ y $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ en la Ecuación 7.7:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 6\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{3} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} y &= r\,\text{sen}\,\theta \\ &= 6\,\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 6\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, este punto se puede representar como $\left(-3\sqrt{3}, -3\right)$ en coordenadas rectangulares.

7.10 Convierta $(-8, -8)$ en coordenadas polares y $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ en coordenadas rectangulares.

La representación polar de un punto no es única. Por ejemplo, las coordenadas polares $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(2, \frac{7\pi}{3}\right)$ representan ambas el punto $\left(1, \sqrt{3}\right)$ en el sistema rectangular. Además, el valor de r puede ser negativo. Por lo tanto, el punto con coordenadas polares $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ también representa el punto $\left(1, \sqrt{3}\right)$ en el sistema rectangular, como podemos ver utilizando la Ecuación 7.8:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= -2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} y &= r\,\text{sen}\,\theta \\ &= -2\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Cada punto del plano tiene un número infinito de representaciones en coordenadas polares. Sin embargo, cada punto del plano solo tiene una representación en el sistema de coordenadas rectangulares.

Tenga en cuenta que la representación polar de un punto en el plano también tiene una interpretación visual. En particular, r es la distancia dirigida que el punto tiene al origen y θ mide el ángulo que forma el segmento de línea desde el origen hasta el punto con el eje x positivo. Los ángulos positivos se miden en el sentido contrario a las agujas del reloj y los negativos en el sentido de las agujas del reloj. El sistema de coordenadas polares aparece en la siguiente figura.

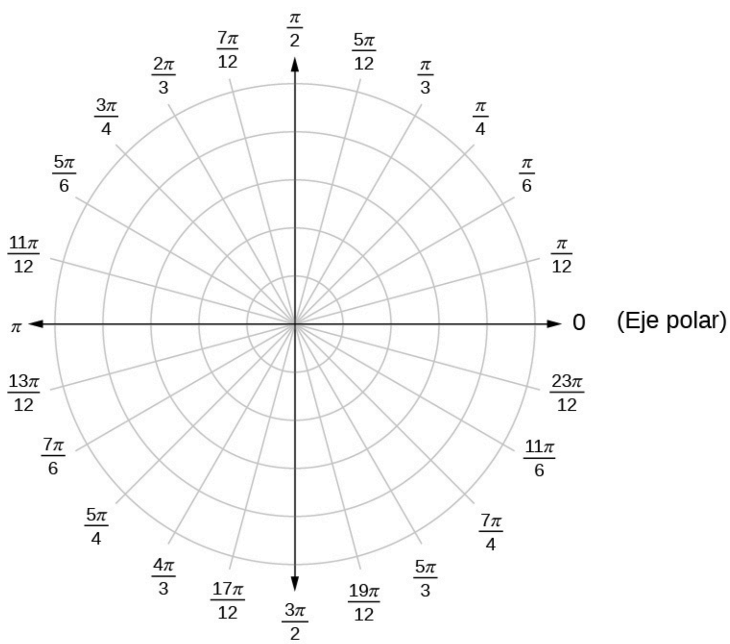


Figura 7.28 El sistema de coordenadas polares.

El segmento de línea que parte del centro del gráfico hacia la derecha (llamado eje *x* positivo en el sistema cartesiano) es el **eje polar**. El punto central es el **polo**, u origen, del sistema de coordenadas y corresponde a $r = 0$. El círculo más interno que se muestra en la Figura 7.28 contiene todos los puntos a una distancia de 1 unidad del polo, y está representado por la ecuación $r = 1$. Entonces $r = 2$ es el conjunto de puntos a 2 unidades del polo, y así sucesivamente. Los segmentos de línea que emanan del polo corresponden a ángulos fijos. Para trazar un punto en el sistema de coordenadas polares, comience con el ángulo. Si el ángulo es positivo, mida el ángulo desde el eje polar en sentido contrario a las agujas del reloj. Si es negativo, mida en el sentido de las agujas del reloj. Si el valor de r es positivo, mueve esa distancia a lo largo de la semirrecta del ángulo. Si es negativo, mueva a lo largo de la semirrecta opuesta a la semirrecta terminal del ángulo dado.

EJEMPLO 7.11

Trazado de puntos en el plano polar

Trace cada uno de los siguientes puntos en el plano polar.

a. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ grandes.
b. $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$ grandes.
c. $\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$

Solución

Los tres puntos se representan en la siguiente figura.

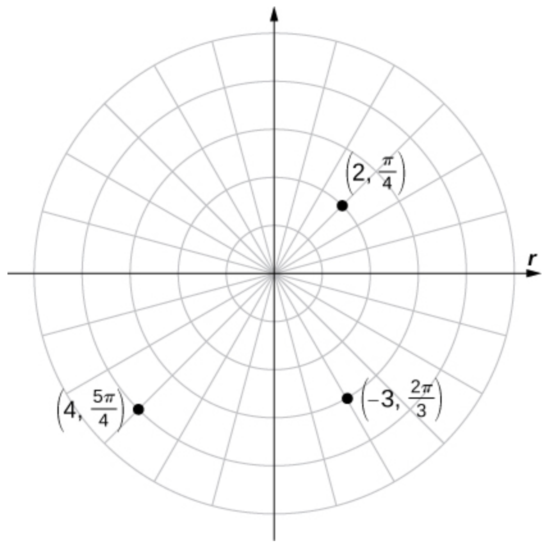


Figura 7.29 Tres puntos trazados en el sistema de coordenadas polares.

7.11 Trace $\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ y $\left(-3, -\frac{7\pi}{2}\right)$ en el plano polar.

Curvas polares

Ahora que sabemos cómo trazar puntos en el sistema de coordenadas polares, podemos hablar de cómo trazar curvas. En el sistema de coordenadas rectangulares, podemos graficar una función $y = f(x)$ y crear una curva en el plano cartesiano. De forma similar, podemos graficar una curva generada por una función $r = f(\theta)$.

La idea general de graficar una función en coordenadas polares es la misma que la de graficar una función en coordenadas rectangulares. Comience con una lista de valores para la variable independiente (θ en este caso) y calcule los valores correspondientes de la variable dependiente r. Este proceso genera una lista de pares ordenados, que pueden ser trazados en el sistema de coordenadas polares. Por último, conecte los puntos y aproveche los patrones que puedan aparecer. La función puede ser periódica, por ejemplo, lo que indica que solo se necesita un número limitado de valores para la variable independiente.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia de resolución de problemas: Trazado de una curva en coordenadas polares

1. Cree una tabla con dos columnas. La primera columna es para θ, y la segunda columna es para r.
2. Cree una lista de valores para θ.
3. Calcule los valores r correspondientes para cada θ.
4. Trace cada par ordenado (r, θ) en los ejes de coordenadas.
5. Conecte los puntos y busque un patrón.

MEDIOS

Vea este video (http://www.openstax.org/l/20_polarcurves) para obtener más información sobre el trazado de curvas polares.

EJEMPLO 7.12

Graficar una función en coordenadas polares

Grafique la curva definida por la función $r = 4 \operatorname{sen} \theta$. Identifique la curva y reescriba la ecuación en coordenadas rectangulares.

Solución

Como la función es un múltiplo de la función de seno, es periódica con periodo 2π, por lo que hay que utilizar los valores de θ entre 0 y 2π. El resultado de los pasos del 1 al 3 aparece en la siguiente tabla. La Figura 7.30 muestra el gráfico basado en esta tabla.

θ	$r = 4 \operatorname{sen} \theta$		θ	$r = 4 \operatorname{sen} \theta$
0	0		π	0
$\frac{\pi}{6}$	2		$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{\pi}{4}$	$2\sqrt{2} \approx 2{,}8$		$\frac{5\pi}{4}$	$-2\sqrt{2} \approx -2{,}8$
$\frac{\pi}{3}$	$2\sqrt{3} \approx 3{,}4$		$\frac{4\pi}{3}$	$-2\sqrt{3} \approx -3{,}4$
$\frac{\pi}{2}$	4		$\frac{3\pi}{2}$	-4
$\frac{2\pi}{3}$	$2\sqrt{3} \approx 3{,}4$		$\frac{5\pi}{3}$	$-2\sqrt{3} \approx -3{,}4$
$\frac{3\pi}{4}$	$2\sqrt{2} \approx 2{,}8$		$\frac{7\pi}{4}$	$-2\sqrt{2} \approx -2{,}8$
$\frac{5\pi}{6}$	2		$\frac{11\pi}{6}$	-2
			2π	0

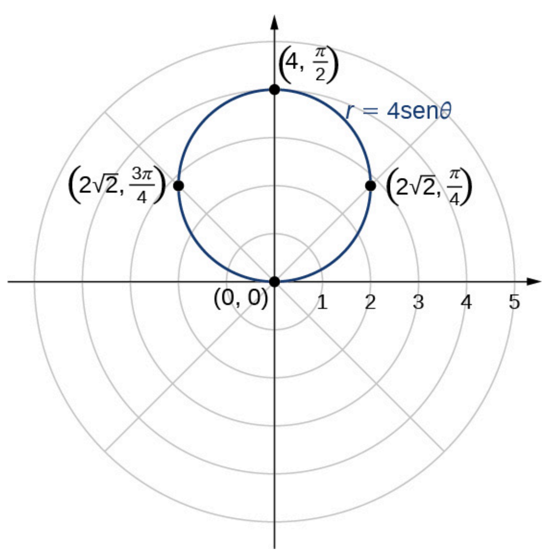


Figura 7.30 El gráfico de la función $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es un círculo.

Este es el gráfico de un círculo. La ecuación $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ se puede convertir en coordenadas rectangulares multiplicando primero ambos lados por r. Esto da la ecuación $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$. A continuación, utilice los hechos que $r^2 = x^2 + y^2$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$. Esto da $x^2 + y^2 = 4y$. Para poner esta ecuación en forma estándar, reste $4y$ de ambos lados de la ecuación y

complete el cuadrado:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4y &= 0 \\ x^2+\left(y^2-4y\right) &= 0 \\ x^2+\left(y^2-4y+4\right) &= 0+4 \\ x^2+(y-2)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de un círculo con radio 2 y centro $(0, 2)$ en el sistema de coordenadas rectangulares.

7.12 Cree un gráfico de la curva definida por la función $r = 4 + 4\cos\theta$.

El gráfico en el Ejemplo 7.12 era el de un círculo. La ecuación del círculo puede transformarse en coordenadas rectangulares utilizando las fórmulas de transformación de coordenadas en la Ecuación 7.8. El Ejemplo 7.14 da algunos ejemplos más de funciones para transformar de coordenadas polares a rectangulares.

EJEMPLO 7.13

Transformación de ecuaciones polares a coordenadas rectangulares

Reescriba cada una de las siguientes ecuaciones en coordenadas rectangulares e identifique el gráfico.

a. $\theta = \frac{\pi}{3}$
b. $r = 3$
c. $r = 6\cos\theta - 8\,\text{sen}\,\theta$

Solución

a. Tome la tangente de ambos lados. Esto da $\tan\theta = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. Dado que $\tan\theta = y/x$ podemos sustituir el lado izquierdo de esta ecuación por y/x. Esto da como resultado $y/x = \sqrt{3}$, que se puede reescribir como $y = x\sqrt{3}$. Es la ecuación de una línea recta que pasa por el origen con pendiente $\sqrt{3}$. En general, cualquier ecuación polar de la forma $\theta = K$ representa una línea recta que pasa por el polo con pendiente igual a $\tan K$.
b. Primero, eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación. Esto da $r^2 = 9$. Reemplace a continuación r^2 con $x^2 + y^2$. Esto da la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, que es la ecuación de un círculo centrado en el origen con radio 3. En general, cualquier ecuación polar de la forma $r = k$ donde k es una constante positiva representa un círculo de radio k centrado en el origen. (*Nota*: Al elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación es posible introducir nuevos puntos sin querer. Esto debe tenerse siempre en cuenta. Sin embargo, en este caso no introducimos puntos nuevos). Por ejemplo, $\left(-3, \frac{\pi}{3}\right)$ es el mismo punto que $\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$.)
c. Multiplique ambos lados de la ecuación por r. Esto lleva a $r^2 = 6r\cos\theta - 8r\,\text{sen}\,\theta$. A continuación, utilice las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

Esto da

$$\begin{aligned} r^2 &= 6\,(r\cos\theta) - 8\,(r\,\text{sen}\,\theta) \\ x^2+y^2 &= 6x - 8y. \end{aligned}$$

Para poner esta ecuación en forma estándar, primero hay que mover las variables del lado derecho de la ecuación al lado izquierdo, y luego completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 6x-8y \\ x^2-6x+y^2+8y &= 0 \\ \left(x^2-6x\right)+\left(y^2+8y\right) &= 0 \\ \left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2+8y+16\right) &= 9+16 \\ (x-3)^2+(y+4)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en $(3, -4)$ y radio 5. Observe que el círculo pasa por el origen ya que el

centro está a 5 unidades.

7.13 Reescriba la ecuación $r = \sec\theta \tan\theta$ en coordenadas rectangulares e identifique su gráfico.

Ya hemos visto varios ejemplos de dibujo de gráficos de curvas definidas por **ecuaciones polares**. En las tablas siguientes se ofrece un resumen de algunas curvas comunes. En cada ecuación, *a* y *b* son constantes arbitrarias.

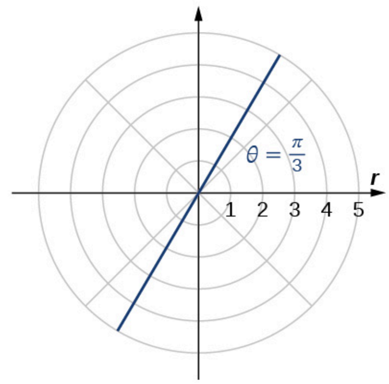
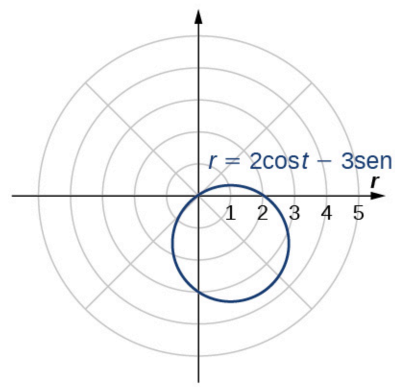
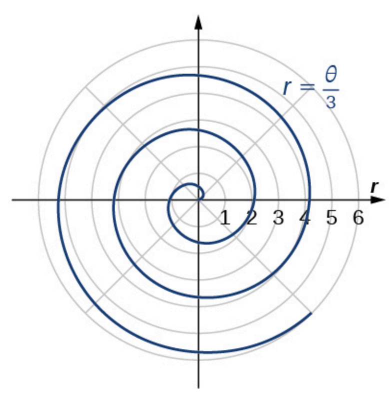
Nombre	Ecuación	Ejemplo
Línea que pasa por el polo con pendiente tan *K*	$\theta = K$	
Círculo	$r = a\cos\theta + b\text{sen}\theta$	
Espiral	$r = a + b\theta$	

Figura 7.31

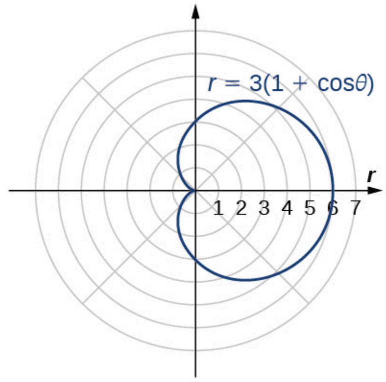
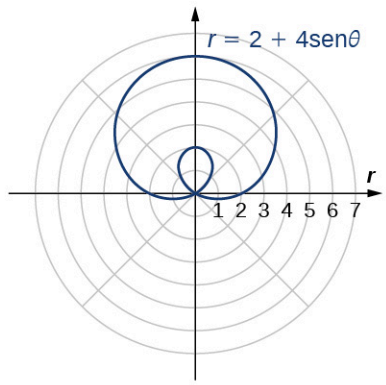
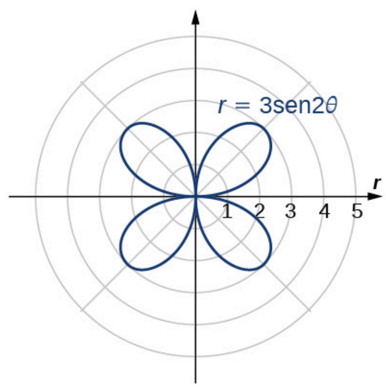
Nombre	Ecuación	Ejemplo
Cardioide	$r = a(1 + \cos\theta)$ $r = a(1 - \cos\theta)$ $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$ $r = a(1 - \operatorname{sen}\theta)$	
Caracol	$r = a\cos\theta + b$ $r = a\operatorname{sen}\theta + b$	
Rosa	$r = a\cos(b\theta)$ $r = a\operatorname{sen}(b\theta)$	

Figura 7.32

Una **cardioide** es un caso especial de un **caracol**, en el que $a = b$ o $a = -b$. La **rosa** es una curva muy interesante. Observe que el gráfico de $r = 3\,\operatorname{sen}\,2\theta$ tiene cuatro pétalos. Sin embargo, el gráfico de $r = 3\,\operatorname{sen}\,3\theta$ tiene tres pétalos como se muestra.

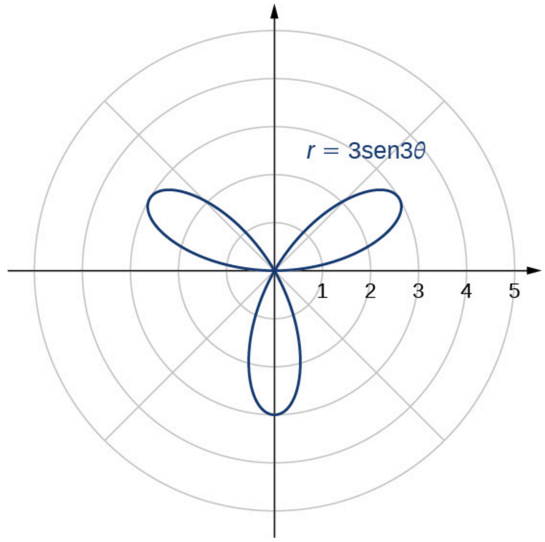


Figura 7.33 Gráfico de $r = 3 \text{ sen } 3\theta$.

Si el coeficiente de θ es par, el gráfico tiene el doble de pétalos que el coeficiente. Si el coeficiente de θ es impar, entonces el número de pétalos es igual al coeficiente. Se le anima a explorar por qué ocurre esto. Los gráficos son aún más interesantes cuando el coeficiente de θ no es un número entero. Por ejemplo, si es racional, entonces la curva es cerrada; es decir, termina finalmente donde empezó (Figura 7.34(a)). Sin embargo, si el coeficiente es irracional, la curva nunca se cierra (Figura 7.34(b)). Aunque pueda parecer que la curva está cerrada, un examen más detallado revela que los pétalos situados justo encima del eje *x* positivo son ligeramente más gruesos. Esto se debe a que el pétalo no coincide del todo con el punto de partida.

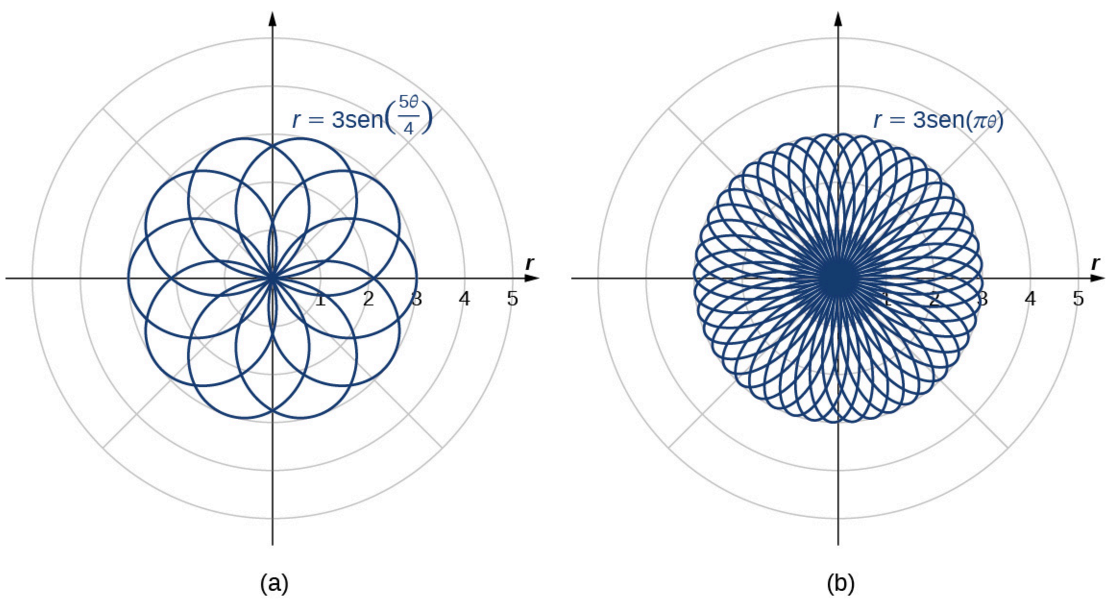


Figura 7.34 Gráficos de rosa polar de funciones con (a) coeficiente racional y (b) coeficiente irracional. Observe que la rosa de la parte (b) llenaría realmente todo el círculo si se trazara en su totalidad.

Dado que la curva definida por el gráfico de $r = 3 \text{ sen } (\pi\theta)$ nunca se cierra, la curva representada en la Figura 7.34(b) es solo una representación parcial. De hecho, este es un ejemplo de **curva de relleno de espacio**. Una curva de relleno de espacio es aquella que de hecho ocupa un subconjunto bidimensional del plano real. En este caso la curva ocupa el círculo de radio 3 centrado en el origen.

EJEMPLO 7.14

Inicio del capítulo: Describir una espiral

Recordemos el Nautilus pompilius que se presentó en el primer capítulo. Esta criatura muestra una espiral cuando se

corta la mitad del caparazón exterior. Es posible describir una espiral utilizando coordenadas rectangulares. La Figura 7.35 muestra una espiral en coordenadas rectangulares. ¿Cómo podemos describir esta curva matemáticamente?

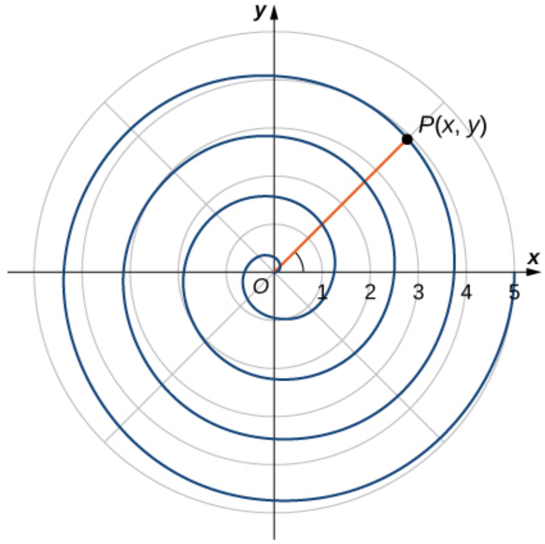


Figura 7.35 ¿Cómo podemos describir matemáticamente un gráfico en espiral?

Solución

A medida que el punto *P* recorre la espiral en sentido contrario a las agujas del reloj, su distancia *d* al origen aumenta. Supongamos que la distancia *d* es un múltiplo constante *k* del ángulo θ que el segmento de línea *OP* forma con el eje *x* positivo. Por lo tanto, $d(P, O) = k\theta$, donde O es el origen. Ahora utilice la fórmula de distancia y algo de trigonometría:

$$\begin{aligned} d(P, O) &= k\theta \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} &= k \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= k \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{k} \\ y &= x \tan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{k}\right). \end{aligned}$$

Si bien esta ecuación describe la espiral, no es posible resolverla directamente ni para *x* ni para *y*. Sin embargo, si utilizamos coordenadas polares, la ecuación se simplifica mucho. En particular, $d(P, O) = r$, y θ es la segunda coordenada. Por lo tanto, la ecuación de la espiral se convierte en $r = k\theta$. Tenga en cuenta que cuando $\theta = 0$ también tenemos $r = 0$, por lo que la espiral emana del origen. Podemos eliminar esta restricción añadiendo una constante a la ecuación. Entonces la ecuación de la espiral se convierte en $r = a + k\theta$ para constantes arbitrarias a y k. Se denomina espiral de Arquímedes, en honor al matemático griego Arquímedes.

Otro tipo de espiral es la espiral logarítmica, descrita por la función $r = a.\, b^{\theta}$. Un gráfico de la función $r = 1{,}2\left(1{,}25^{\theta}\right)$ se encuentra en la Figura 7.36. Esta espiral describe la forma de la concha del *Nautilus pompilius*.

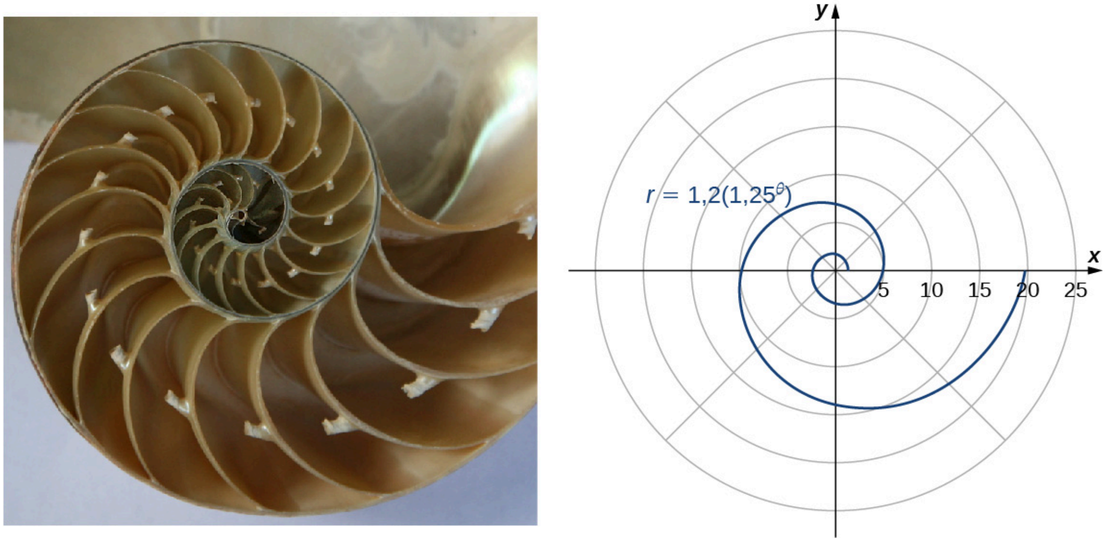


Figura 7.36 Una espiral logarítmica es similar a la forma de la concha del Nautilus pompilius (créditos: modificación del trabajo de Jitze Couperus, Flickr).

Supongamos que una curva se describe en el sistema de coordenadas polares mediante la función $r = f(\theta)$. Como tenemos fórmulas de conversión de coordenadas polares a rectangulares dadas por

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta,$$

es posible reescribir estas fórmulas utilizando la función

$$x = f(\theta) \cos \theta$$
$$y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta.$$

Este paso da una parametrización de la curva en coordenadas rectangulares utilizando θ como parámetro. Por ejemplo, la fórmula de la espiral $r = a + b\theta$ de la Figura 7.31 se convierte en

$$x = (a + b\theta) \cos \theta$$
$$y = (a + b\theta) \operatorname{sen} \theta.$$

Suponiendo que θ va desde $-\infty$ a ∞, genera toda la espiral.

Simetría en coordenadas polares

Al estudiar la simetría de las funciones en coordenadas rectangulares (es decir, en la forma $y = f(x)$), hablamos de simetría con respecto al eje y y de simetría con respecto al origen. En particular, si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f, entonces f es una función par y su gráfico es simétrico con respecto al eje y. Si los valores de $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f, entonces f es una función impar y su gráfico es simétrico con respecto al origen. Al determinar qué tipos de simetría presenta un gráfico, podemos saber más sobre su forma y apariencia. La simetría también puede revelar otras propiedades de la función que genera el gráfico. La simetría en las curvas polares funciona de forma similar.

Teorema 7.5

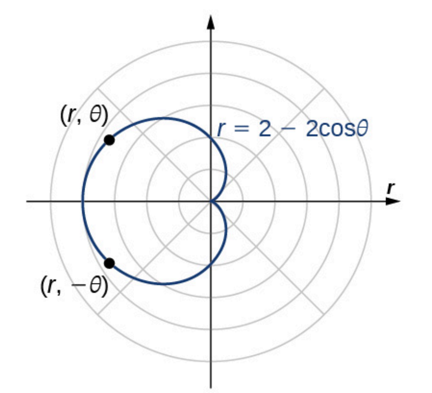
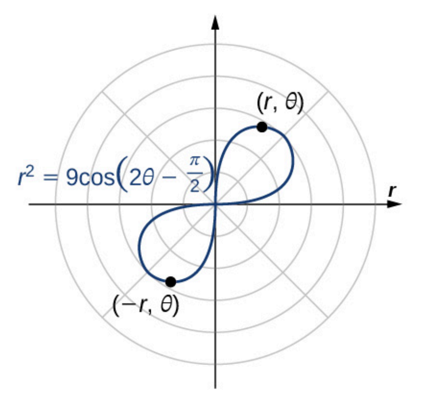
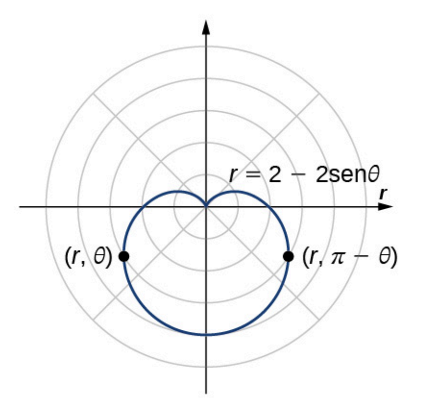
Simetría en curvas y ecuaciones polares

Consideremos una curva generada por la función $r = f(\theta)$ en coordenadas polares.

i. La curva es simétrica respecto al eje polar si para cada punto (r, θ) en el gráfico, el punto $(r, -\theta)$ también está en el gráfico. Del mismo modo, la ecuación $r = f(\theta)$ no se modifica al sustituir θ con $-\theta$.
ii. La curva es simétrica respecto al polo si para cada punto (r, θ) en el gráfico, el punto $(r, \pi + \theta)$ también está en el gráfico. Del mismo modo, la ecuación $r = f(\theta)$ no se modifica al sustituir r con $-r$, o θ con $\pi + \theta$.

iii. La curva es simétrica respecto a la línea vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$ si para cada punto (r, θ) en el gráfico, el punto $(r, \pi - \theta)$ también está en el gráfico. Del mismo modo, la ecuación $r = f(\theta)$ no se modifica cuando θ se sustituye por $\pi - \theta$.

La siguiente tabla muestra ejemplos de cada tipo de simetría.

Simetría con respecto al eje polar: Para cada punto (r, θ) de la gráfica, existe también un punto reflejado directamente en el eje horizontal (polar).	
Simetría con respecto al polo: Para cada punto (r, θ) del gráfico, hay también un punto del gráfico que se refleja a través del polo también.	
Simetría con respecto a la línea vertical θ $\frac{\pi}{2}$**:** Para cada punto (r, θ) de la gráfica, existe también un punto reflejado directamente en el eje vertical.	

EJEMPLO 7.15

Uso de la simetría para graficar una ecuación polar

Halle la simetría de la rosa definida por la ecuación $r = 3 \operatorname{sen}(2\theta)$ y cree un gráfico.

Solución

Supongamos que el punto (r, θ) está en el gráfico de $r = 3 \operatorname{sen}(2\theta)$.

i. Para comprobar la simetría con respecto al eje polar, intente primero sustituir θ con $-\theta$. Esto da $r = 3 \text{ sen } (2(-\theta)) = -3 \text{ sen } (2\theta)$. Como esto cambia la ecuación original, esta prueba no se satisface. Sin embargo, volviendo a la ecuación original y sustituyendo r con $-r$ y θ con $\pi - \theta$ se obtiene

$$\begin{aligned} -r &= 3 \text{ sen } (2(\pi - \theta)) \\ -r &= 3 \text{ sen } (2\pi - 2\theta) \\ -r &= 3 \text{ sen } (-2\theta) \\ -r &= -3 \text{ sen } 2\theta. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por -1 da como resultado $r = 3 \text{ sen } 2\theta$, que es la ecuación original. Esto demuestra que el gráfico es simétrico con respecto al eje polar.

ii. Para comprobar la simetría con respecto al polo, primero hay que sustituir r con $-r$, que da como resultado $-r = 3 \text{ sen } (2\theta)$. Multiplicando ambos lados por –1 se obtiene $r = -3 \text{ sen } (2\theta)$, que no coincide con la ecuación original. Por lo tanto, la ecuación no pasa la prueba de esta simetría. Sin embargo, volviendo a la ecuación original y sustituyendo θ con $\theta + \pi$ da como resultado

$$\begin{aligned} r &= 3 \text{ sen } (2(\theta + \pi)) \\ &= 3 \text{ sen } (2\theta + 2\pi) \\ &= 3 (\text{sen } 2\theta \cos 2\pi + \cos 2\theta \text{ sen } 2\pi) \\ &= 3 \text{ sen } 2\theta. \end{aligned}$$

Como esto coincide con la ecuación original, el gráfico es simétrico respecto al polo.

iii. Para comprobar la simetría con respecto a la línea vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$, sustituya primero ambos r con $-r$ y θ con $-\theta$.

$$\begin{aligned} -r &= 3 \text{ sen } (2(-\theta)) \\ -r &= 3 \text{ sen } (-2\theta) \\ -r &= -3 \text{ sen } 2\theta. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por -1 da como resultado $r = 3 \text{ sen } 2\theta$, que es la ecuación original. Por lo tanto, el gráfico es simétrico respecto a la línea vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Este gráfico tiene simetría con respecto al eje polar, el origen y la línea vertical que pasa por el polo. Para graficar la función, tabule los valores de θ entre 0 y $\pi/2$ y luego refleje el gráfico resultante.

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$
$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$
$\frac{\pi}{2}$	0

Esto da un pétalo de la rosa, como se muestra en el siguiente gráfico.

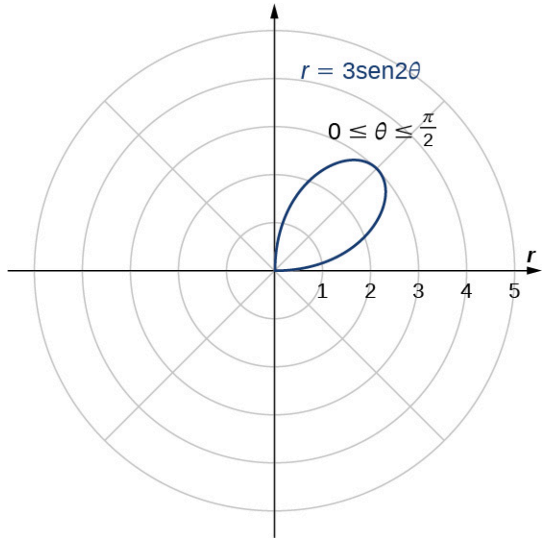


Figura 7.37 El gráfico de la ecuación entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Reflejando esta imagen en los otros tres cuadrantes se obtiene el gráfico completo que se muestra.

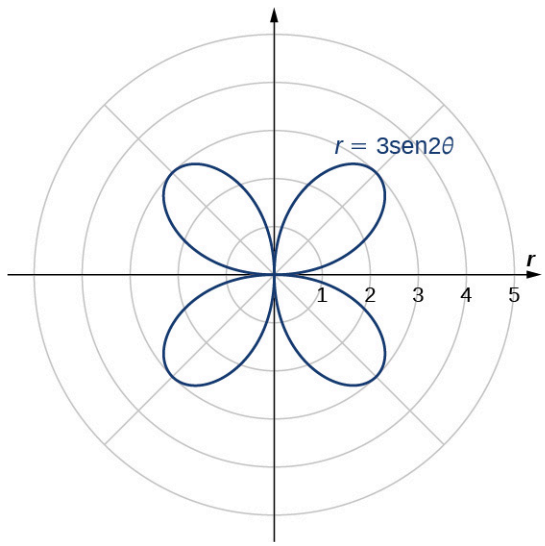


Figura 7.38 El gráfico completa de la ecuación se llama rosa de cuatro pétalos.

7.14 Determine la simetría del gráfico determinado por la ecuación $r = 2\cos(3\theta)$ y cree un gráfico.

SECCIÓN 7.3 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, trace el punto cuyas coordenadas polares están dadas construyendo primero el ángulo θ y luego marcando la distancia r a lo largo del rayo.

125. $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$

126. $\left(-2, \frac{5\pi}{3}\right)$ grandes.

127. $\left(0, \frac{7\pi}{6}\right)$

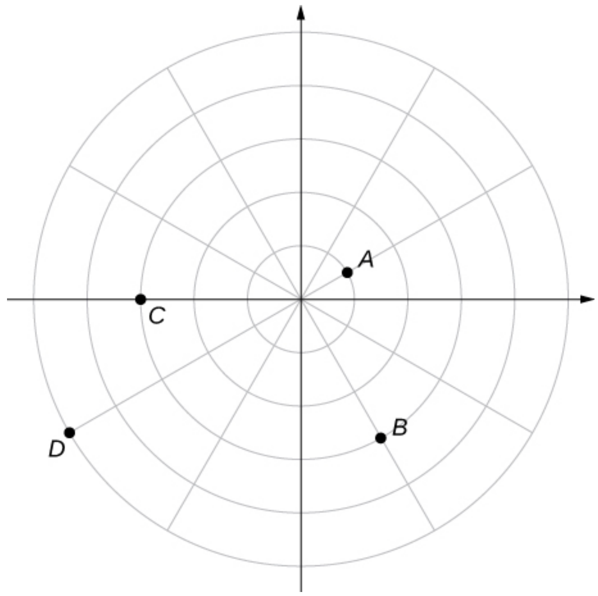
128. $\left(-4, \frac{3\pi}{4}\right)$ grandes.

129. $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

130. $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$ grandes.

131. $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

En los siguientes ejercicios, considere el gráfico polar que aparece a continuación. Da dos conjuntos de coordenadas polares para cada punto.



132. Coordenadas del punto *A*.

133. Coordenadas del punto *B*.

134. Coordenadas del punto *C*.

135. Coordenadas del punto *D*.

En los siguientes ejercicios, se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Halle dos conjuntos de coordenadas polares para el punto en $(0, 2\pi]$ *. Redondee a tres decimales.*

136. $(2,\ 2)$ grandes.

137. $(3, –4)$ grandes.

138. $(8,\ 15)$ grandes.

139. $(–6,\ 8)$ grandes.

140. $(4,\ 3)$ grandes.

141. $\left(3, -\sqrt{3}\right)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, halle las coordenadas rectangulares para el punto dado en coordenadas polares.

142. $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$ grandes.

143. $\left(–2, \frac{\pi}{6}\right)$ grandes.

144. $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ grandes.

145. $\left(1, \frac{7\pi}{6}\right)$ grandes.

146. $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$ grandes.

147. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ grandes.

148. $(–4{,}5, 6{,}5)$

En los siguientes ejercicios, determine si los gráficos de la ecuación polar son simétricos respecto al eje x*, al eje* y *o al origen.*

149. $r = 3\ \text{sen}(2\theta)$

150. $r^2 = 9 \cos \theta$

151. $r = \cos\left(\frac{\theta}{5}\right)$

152. $r = 2\ \text{s}\ \theta$

153. $r = 1 + \cos \theta$

En los siguientes ejercicios, describa el gráfico de cada ecuación polar. Confirme cada descripción convirtiéndola en una ecuación rectangular.

154. $r = 3$

155. $\theta = \frac{\pi}{4}$

156. $r = \sec \theta$

157. $r = \csc \theta$

En los siguientes ejercicios, convierta la ecuación rectangular en forma polar y dibuje su gráfico.

158. $x^2 + y^2 = 16$

159. $x^2 - y^2 = 16$

160. $x = 8$

En los siguientes ejercicios, convierta la ecuación rectangular en forma polar y dibuje su gráfico.

161. $3x - y = 2$

162. $y^2 = 4x$

En los siguientes ejercicios, convierta la ecuación polar en forma rectangular y dibuje su gráfico.

163. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

164. $r = 6 \cos \theta$

165. $r = \theta$

166. $r = \cot \theta \csc \theta$

En los siguientes ejercicios, dibuje un gráfico de la ecuación polar e identifique cualquier simetría.

167. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

168. $r = 3 - 2 \cos \theta$

169. $r = 2 - 2 \operatorname{sen} \theta$

170. $r = 5 - 4 \operatorname{sen} \theta$

171. $r = 3 \cos (2\theta)$

172. $r = 3 \operatorname{sen} (2\theta)$ grandes.

173. $r = 2 \cos (3\theta)$

174. $r = 3 \cos \left(\frac{\theta}{2}\right)$ grandes.

175. $r^2 = 4 \cos (2\theta)$

176. $r^2 = 4 \operatorname{sen} \theta$

177. $r = 2\theta$

178. **[T]** El gráfico de $r = 2 \cos(2\theta)\sec(\theta)$. se denomina *estrofoide.* Utilice una herramienta gráfica para dibujar el gráfico y, a partir de este, determine la asíntota.

179. **[T]** Utilice una herramienta gráfica y dibuje el gráfico de $r = \frac{6}{2 \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta}$.

180. **[T]** Utilice una herramienta gráfica para graficar $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$.

181. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico para graficar $r = e^{\operatorname{sen}(\theta)} - 2 \cos (4\theta)$.

182. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico para graficar $r = \operatorname{sen} \left(\frac{3\theta}{7}\right)$ (utilice el intervalo $0 \leq \theta \leq 14\pi$).

183. Sin utilizar ningún dispositivo tecnológico, dibuje la curva polar $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

184. **[T]** Utilice una herramienta gráfica para trazar $r = \theta \operatorname{sen} \theta$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

185. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico para graficar $r = e^{-0,1\theta}$ para $-10 \leq \theta \leq 10$.

186. **[T]** Hay una curva conocida como el "*agujero negro*". Utilice un dispositivo tecnológico para trazar $r = e^{-0,01\theta}$ para $-100 \leq \theta \leq 100$.

187. **[T]** Utilice los resultados de los dos problemas anteriores para explorar los gráficos de $r = e^{-0,001\theta}$ y $r = e^{-0,0001\theta}$ para $|\theta| > 100$.

7.4 Área y longitud de arco en coordenadas polares

Objetivos de aprendizaje

7.4.1 Aplicar la fórmula del área de una región en coordenadas polares.
7.4.2 Determinar la longitud de arco de una curva polar.

En el sistema de coordenadas rectangulares, la integral definida proporciona una forma de calcular el área bajo una curva. En particular, si tenemos una función $y = f(x)$ definida a partir de $x = a$ a $x = b$ donde $f(x) > 0$ en este intervalo, el área entre la curva y el eje *x* está dada por $A = \int_a^b f(x)\ dx$. Este hecho, junto con la fórmula para evaluar esta integral, se resume en el teorema fundamental del cálculo. Del mismo modo, la longitud de arco de esta curva está dada por $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$. En esta sección, estudiamos fórmulas análogas para el área y la longitud de arco en el sistema de coordenadas polares.

Áreas de regiones delimitadas por curvas polares

Hemos estudiado las fórmulas del área bajo una curva definida en coordenadas rectangulares y de las curvas definidas paramétricamente. Ahora nos centraremos en derivar una fórmula para el área de una región delimitada por una curva polar. Recordemos que en la demostración del teorema fundamental del cálculo se utilizó el concepto de suma de Riemann para aproximar el área bajo una curva utilizando rectángulos. Para las curvas polares volvemos a utilizar la suma de Riemann, pero los rectángulos se sustituyen por sectores de un círculo.

Consideremos una curva definida por la función $r = f(\theta)$, donde $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Nuestro primer paso es dividir el intervalo $[\alpha, \beta]$ en *n* subintervalos de igual ancho. El ancho de cada subintervalo está dado por la fórmula $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$, y el *i*–ésimo punto de partición θ_i está dado por la fórmula $\theta_i = \alpha + i\Delta\theta$. Cada punto de partición $\theta = \theta_i$ define una línea con pendiente $\tan\theta_i$ que pasa por el polo como se muestra en el siguiente gráfico.

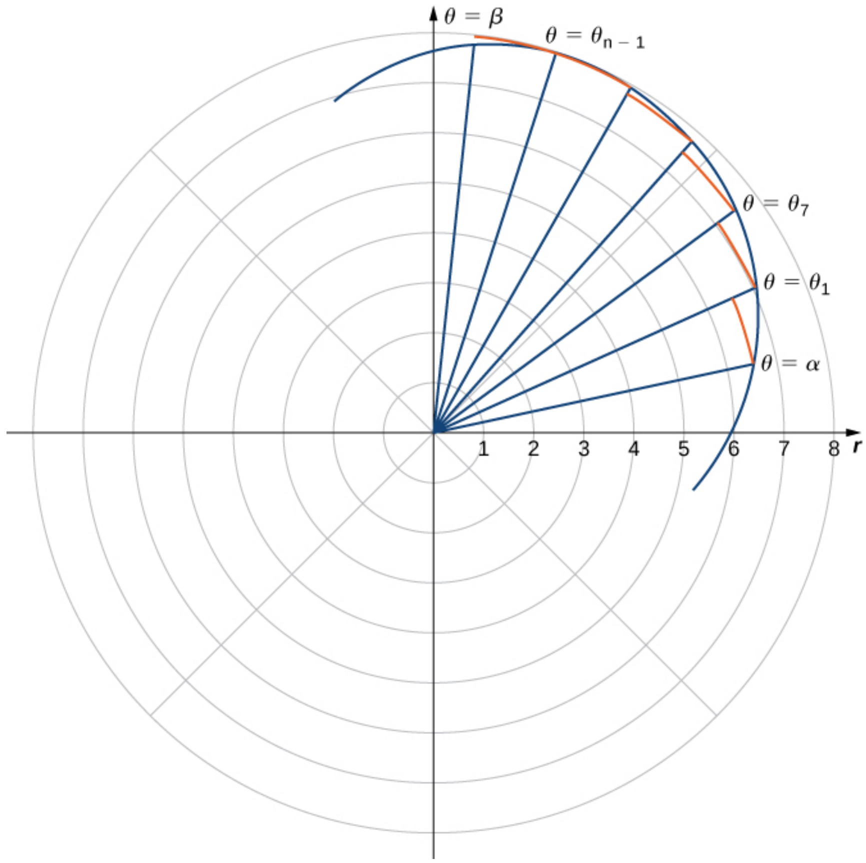


Figura 7.39 Una partición de una curva típica en coordenadas polares.

Los segmentos de la línea están conectados por arcos de radio constante. Esto define sectores cuyas áreas pueden calcularse mediante una fórmula geométrica. El área de cada sector se utiliza entonces para aproximar el área entre los segmentos de línea sucesivos. A continuación, sumamos las áreas de los sectores para aproximarnos al área total. Este enfoque da una aproximación de la suma de Riemann para el área total. La fórmula del área de un sector del círculo se ilustra en la siguiente figura.

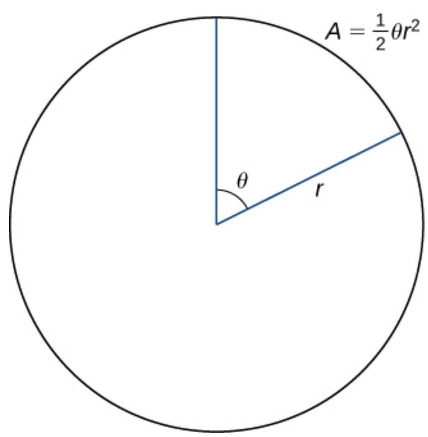


Figura 7.40 El área de un sector de un círculo está dada por $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

Recordemos que el área de un círculo es $A = \pi r^2$. Al medir los ángulos en radianes, 360 grados es igual a 2π radianes. Por lo tanto, una fracción de un círculo se puede medir por el ángulo central θ. La fracción del círculo está dada por $\frac{\theta}{2\pi}$, por lo que el área del sector es esta fracción multiplicada por el área total:

$$A = \left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \pi r^2 = \frac{1}{2}\theta r^2.$$

Dado que el radio de un sector típico en la Figura 7.39 está dado por $r_i = f(\theta_i)$, el área del *i*–ésimo sector está dada por

$$A_i = \frac{1}{2}(\Delta\theta)\,(f\,(\theta_i))^2.$$

Por lo tanto, una suma de Riemann que aproxima el área está dada por

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\Delta\theta)\,(f\,(\theta_i))^2.$$

Tomamos el límite a medida que $n \to \infty$ para obtener el área exacta:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f\,(\theta))^2\, d\theta.$$

Esto da el siguiente teorema.

Teorema 7.6

Área de una región delimitada por una curva polar

Supongamos que f es continua y no negativa en el intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$ con $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$. El área de la región delimitada por el gráfico de $r = f\,(\theta)$ entre las líneas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f\,(\theta)]^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta. \qquad \textbf{(7.9)}$$

EJEMPLO 7.16

Hallar el área de una región polar

Halle el área de un pétalo de la rosa definida por la ecuación $r = 3\ \text{sen}\,(2\theta)$.

Solución

El gráfico de $r = 3\ \text{sen}\,(2\theta)$ es el siguiente.

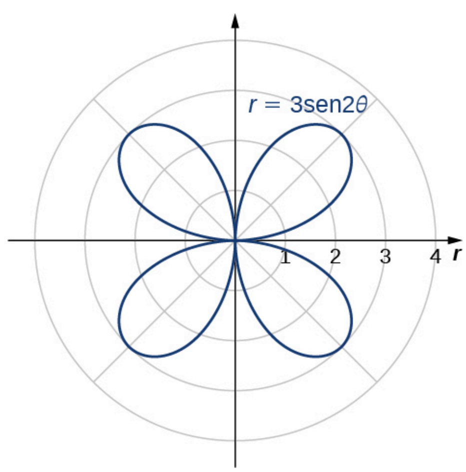


Figura 7.41 El gráfico de $r = 3\ \text{sen}\,(2\theta)$.

Cuando $\theta = 0$ tenemos $r = 3\ \text{sen}\,(2(0)) = 0$. El siguiente valor para el que $r = 0$ es $\theta = \pi/2$. Esto se puede ver resolviendo la ecuación $3\ \text{sen}(2\theta) = 0$ para θ. Por lo tanto, los valores $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$ traza el primer pétalo de la rosa. Para hallar el área dentro de este pétalo, utilice la Ecuación 7.9 con $f\,(\theta) = 3\ \text{sen}\,(2\theta)$, $\alpha = 0$, y $\beta = \pi/2$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}[3\,\text{sen}\,(2\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 9\,\text{sen}^2\,(2\theta)\ d\theta. \end{aligned}$$

Para evaluar esta integral, utilice la fórmula $\text{sen}^2\alpha = (1 - \cos(2\alpha))/2$ con $\alpha = 2\theta$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 9\,\text{sen}^2\,(2\theta)\ d\theta \\ &= \frac{9}{2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{(1-\cos(4\theta))}{2}d\theta \\ &= \frac{9}{4}\left(\int_{0}^{\pi/2} 1-\cos(4\theta)\ d\theta\right) \\ &= \frac{9}{4}\left(\theta - \frac{\text{sen}(4\theta)}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{sen}\,2\pi}{4}\right) - \frac{9}{4}\left(0 - \frac{\text{sen}\,4(0)}{4}\right) \\ &= \frac{9\pi}{8}. \end{aligned}$$

7.15 Halle el área dentro de la cardioide definida por la ecuación $r = 1 - \cos\theta$.

El Ejemplo 7.16 implicaba hallar el área dentro de una curva. También podemos utilizar Área de una región delimitada por una curva polar para hallar el área entre dos curvas polares. Sin embargo, a menudo necesitamos hallar los puntos de intersección de las curvas y determinar qué función define la curva exterior o la curva interna entre estos dos puntos.

EJEMPLO 7.17

Hallar el área entre dos curvas polares

Halle el área fuera de la cardioide $r = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta$ y dentro del círculo $r = 6\,\text{sen}\,\theta$.

Solución

Primero dibuje un gráfico que contenga ambas curvas como se muestra.

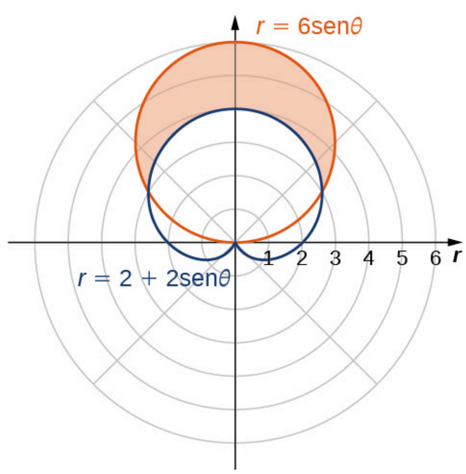


Figura 7.42 La región entre las curvas $r = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta$ y $r = 6\,\text{sen}\,\theta$.

Para determinar los límites de la integración, primero hay que hallar los puntos de intersección fijando las dos funciones iguales entre sí y resolviendo para θ:

$$\begin{aligned} 6 \operatorname{sen} \theta &= 2 + 2 \operatorname{sen} \theta \\ 4 \operatorname{sen} \theta &= 2 \\ \operatorname{sen} \theta &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esto da las soluciones $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$, que son los límites de la integración. El círculo $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ es el gráfico rojo, que es la función exterior, y la cardioide $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$ es el gráfico azul, que es la función interna. Para calcular el área entre las curvas, comience con el área dentro del círculo entre $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$, luego reste el área dentro de la cardioide entre $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$:

$$\begin{aligned} A &= \text{círculo} - \text{cardioide} \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [6 \operatorname{sen} \theta]^2 \, d\theta - \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [2 + 2 \operatorname{sen} \theta]^2 \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 36 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta - \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[4 + 8 \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta\right] d\theta \\ &= 18 \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta - 2 \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[1 + 2 \operatorname{sen} \theta + \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right] d\theta \\ &= 9\left[\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} - 2\left[\frac{3\theta}{2} - 2 \cos \theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= 9\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\operatorname{sen} 2(5\pi/6)}{2}\right) - 9\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\operatorname{sen} 2(\pi/6)}{2}\right) \\ &\quad - \left(3\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 4 \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{\operatorname{sen} 2(5\pi/6)}{2}\right) + \left(3\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\operatorname{sen} 2(\pi/6)}{2}\right) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

☑ 7.16 Halle el área dentro del círculo $r = 4 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 2$.

En el Ejemplo 7.17 hallamos el área dentro del círculo y fuera de la cardioide hallando primero sus puntos de intersección. Observe que al resolver la ecuación directamente para θ ha aportado dos soluciones $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Sin embargo, en el gráfico hay tres puntos de intersección. El tercer punto de intersección es el origen. La razón por la que este punto no aparece como solución es porque el origen está en ambos gráficos pero para diferentes valores de θ. Por ejemplo, para la cardioide obtenemos

$$\begin{aligned} 2 + 2 \operatorname{sen} \theta &= 0 \\ \operatorname{sen} \theta &= -1, \end{aligned}$$

por lo que los valores de θ que resuelven esta ecuación son $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, donde *n* es un número entero cualquiera. Para el círculo obtenemos

$$6 \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma $\theta = n\pi$ para cualquier valor entero de *n*. Estos dos conjuntos de soluciones no tienen puntos en común. Independientemente de este hecho, las curvas se cruzan en el origen. Este caso debe tenerse siempre en cuenta.

Longitud del arco en curvas polares

Aquí derivamos una fórmula para la longitud de arco de una curva definida en coordenadas polares.

En coordenadas rectangulares, la longitud de arco de una curva parametrizada $(x(t), y(t))$ para $a \le t \le b$ está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt.$$

En coordenadas polares definimos la curva mediante la ecuación $r = f(\theta)$, donde $\alpha \le \theta \le \beta$. Para adaptar la fórmula de la longitud de arco para una curva polar, utilizamos las ecuaciones

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \text{ y } y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta,$$

y sustituimos el parámetro *t* por θ. Entonces

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Reemplazamos dt por $d\theta$, y los límites inferior y superior de integración son α y β, respectivamente. Entonces la fórmula de la longitud de arco se convierte en

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta\right)^2}\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + \left(f(\theta)\right)^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)}\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2 + \left(f(\theta)\right)^2}\,d\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.
\end{aligned}$$

Esto nos da el siguiente teorema.

Teorema 7.7

Longitud de arco de una curva definida por una función polar

Supongamos que f es una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$. La longitud del gráfico de $r = f(\theta)$ de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$ es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + \left[f'(\theta)\right]^2}\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta. \qquad (7.10)$$

EJEMPLO 7.18

Hallar la longitud del arco de una curva polar

Halle la longitud de arco de la cardioide $r = 2 + 2\cos\theta$.

Solución

Cuando $\theta = 0, r = 2 + 2\cos 0 = 4$. Además, como θ va de 0 a 2π, la cardioide se traza exactamente una vez. Por lo tanto, estos son los límites de la integración. Al usar $f(\theta) = 2 + 2\cos\theta$, $\alpha = 0$, y $\beta = 2\pi$, la Ecuación 7.10 se convierte en

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[2+2\cos\theta]^2 + [-2\operatorname{sen}\theta]^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4+8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4+8\cos\theta+4\left(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right)}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{8+8\cos\theta}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

A continuación, utilizando la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, sume 1 a ambos lados y multiplique por 2. Esto da $2 + 2\cos(2\alpha) = 4\cos^2\alpha$. Sustituyendo $\alpha = \theta/2$ da como resultado $2 + 2\cos\theta = 4\cos^2(\theta/2)$, por lo que la integral se convierte en

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta. \end{aligned}$$

El valor absoluto es necesario porque el coseno es negativo para algunos valores en su dominio. Para resolver este problema, cambie los límites de 0 a π y duplique la respuesta. Esta estrategia funciona porque el coseno es positivo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta \\ &= 8\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= 8\left(2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)_0^{\pi} \\ &= 16. \end{aligned}$$

7.17 Halle la longitud de arco total de $r = 3\operatorname{sen}\theta$.

SECCIÓN 7.4 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, determine una integral definida que represente el área.

188. Región delimitada por $r = 4$

189. Región delimitada por $r = 3\operatorname{sen}\theta$

190. Región en el primer cuadrante dentro de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

191. Región delimitada por un pétalo de $r = 8\operatorname{sen}(2\theta)$ grandes.

192. Región delimitada por un pétalo de $r = \cos(3\theta)$

193. Región por debajo del eje polar y delimitada por $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

194. Región del primer cuadrante delimitada por $r = 2 - \cos\theta$

195. Región delimitada por el lazo interno de $r = 2 - 3\,\text{sen}\,\theta$

196. Región delimitada por el lazo interno de $r = 3 - 4\cos\theta$

197. Región delimitada por $r = 1 - 2\cos\theta$ y fuera del lazo interno

198. Región común a $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ y $r = 2 - \text{sen}\,\theta$

199. Región común a $r = 2$ y $r = 4\cos\theta$

200. Región común a $r = 3\cos\theta$ y $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

En los siguientes ejercicios, halle el área de la región descrita.

201. Delimitada por $r = 6\,\text{sen}\,\theta$

202. Por encima del eje polar delimitado por $r = 2 + \text{sen}\,\theta$

203. Por debajo del eje polar y delimitado por $r = 2 - \cos\theta$

204. Delimitada por un pétalo de $r = 4\cos(3\theta)$

205. Delimitada por un pétalo de $r = 3\cos(2\theta)$ grandes.

206. Delimitada por $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

207. Delimitada por el lazo interno de $r = 3 + 6\cos\theta$

208. Delimitada por $r = 2 + 4\cos\theta$ y fuera del lazo interno

209. Interior común de $r = 4\,\text{sen}\,(2\theta)$ y $r = 2$

210. Interior común de $r = 3 - 2\,\text{sen}\,\theta$ y $r = -3 + 2\,\text{sen}\,\theta$

211. Interior común de $r = 6\,\text{sen}\,\theta$ y $r = 3$

212. Dentro de $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de $r = \cos\theta$

213. Interior común de $r = 2 + 2\cos\theta$ y $r = 2\,\text{sen}\,\theta$

En los siguientes ejercicios, calcule una integral definida que represente la longitud del arco.

214. $r = 4\cos\theta$ en el intervalo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

215. $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ en el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$

216. $r = 2\,\text{s}\,\theta$ en el intervalo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

217. $r = e^{\theta}$ en el intervalo $0 \le \theta \le 1$

En los siguientes ejercicios, halle la longitud de la curva en el intervalo dado.

218. $r = 6$ en el intervalo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

219. $r = e^{3\theta}$ en el intervalo $0 \le \theta \le 2$

220. $r = 6\cos\theta$ en el intervalo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

221. $r = 8 + 8\cos\theta$ en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$

222. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$ en el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$

En los siguientes ejercicios, utilice las funciones de integración de una calculadora para aproximar la longitud de la curva.

223. **[T]**
$r = 3\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

224. **[T]**
$r = \frac{2}{\theta}$ en el intervalo $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

225. **[T]**
$r = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

226. **[T]**
$r = 2\theta^2$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

227. **[T]**
$r = \text{sen}\,(3\cos\theta)$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

En los siguientes ejercicios, utilice la fórmula conocida en geometría para hallar el área de la región descrita y luego confirme utilizando la integral definida.

228. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

229. $r = \text{sen}\,\theta + \cos\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

230. $r = 6\,\text{sen}\,\theta + 8\cos\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

En los siguientes ejercicios, utilice la fórmula conocida en geometría para hallar la longitud de la curva y luego confirme utilizando la integral definida.

231. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

232. $r = \text{sen}\,\theta + \cos\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

233. $r = 6\,\text{sen}\,\theta + 8\cos\theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$

234. Compruebe que si
$y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\text{sen}\,\theta$
entonces
$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta.$

En los siguientes ejercicios, halle la pendiente de una línea tangente a una curva polar $r = f(\theta)$. Supongamos que $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\text{sen}\,\theta$, por lo que la ecuación polar $r = f(\theta)$ se escribe ahora en forma paramétrica.

235. Utilice la definición de la derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$ y la regla del producto para calcular la derivada de una ecuación polar.

236. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ grandes.

237. $r = 4\cos\theta$; $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

238. $r = 8\,\text{sen}\,\theta$; $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ grandes.

239. $r = 4 + \text{sen}\,\theta$; $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$

240. $r = 6 + 3\cos\theta$; $(3, \pi)$ grandes.

241. $r = 4\cos(2\theta)$; puntas de las hojas

242. $r = 2\,\text{sen}\,(3\theta)$; puntas de las hojas

243. $r = 2\theta$; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

244. Halle los puntos del intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ en los que la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ tiene una línea tangente vertical u horizontal.

245. Para la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, halle la pendiente de la línea tangente cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

En los siguientes ejercicios, halle la pendiente de la línea tangente a la curva polar dada en el punto dado por el valor de θ.

246. $r = 3\cos\theta, \theta = \frac{\pi}{3}$

247. $r = \theta, \theta = \frac{\pi}{2}$

248. $r = \ln\theta, \theta = e$

249. **[T]** Utilice un dispositivo tecnológico: $r = 2 + 4\cos\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$

En los siguientes ejercicios, halle los puntos en los que las siguientes curvas polares tienen una línea tangente horizontal o vertical.

250. $r = 4\cos\theta$

251. $r^2 = 4\cos(2\theta)$

252. $r = 2\operatorname{sen}(2\theta)$

253. La cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

254. Demuestre que la curva $r = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$ (llamada *cisoide de Diocles*) tiene la línea $x = 1$ como asíntota vertical.

7.5 Secciones cónicas

Objetivos de aprendizaje

- **7.5.1** Identificar la ecuación de una parábola en forma estándar con foco y directriz dados.
- **7.5.2** Identificar la ecuación de una elipse en forma estándar con focos dados.
- **7.5.3** Identificar la ecuación de una hipérbola en forma estándar con focos dados.
- **7.5.4** Reconocer una parábola, elipse o hipérbola a partir de su valor de excentricidad.
- **7.5.5** Escribir la ecuación polar de una sección cónica con excentricidad e.
- **7.5.6** Identificar cuándo una ecuación general de grado dos es una parábola, una elipse o una hipérbola.

Las secciones cónicas se han estudiado desde la época de los antiguos griegos y se consideraban un concepto matemático importante. Ya en el año 320 a.C., matemáticos griegos como Menecmo, Apolonio y Arquímedes estaban fascinados por estas curvas. Apolonio escribió un tratado completo de ocho volúmenes sobre las secciones cónicas en el que, por ejemplo, fue capaz de derivar un método específico para identificar una sección cónica mediante el uso de la geometría. Desde entonces, han surgido importantes aplicaciones de las secciones cónicas (por ejemplo, en astronomía), y las propiedades de las secciones cónicas se utilizan en radiotelescopios, receptores de antenas parabólicas e incluso en arquitectura. En esta sección discutimos las tres secciones cónicas básicas, algunas de sus propiedades y sus ecuaciones.

Las secciones cónicas reciben su nombre porque pueden generarse mediante la intersección de un plano con un cono. Un cono tiene dos partes de forma idéntica denominadas **hojas**. Una hoja es lo que la mayoría de la gente entiende por "cono", con forma de sombrero de fiesta. Se puede generar un cono circular recto haciendo girar una línea que pasa por el origen alrededor del eje *y*, como se muestra.

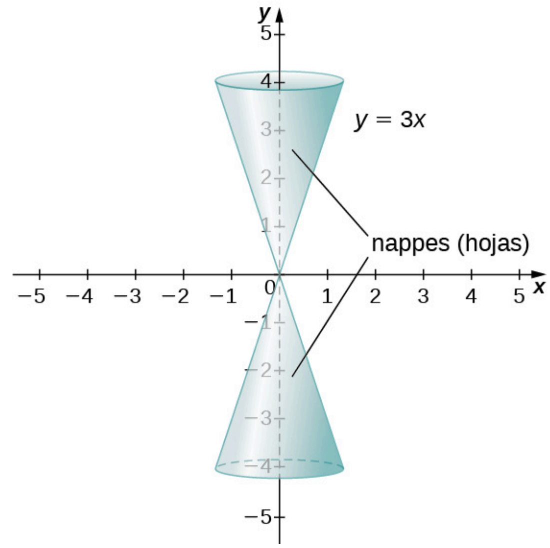


Figura 7.43 Un cono generado al girar la línea $y = 3x$ alrededor del eje y.

Las secciones cónicas se generan mediante la intersección de un plano con un cono (Figura 7.44). Si el plano es paralelo al eje de revolución (el eje *y*), la **sección cónica** es una hipérbola. Si el plano es paralelo a la línea generatriz, la sección cónica es una parábola. Si el plano es perpendicular al eje de revolución, la sección cónica es un círculo. Si el plano interseca una hoja en un ángulo con el eje (que no sea $90°$), entonces la sección cónica es una elipse.

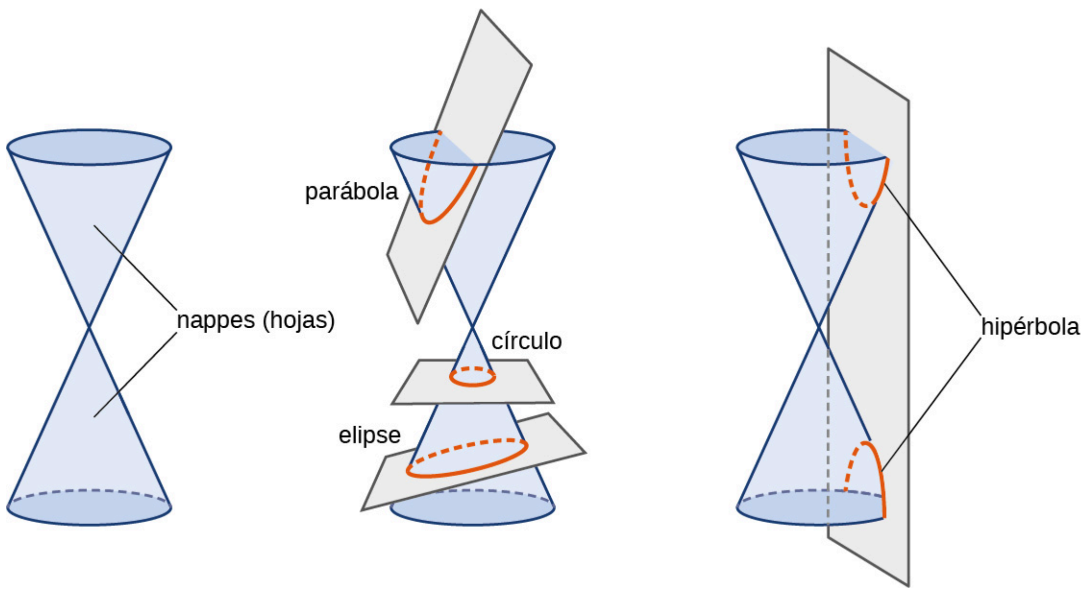


Figura 7.44 Las cuatro secciones cónicas. Cada sección cónica está determinada por el ángulo que forma el plano con el eje del cono.

Parábolas

Una parábola se genera cuando un plano interseca un cono paralelo en la línea generadora. En este caso, el plano interseca solo una de las hojas. Una parábola también puede definirse en términos de distancias.

Definición

Una parábola es el conjunto de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo, llamado **foco**, es igual a la distancia a una línea fija, llamada **directriz**. El punto medio entre el foco y la directriz se llama **vértice** de la parábola.

El gráfico de una parábola típica aparece en la Figura 7.45. Utilizando este diagrama junto con la fórmula de la distancia, podemos derivar una ecuación para una parábola. Recordemos la fórmula de la distancia: Dado un punto *P* con

coordenadas (x_1, y_1) y el punto Q con coordenadas $(x_2,\ y_2)$, la distancia entre ellos está dada por la fórmula

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Entonces, a partir de la definición de parábola y de la Figura 7.45, obtenemos

$$\begin{aligned} d(F,P) &= d(P,Q) \\ \sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (-p-y)^2}. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos lados y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + (p-y)^2 &= 0^2 + (-p-y)^2 \\ x^2 + p^2 - 2py + y^2 &= p^2 + 2py + y^2 \\ x^2 - 2py &= 2py \\ x^2 &= 4py. \end{aligned}$$

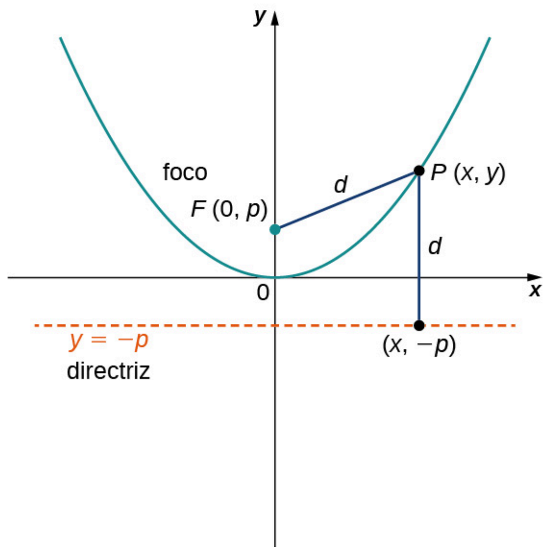


Figura 7.45 Una parábola típica en la que la distancia del foco al vértice está representada por la variable p.

Ahora supongamos que queremos reubicar el vértice. Utilizamos las variables (h, k) para denotar las coordenadas del vértice. Entonces, si el foco está directamente sobre el vértice, tiene coordenadas $(h, k + p)$ y la directriz tiene la ecuación $y = k - p$. Si se realiza la misma derivación se obtiene la fórmula $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Resolviendo esta ecuación para y se llega al siguiente teorema.

Teorema 7.8

Ecuaciones de las parábolas

Dada una parábola que se abre hacia arriba con el vértice situado en (h, k) y foco situado en $(h, k + p)$, donde p es una constante, la ecuación de la parábola está dada por

$$y = \frac{1}{4p}(x - h)^2 + k. \qquad \textbf{(7.11)}$$

Esta es la **forma estándar** de una parábola.

También podemos estudiar los casos en que la parábola se abre hacia abajo o hacia la izquierda o la derecha. La ecuación para cada uno de estos casos también puede escribirse en forma estándar como se muestra en los siguientes gráficos.

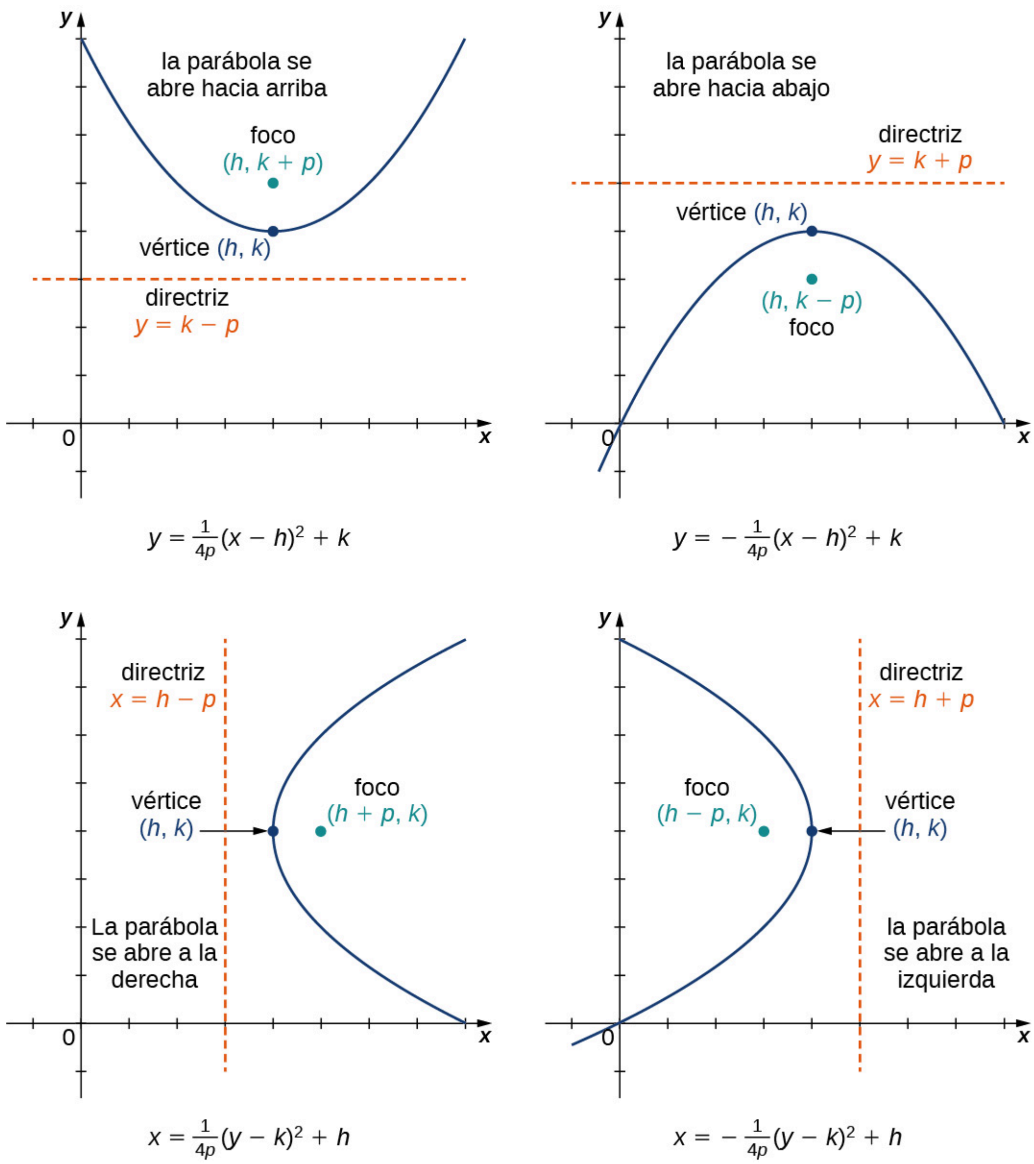


Figura 7.46 Cuatro parábolas, que se abren en varias direcciones, junto con sus ecuaciones en forma estándar.

Además, la ecuación de una parábola puede escribirse en la **forma general**, aunque en esta forma los valores de *h*, *k* y *p* no son inmediatamente reconocibles. La forma general de una parábola se escribe como

$$ax^2 + bx + cy + d = 0 \quad \text{o} \quad ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

La primera ecuación representa una parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo. La segunda ecuación representa una parábola que se abre hacia la izquierda o hacia la derecha. Para poner la ecuación en forma estándar, utilice el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 7.19

Conversión de la ecuación de una parábola de la forma general a la forma estándar

Escriba la ecuación $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$ en forma estándar y grafique la parábola resultante.

Solución

Como *y* no está elevada al cuadrado en esta ecuación, sabemos que la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo. Por lo tanto, tenemos que resolver esta ecuación para *y*, lo que pondrá la ecuación en forma estándar. Para ello, sume primero $8y$ a ambos lados de la ecuación:

$$8y = x^2 - 4x + 12.$$

El siguiente paso es completar el cuadrado del lado derecho. Empiece por agrupar los dos primeros términos del lado derecho utilizando paréntesis:

$$8y = \left(x^2 - 4x\right) + 12.$$

A continuación, determine la constante que, sumada dentro del paréntesis, hace que la cantidad dentro del paréntesis sea un trinomio cuadrado perfecto. Para ello, se toma la mitad del coeficiente de *x* y se eleva al cuadrado. Esto da $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$. Sume 4 dentro del paréntesis y reste 4 fuera del paréntesis, por lo que el valor de la ecuación no cambia:

$$8y = \left(x^2 - 4x + 4\right) + 12 - 4.$$

Ahora combine los términos semejantes y factorice la cantidad dentro del paréntesis:

$$8y = (x - 2)^2 + 8.$$

Por último, divida entre 8:

$$y = \frac{1}{8}(x - 2)^2 + 1.$$

Esta ecuación está ahora en forma estándar. Si se compara con la Ecuación 7.11 se obtiene $h = 2, k = 1$, y $p = 2$. La parábola se abre, con vértice en $(2, 1)$, foco en $(2, 3)$, y directriz $y = -1$. El gráfico de esta parábola es el siguiente.

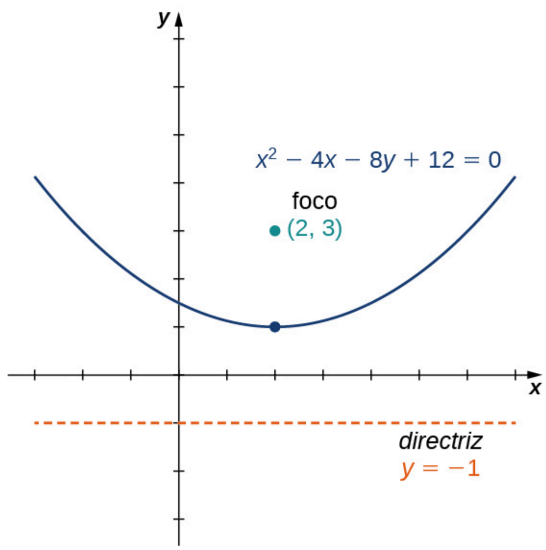
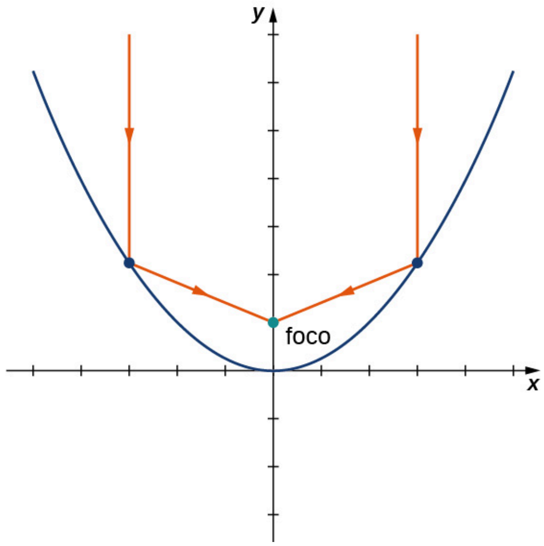


Figura 7.47 La parábola en el Ejemplo 7.19.

7.18 Escriba la ecuación $2y^2 - x + 12y + 16 = 0$ en forma estándar y grafique la parábola resultante.

El eje de simetría de una parábola vertical (que se abre hacia arriba o hacia abajo) es una línea vertical que pasa por el vértice. La parábola tiene una propiedad interesante de reflexión. Supongamos que tenemos una antena parabólica con una sección transversal parabólica. Si un haz de ondas electromagnéticas, como la luz o las ondas de radio, llega a la antena parabólica en línea recta desde un satélite (paralelo al eje de simetría), las ondas se reflejan en la antena y se acumulan en el foco de la parábola, como se muestra.



Consideremos una antena parabólica diseñada para recoger las señales de un satélite en el espacio. La antena parabólica se orienta directamente hacia el satélite y un receptor se sitúa en el foco de la parábola. Las ondas de radio procedentes del satélite se reflejan en la superficie de la parábola hasta el receptor, que recoge y descodifica las señales digitales. Esto permite que un pequeño receptor recoja señales de un ángulo amplio del cielo. Las linternas y los faros de los automóviles funcionan según el mismo principio, pero a la inversa: la fuente de luz (es decir, la bombilla) está situada en el foco y la superficie reflectante del espejo parabólico enfoca el haz de luz hacia delante. Esto permite que una pequeña bombilla ilumine un ángulo amplio de espacio delante de la linterna o del automóvil.

Elipses

Una elipse también puede definirse en términos de distancias. En el caso de una elipse, hay dos focos y dos directrices. Más adelante veremos las directrices con más detalle.

Definición

Una *elipse* es el conjunto de todos los puntos para los que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante.

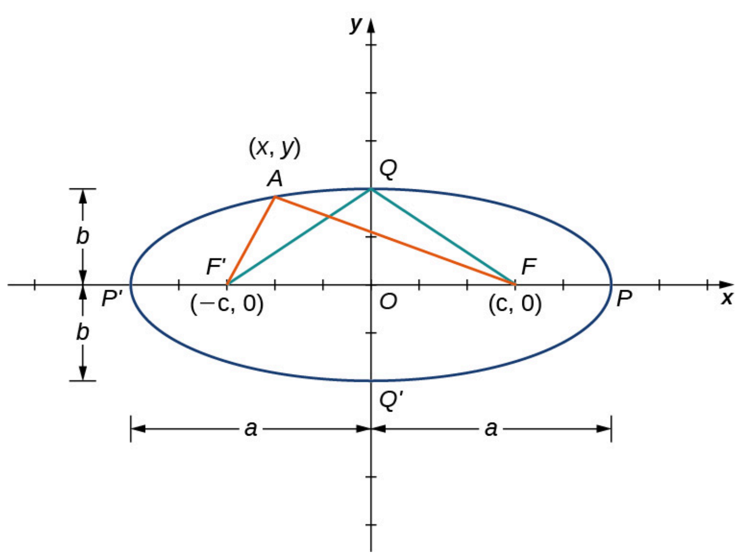


Figura 7.48 Una elipse típica en la que la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es constante.

El gráfico de una elipse típica se muestra en la Figura 7.48. En esta figura los focos están marcados como F y F'. Ambas están a la misma distancia fija del origen, y esta distancia se representa con la variable *c*. Por lo tanto, las coordenadas

de F son $(c, 0)$ y las coordenadas de F' son $(-c, 0)$. Los puntos P y P' están situados en los extremos del **eje mayor** de la elipse, y tienen coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente. El eje mayor es siempre la distancia más larga de la elipse y puede ser horizontal o vertical. Por tanto, la longitud del eje mayor de esta elipse es 2*a.* Además, P y P' se llaman los vértices de la elipse. Los puntos Q y Q' están situados en los extremos del **eje menor** de la elipse, y tienen coordenadas $(0, b)$ y $(0, -b)$, respectivamente. El eje menor es la distancia más corta a través de la elipse. El eje menor es perpendicular al eje mayor.

Según la definición de la elipse, podemos elegir cualquier punto de la elipse y la suma de las distancias de este punto a los dos focos es constante. Supongamos que elegimos el punto *P.* Como las coordenadas del punto *P* son $(a, 0)$, la suma de las distancias es

$$d(P, F) + d\left(P, F'\right) = (a - c) + (a + c) = 2a.$$

Por tanto, la suma de las distancias desde un punto arbitrario *A* con coordenadas (x, y) también es igual a 2*a.* Utilizando la fórmula de la distancia, obtenemos

$$\begin{aligned} d(A, F) + d\left(A, F'\right) &= 2a \\ \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Reste el segundo radical de ambos lados y eleve al cuadrado ambos lados:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \\ (x - c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ -2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 2cx. \end{aligned}$$

Ahora aísle el radical del lado derecho y vuelva a elevarlo al cuadrado:

$$\begin{aligned} -2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 2cx \\ 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\ \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= a + \frac{cx}{a} \\ (x + c)^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} \\ x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Aísle las variables del lado izquierdo de la ecuación y las constantes del lado derecho:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2 \\ \frac{\left(a^2 - c^2\right)x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2. \end{aligned}$$

Divida ambos lados entre $a^2 - c^2$. Esto da la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Si volvemos a la Figura 7.48, entonces la longitud de cada uno de los dos segmentos de la línea verde es igual a *a*. Esto es cierto porque la suma de las distancias del punto *Q* a los focos F y F' es igual a 2*a*, y las longitudes de estos dos segmentos de línea son iguales. Este segmento de línea forma un triángulo rectángulo con longitud de hipotenusa *a* y longitudes de catetos *b* y *c.* A partir del teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 = c^2$ y $b^2 + a^2 - c^2$. Por lo tanto, la ecuación de la elipse se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por último, si el centro de la elipse se desplaza del origen a un punto (h, k) , tenemos la siguiente forma estándar de una elipse.

Teorema 7.9

Ecuación de una elipse en forma estándar

Consideremos la elipse con centro (h, k), un eje mayor horizontal de longitud 2*a* y un eje menor vertical de longitud 2*b*. Entonces la ecuación de esta elipse en forma estándar es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{7.12}$$

y los focos se encuentran en $(h \pm c, k)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$. Las ecuaciones de las directrices son $x = h \pm \frac{a^2}{c}$.

Si el eje mayor es vertical, la ecuación de la elipse se convierte en

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \tag{7.13}$$

y los focos se encuentran en $(h, k \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$. Las ecuaciones de las directrices en este caso son $y = k \pm \frac{a^2}{c}$.

Si el eje mayor es horizontal, la elipse se llama horizontal, y si el eje mayor es vertical, la elipse se llama vertical. La ecuación de una elipse está en forma general si tiene la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde *A* y *B* son ambos positivos o ambos negativos. Para convertir la ecuación de la forma general a la forma estándar, utilice el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 7.20

Hallar la forma estándar de una elipse

Escriba la ecuación $9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$ en forma estándar y grafique la elipse resultante.

Solución

Primero reste 36 a ambos lados de la ecuación:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y = -36.$$

A continuación, agrupe los términos *x* y los términos *y* y factorice los factores comunes:

$$\begin{aligned} \left(9x^2 - 36x\right) + \left(4y^2 + 24y\right) &= -36 \\ 9\left(x^2 - 4x\right) + 4\left(y^2 + 6y\right) &= -36. \end{aligned}$$

Tenemos que determinar la constante que cuando se suma dentro de cada conjunto de paréntesis, da como resultado un cuadrado perfecto. En el primer conjunto de paréntesis, tome la mitad del coeficiente de *x* y elévelo al cuadrado. Esto da $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$. En el segundo paréntesis, tome la mitad del coeficiente de *y* y elévelo al cuadrado. Esto da $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$. Sume esto dentro de cada par de paréntesis. Como el primer conjunto de paréntesis tiene un 9 delante, en realidad estamos sumando 36 al lado izquierdo. Del mismo modo, sumamos 36 al segundo conjunto también. Por lo tanto, la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} 9\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4\left(y^2 + 6y + 9\right) &= -36 + 36 + 36 \\ 9\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4\left(y^2 + 6y + 9\right) &= 36. \end{aligned}$$

Ahora factorice ambos conjuntos de paréntesis y divida entre 36:

$$\begin{aligned} 9(x-2)^2 + 4(y+3)^2 &= 36 \\ \frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y+3)^2}{36} &= 1 \\ \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación está ahora en forma estándar. Si se compara con la Ecuación 7.14 se obtiene $h = 2, k = -3, a = 3$, y $b = 2$. Se trata de una elipse vertical con centro en $(2, -3)$, eje mayor 6 y eje menor 4. El gráfico de esta elipse es el siguiente.

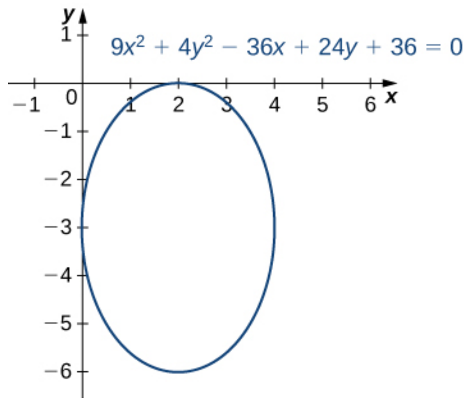


Figura 7.49 La elipse en el Ejemplo 7.20.

7.19 Escriba la ecuación $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$ en forma estándar y grafique la elipse resultante.

Según la primera ley de Kepler del movimiento planetario, la órbita de un planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los focos, como se muestra en la Figura 7.50(a). Como la órbita de la Tierra es una elipse, la distancia al Sol varía a lo largo del año. Una idea errónea muy extendida es que la Tierra está más cerca del Sol en verano. De hecho, en verano para el hemisferio norte, la Tierra está más lejos del Sol que durante el invierno. La diferencia de estación se debe a la inclinación del eje de la Tierra en el plano orbital. Los cometas que orbitan alrededor del Sol, como el cometa Halley, también tienen órbitas elípticas, al igual que las lunas que orbitan los planetas y los satélites que orbitan la Tierra.

Las elipses también tienen propiedades interesantes de reflexión: Un rayo de luz que emana de un foco pasa por el otro foco después de la reflexión del espejo en la elipse. Lo mismo ocurre con una onda sonora. La Sala Nacional de Estatuas del Capitolio de Estados Unidos en Washington, DC, es una famosa sala de forma elíptica, como se muestra en la Figura 7.50(b). Esta sala sirvió como lugar de reunión de la Cámara de Representantes de Estados Unidos durante casi cincuenta años. La ubicación de los dos focos de esta sala semielíptica están claramente identificados por marcas en el suelo, e incluso si la sala está llena de visitantes, cuando dos personas se sitúan en estos puntos y hablan entre sí, pueden oírse mutuamente con mucha más claridad de la que pueden oír a alguien que esté cerca. Cuenta la leyenda que John Quincy Adams tenía su escritorio situado en uno de los focos y podía escuchar a todos los demás en la Cámara sin necesidad de ponerse de pie. Aunque es una buena historia, es poco probable que sea cierta, porque el techo original producía tanto eco que hubo que poner alfombras en toda la sala para amortiguar el ruido. El techo fue reconstruido en 1902 y solo entonces surgió el ahora famoso efecto de susurro. Otro famoso gabinete de secretos, sitio de muchas propuestas de matrimonio, se encuentra en la estación Grand Central de Nueva York.

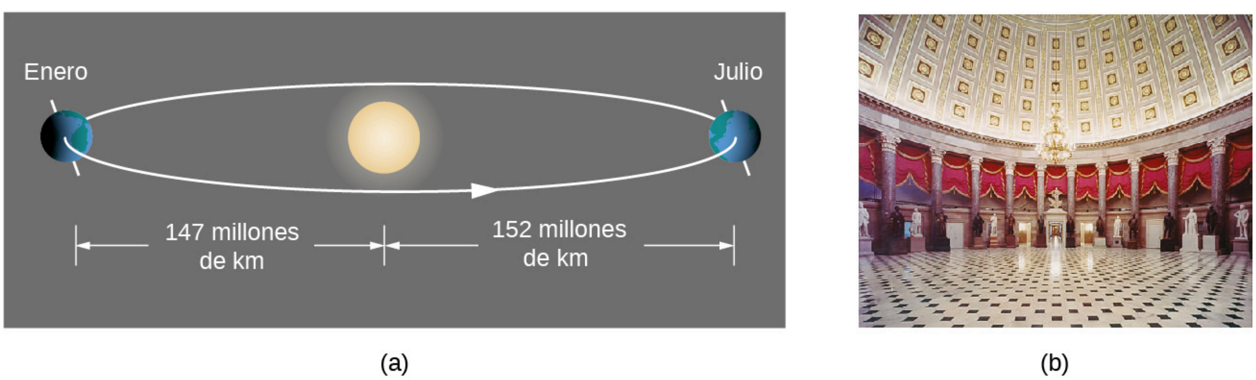


Figura 7.50 (a) La órbita de la Tierra alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de sus focos. (b) La Sala de Estatuas del Capitolio de Estados Unidos es una galería de secretos con una sección transversal elíptica.

Hipérbolas

Una hipérbola también puede definirse en términos de distancias. En el caso de una hipérbola, hay dos focos y dos directrices. Las hipérbolas también tienen dos asíntotas.

Definición

Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos en los que la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante.

El gráfico de una hipérbola típica es la siguiente.

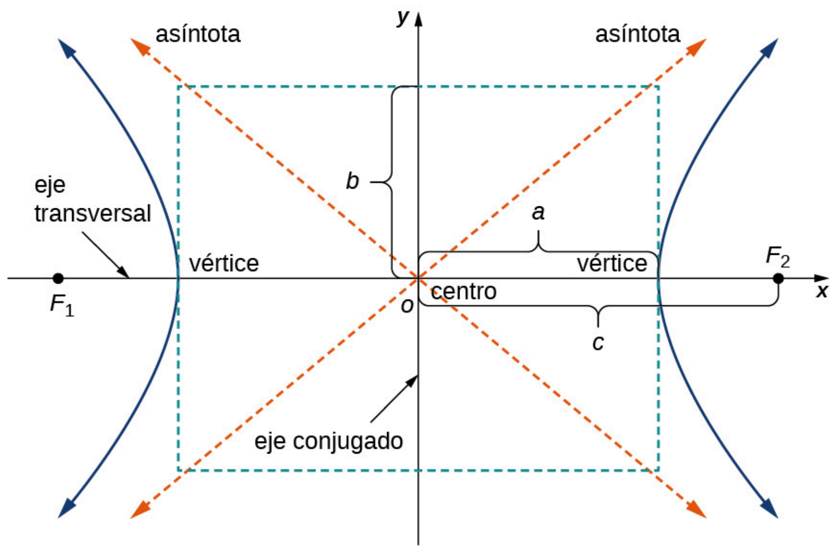


Figura 7.51 Una hipérbola típica en la que la diferencia de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es constante. El eje transversal también se llama eje mayor, y el eje conjugado también se llama eje menor.

La derivación de la ecuación de una hipérbola en forma estándar es prácticamente idéntica a la de una elipse. Un pequeño inconveniente radica en la definición: La diferencia entre dos números es siempre positiva. Supongamos que *P* es un punto de la hipérbola con coordenadas (x, y) . Entonces la definición de la hipérbola da $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{constante}$. Para simplificar la derivación, se supone que *P* está en la rama derecha de la hipérbola, por lo que las barras de valor absoluto se eliminan. Si está en la rama izquierda, la resta se invierte. El vértice de la rama derecha tiene coordenadas $(a, 0)$, así que

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = (c + a) - (c - a) = 2a.$$

Por tanto, esta ecuación es cierta para cualquier punto de la hipérbola. Volviendo a las coordenadas (x, y) para *P*:

$$\begin{aligned} d(P, F_1) - d(P, F_2) &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Sume el segundo radical de ambos lados y eleve ambos lados al cuadrado:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ -2cx &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx. \end{aligned}$$

Ahora aísle el radical del lado derecho y vuelva a elevarlo al cuadrado:

$$\begin{aligned}
-2cx &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= -4a^2 - 4cx \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= -a - \tfrac{cx}{a} \\
(x+c)^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \tfrac{c^2x^2}{a^2} \\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \tfrac{c^2x^2}{a^2} \\
x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \tfrac{c^2x^2}{a^2}.
\end{aligned}$$

Aísle las variables del lado izquierdo de la ecuación y las constantes del lado derecho:

$$\begin{aligned}
x^2 - \tfrac{c^2x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2 \\
\frac{\left(a^2 - c^2\right)x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, divida ambos lados entre $a^2 - c^2$. Esto da la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Ahora definimos b de manera que $b^2 = c^2 - a^2$. Esto es posible porque $c > a$. Por lo tanto, la ecuación de la elipse se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por último, si el centro de la hipérbola se desplaza del origen al punto (h, k), tenemos la siguiente forma estándar de una hipérbola.

Teorema 7.10

Ecuación de una hipérbola en forma estándar

Consideremos la hipérbola con centro (h, k), un eje mayor horizontal y un eje menor vertical. Entonces la ecuación de esta elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{7.14}$$

y los focos se encuentran en $(h \pm c, k)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. Las ecuaciones de las asíntotas están dadas por $y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$. Las ecuaciones de las directrices son

$$x = k \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = h \pm \frac{a^2}{c}.$$

Si el eje mayor es vertical, la ecuación de la hipérbola se convierte en

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{7.15}$$

y los focos se encuentran en $(h, k \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. Las ecuaciones de las asíntotas están dadas por $y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$. Las ecuaciones de las directrices son

$$y = k \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k \pm \frac{a^2}{c}.$$

Si el eje mayor (eje transversal) es horizontal, la hipérbola se llama horizontal, y si el eje mayor es vertical, la hipérbola se llama vertical. La ecuación de una hipérbola está en forma general si tiene la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde A y B tienen signos opuestos. Para convertir la ecuación de la forma general a la forma estándar, utilice el método

de completar el cuadrado.

EJEMPLO 7.21

Hallar la forma estándar de una hipérbola

Escriba la ecuación $9x^2 - 16y^2 + 36x + 32y - 124 = 0$ en forma estándar y grafique la hipérbola resultante. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas?

Solución

Primero sume 124 a ambos lados de la ecuación:

$$9x^2 - 16y^2 + 36x + 32y = 124.$$

A continuación, agrupe los términos x y los términos y y luego factorice los factores comunes:

$$\begin{aligned}\left(9x^2 + 36x\right) - \left(16y^2 - 32y\right) &= 124 \\ 9\left(x^2 + 4x\right) - 16\left(y^2 - 2y\right) &= 124.\end{aligned}$$

Tenemos que determinar la constante que cuando se suma dentro de cada conjunto de paréntesis, da como resultado un cuadrado perfecto. En el primer conjunto de paréntesis, tome la mitad del coeficiente de x y elévelo al cuadrado. Esto da $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$. En el segundo paréntesis, tome la mitad del coeficiente de y y elévelo al cuadrado. Esto da $\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$. Sume esto dentro de cada par de paréntesis. Como el primer conjunto de paréntesis tiene un 9 delante, en realidad estamos sumando 36 al lado izquierdo. Del mismo modo, restamos 16 al segundo conjunto de paréntesis. Por lo tanto, la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned}9\left(x^2 + 4x + 4\right) - 16\left(y^2 - 2y + 1\right) &= 124 + 36 - 16 \\ 9\left(x^2 + 4x + 4\right) - 16\left(y^2 - 2y + 1\right) &= 144.\end{aligned}$$

A continuación, factorice ambos conjuntos de paréntesis y divida entre 144:

$$\begin{aligned}9(x + 2)^2 - 16(y - 1)^2 &= 144 \\ \frac{9(x+2)^2}{144} - \frac{16(y-1)^2}{144} &= 1 \\ \frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} &= 1\end{aligned}$$

La ecuación está ahora en forma estándar. Si se compara con la Ecuación 7.15 se obtiene $h = -2$, $k = 1$, $a = 4$, y $b = 3$. Se trata de una hipérbola horizontal con centro en $(-2, 1)$ y las asíntotas dadas por las ecuaciones $y = 1 \pm \frac{3}{4}(x + 2)$. El gráfico de esta hipérbola aparece en la siguiente figura.

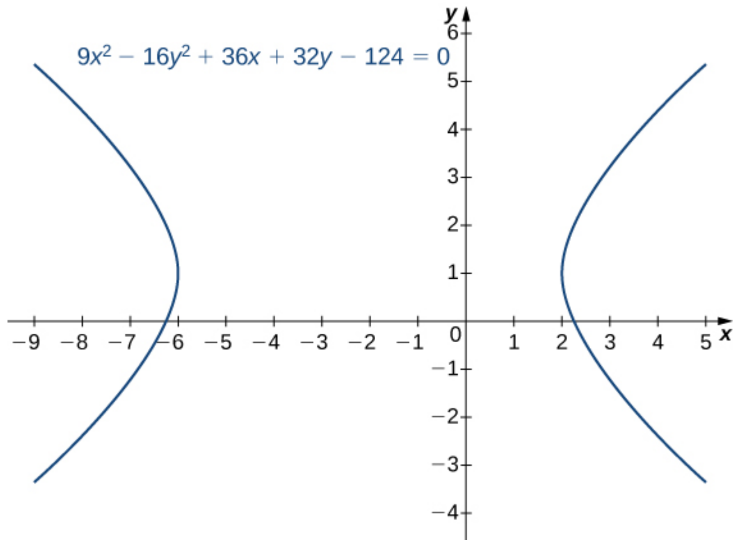


Figura 7.52 Gráfico de la hipérbola en el Ejemplo 7.21.

7.20 Escriba la ecuación $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x - 29 = 0$ en forma estándar y grafique la hipérbola resultante. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas?

Las hipérbolas también tienen propiedades interesantes de reflexión. Un rayo dirigido hacia un foco de una hipérbola es reflejado por un espejo hiperbólico hacia el otro foco. Este concepto se ilustra en la siguiente figura.

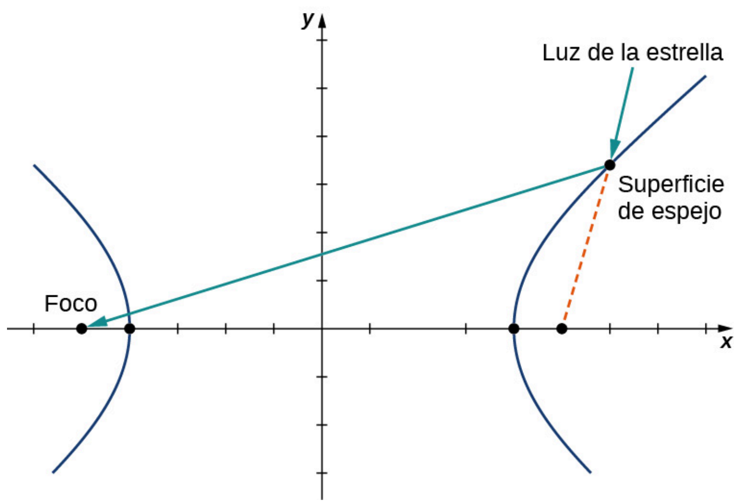


Figura 7.53 Un espejo hiperbólico utilizado para recoger la luz de las estrellas lejanas.

Esta propiedad de la hipérbola tiene aplicaciones importantes. Se utiliza en la radiogoniometría (ya que la diferencia de las señales de dos torres es constante a lo largo de las hipérbolas) y en la construcción de espejos dentro de los telescopios (para reflejar la luz procedente del espejo parabólico hacia el ocular). Otro hecho interesante sobre las hipérbolas es que para un cometa que entra en el sistema solar, si la velocidad es lo suficientemente grande como para escapar de la atracción gravitatoria del Sol, entonces la trayectoria que toma el cometa a su paso por el sistema solar es hiperbólica.

Excentricidad y directriz

Una forma alternativa de describir una sección cónica implica las directrices, los focos y una nueva propiedad llamada excentricidad. Veremos que el valor de la excentricidad de una sección cónica puede definir de forma única esa sección cónica.

Definición

La **excentricidad** *e* de una sección cónica se define como la distancia de cualquier punto de la sección cónica a su foco, dividida entre la distancia perpendicular de ese punto a la directriz más cercana. Este valor es constante para cualquier sección cónica, y puede definir también la sección cónica:

1. Si $e = 1$, la sección cónica es una parábola.
2. Si $e < 1$, es una elipse.
3. Si $e > 1$, es una hipérbola.

La excentricidad de un círculo es cero. La directriz de una sección cónica es la línea que, junto con el punto conocido como foco, sirve para definir una sección cónica. Las hipérbolas y las elipses no circulares tienen dos focos y dos directrices asociadas. Las parábolas tienen un foco y una directriz.

Las tres secciones cónicas con sus directrices aparecen en la siguiente figura.

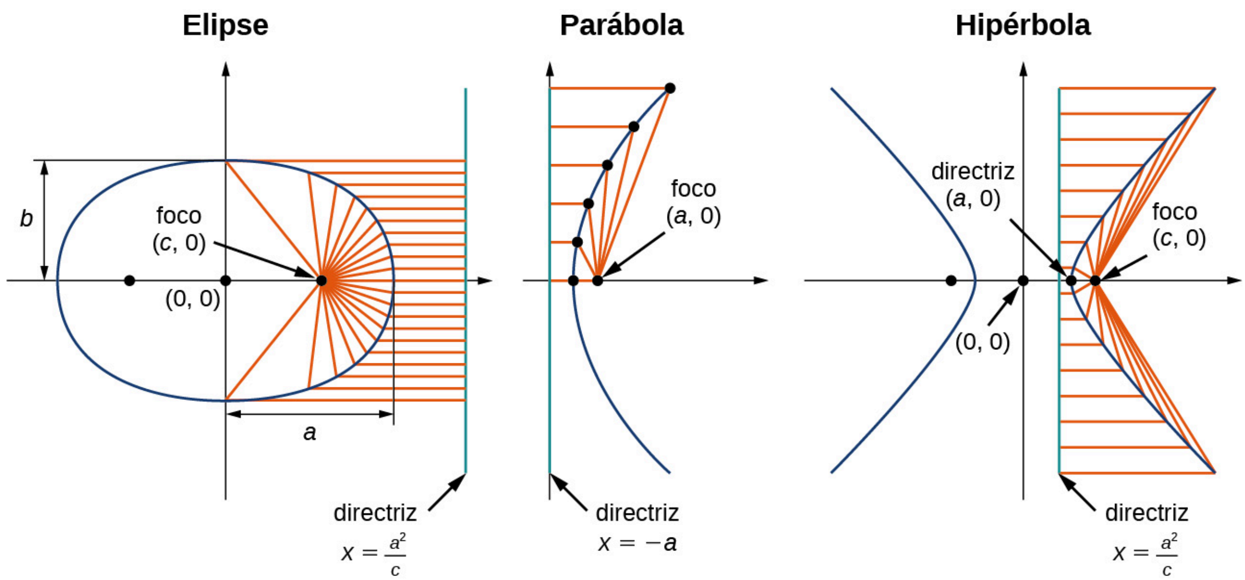


Figura 7.54 Las tres secciones cónicas con sus focos y directrices.

Recordemos de la definición de parábola que la distancia de cualquier punto de la parábola al foco es igual a la distancia de ese mismo punto a la directriz. Por lo tanto, por definición, la excentricidad de una parábola debe ser 1. Las ecuaciones de las directrices de una elipse horizontal son $x = \pm\frac{a^2}{c}$. El vértice derecho de la elipse se encuentra en $(a, 0)$ y el foco derecho es $(c, 0)$. Por tanto, la distancia del vértice al foco es $a - c$ y la distancia del vértice a la directriz derecha es $\frac{a^2}{c} - a$. Esto da la excentricidad como

$$e = \frac{a - c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{c\,(a - c)}{a^2 - ac} = \frac{c\,(a - c)}{a\,(a - c)} = \frac{c}{a}.$$

Dado que $c < a$, este paso demuestra que la excentricidad de una elipse es menor que 1. Las directrices de una hipérbola horizontal también se encuentran en $x = \pm\frac{a^2}{c}$, y un cálculo similar muestra que la excentricidad de una hipérbola es también $e = \frac{c}{a}$. Sin embargo, en este caso tenemos $c > a$, por lo que la excentricidad de una hipérbola es mayor que 1.

EJEMPLO 7.22

Determinación de la excentricidad de una sección cónica

Determine la excentricidad de la elipse descrita por la ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1.$$

Solución

De la ecuación vemos que $a=5$ y $b=4$. El valor de *c* puede calcularse mediante la ecuación $a^2=b^2+c^2$ para una elipse. Sustituyendo los valores de *a* y *b* y resolviendo para *c* se obtiene $c=3$. Por lo tanto la excentricidad de la elipse es $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0{,}6$.

7.21 Determine la excentricidad de la hipérbola descrita por la ecuación

$$\frac{(y-3)^2}{49}-\frac{(x+2)^2}{25}=1.$$

Ecuaciones polares de secciones cónicas

A veces es útil escribir o identificar la ecuación de una sección cónica en forma polar. Para ello, necesitamos el concepto de parámetro focal. El **parámetro focal** de una sección cónica *p* se define como la distancia de un foco a la directriz más cercana. En la siguiente tabla se indican los parámetros focales para los distintos tipos de secciones cónicas, donde *a* es la longitud del semieje mayor (es decir, la mitad de la longitud del eje mayor), *c* es la distancia del origen al foco y *e* es la excentricidad. En el caso de una parábola, *a* representa la distancia del vértice al foco.

Sección cónica	*e*	*p*
Elipse	$0<e<1$	$\frac{a^2-c^2}{c}=\frac{a^2\left(1-e^2\right)}{e}$
Parábola	$e=1$	$2a$
Hipérbola	$e>1$	$\frac{c^2-a^2}{c}=\frac{a\left(e^2-1\right)}{e}$

Tabla 7.1 Excentricidades y parámetros focales de las secciones cónicas

Utilizando las definiciones del parámetro focal y la excentricidad de la sección cónica, podemos derivar una ecuación para cualquier sección cónica en coordenadas polares. En particular, suponemos que uno de los focos de una sección cónica dada se encuentra en el polo. Entonces, utilizando la definición de las distintas secciones cónicas en términos de distancias, es posible demostrar el siguiente teorema.

Teorema 7.11

Ecuación polar de las secciones cónicas

La ecuación polar de una sección cónica con parámetro focal *p* está dada por

$$r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}\text{ o } r=\frac{ep}{1\pm e\,\text{sen}\,\theta}.$$

En la ecuación de la izquierda, el eje mayor de la sección cónica es horizontal, y en la ecuación de la derecha, el eje mayor es vertical. Para trabajar con una sección cónica escrita en forma polar, primero hay que hacer que el término constante en el denominador sea igual a 1. Esto se puede hacer dividiendo tanto el numerador como el denominador de la fracción entre la constante que aparece delante del más o del menos en el denominador. Entonces el coeficiente del seno o coseno en el denominador es la excentricidad. Este valor identifica la sección cónica. Si el coseno aparece en el denominador, entonces la sección cónica es horizontal. Si aparece el seno, entonces la sección cónica es vertical. Si aparecen ambos, los ejes se giran. El centro de sección cónica no está necesariamente en el origen. El centro está en el origen solo si la sección cónica es un círculo (es decir, $e=0$).

EJEMPLO 7.23

Graficar una sección cónica en coordenadas polares

Identifique y cree un gráfico de la sección cónica descrita por la ecuación

$$r = \frac{3}{1 + 2\cos\theta}.$$

Solución

El término constante en el denominador es 1, por lo que la excentricidad de la sección cónica es 2. Esto es una hipérbola. El parámetro focal p puede calcularse mediante la ecuación $ep = 3$. Dado que $e = 2$, esto da $p = \frac{3}{2}$. La función coseno aparece en el denominador, por lo que la hipérbola es horizontal. Elija algunos valores para θ y cree una tabla de valores. Entonces podemos graficar la hipérbola (Figura 7.55).

θ	r	θ	r
0	1	π	−3
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{1+\sqrt{2}} \approx 1{,}2426$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3}{1-\sqrt{2}} \approx -7{,}2426$
$\frac{\pi}{2}$	3	$\frac{3\pi}{2}$	3
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3}{1-\sqrt{2}} \approx -7{,}2426$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3}{1+\sqrt{2}} \approx 1{,}2426$

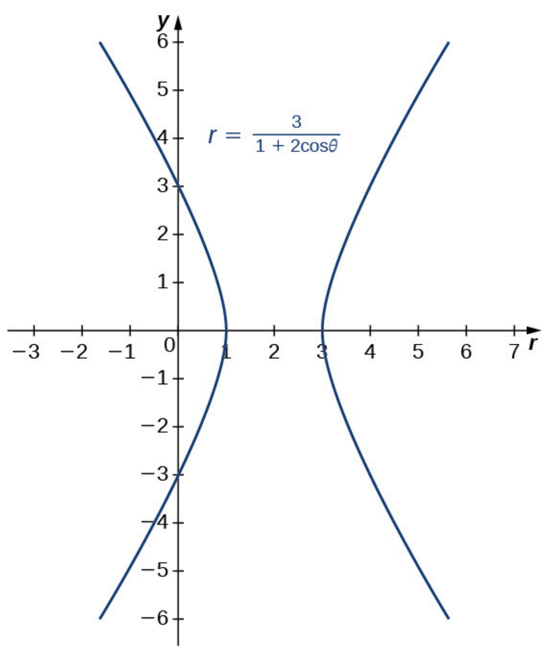


Figura 7.55 Gráfico de la hipérbola descrita en el Ejemplo 7.23.

7.22 Identifique y cree un gráfico de la sección cónica descrita por la ecuación

$$r = \frac{4}{1 - 0{,}8 \operatorname{sen}\theta}.$$

Ecuaciones generales de grado dos

Una ecuación general de grado dos puede escribirse de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

El gráfico de una ecuación de esta forma es una sección cónica. Si $B \neq 0$ entonces los ejes de coordenadas se giran. Para identificar la sección cónica, utilizamos el **discriminante** de la sección cónica $4AC - B^2$. Uno de los siguientes casos debe ser cierto:

1. $4AC - B^2 > 0$. Si es así, el gráfico es una elipse.
2. $4AC - B^2 = 0$. Si es así, el gráfico es una parábola.
3. $4AC - B^2 < 0$. Si es así, el gráfico es una hipérbola.

El ejemplo más sencillo de una ecuación de segundo grado que incluye un término cruzado es $xy = 1$. Esta ecuación puede ser resuelta para *y* para obtener $y = \frac{1}{x}$. El gráfico de esta función se llama *hipérbola rectangular*, como se muestra.

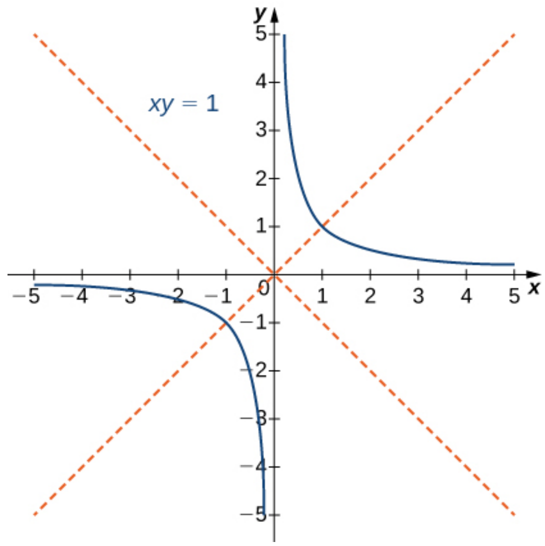


Figura 7.56 Gráfico de la ecuación $xy = 1$; Las líneas rojas indican los ejes girados.

Las asíntotas de esta hipérbola son los ejes de coordenadas *x* y *y*. Para determinar el ángulo θ de rotación de la sección cónica, utilizamos la fórmula $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$. En este caso $A = C = 0$ y $B = 1$, así que $\cot 2\theta = (0-0)/1 = 0$ y $\theta = 45°$. El método para graficar una sección cónica con ejes rotados implica determinar los coeficientes de la sección cónica en el sistema de coordenadas rotado. Los nuevos coeficientes se marcan como $A', B', C', D', E',$ y F', y están dados por las fórmulas

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + C\,\text{sen}^2\theta \\
B' &= 0 \\
C' &= A\,\text{sen}^2\theta - B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\
D' &= D\cos\theta + E\,\text{sen}\,\theta \\
E' &= -D\,\text{sen}\,\theta + E\cos\theta \\
F' &= F.
\end{aligned}$$

El procedimiento para graficar una sección cónica girada es el siguiente:

1. Identifique la sección cónica utilizando el discriminante $4AC - B^2$.
2. Determine θ utilizando la fórmula $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$.
3. Calcule $A', B', C', D', E',$ y F'.
4. Reescriba la ecuación original utilizando $A', B', C', D', E',$ y F'.
5. Dibuje un gráfico utilizando la ecuación girada.

EJEMPLO 7.24

Identificación de una sección cónica girada

Identifique la sección cónica y calcule el ángulo de rotación de los ejes para la curva descrita por la ecuación

$$13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 256 = 0.$$

Solución

En esta ecuación, $A = 13$, $B = -6\sqrt{3}$, $C = 7$, $D = 0$, $E = 0$, y $F = -256$. El discriminante de esta ecuación es $4AC - B^2 = 4(13)(7) - \left(-6\sqrt{3}\right)^2 = 364 - 108 = 256$. Por lo tanto esta sección cónica es una elipse. Para calcular el ángulo de rotación de los ejes, utilice $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$. Esto da

$$\begin{aligned} \cot 2\theta &= \frac{A-C}{B} \\ &= \frac{13-7}{-6\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2\theta = 120^{\text{o}}$ y $\theta = 60^{\text{o}}$, que es el ángulo de rotación de los ejes.

Para determinar los coeficientes rotados, utilice las fórmulas indicadas anteriormente:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + C\,\text{sen}^2\theta \\ &= 13\cos^2 60 + \left(-6\sqrt{3}\right)\cos 60\,\text{sen}\,60 + 7\text{sen}^2 60 \\ &= 13\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 6\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 4, \\ B' &= 0, \\ C' &= A\,\text{sen}^2\theta - B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ &= 13\text{sen}^2 60 + \left(-6\sqrt{3}\right)\text{sen}\,60\cos 60 = 7\cos^2 60 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) + 7\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &= 16, \\ D' &= D\cos\theta + E\,\text{sen}\,\theta \\ &= (0)\cos 60 + (0)\,\text{sen}\,60 \\ &= 0, \\ E' &= -D\,\text{sen}\,\theta + E\cos\theta \\ &= -(0)\,\text{sen}\,60 + (0)\cos 60 \\ &= 0, \\ F' &= F \\ &= -256. \end{aligned}$$

La ecuación de la sección cónica en el sistema de coordenadas rotado es

$$\begin{aligned} 4\left(x'\right)^2 + 16\left(y'\right)^2 &= 256 \\ \frac{\left(x'\right)^2}{64} + \frac{\left(y'\right)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Un gráfico de esta sección cónica es el siguiente.

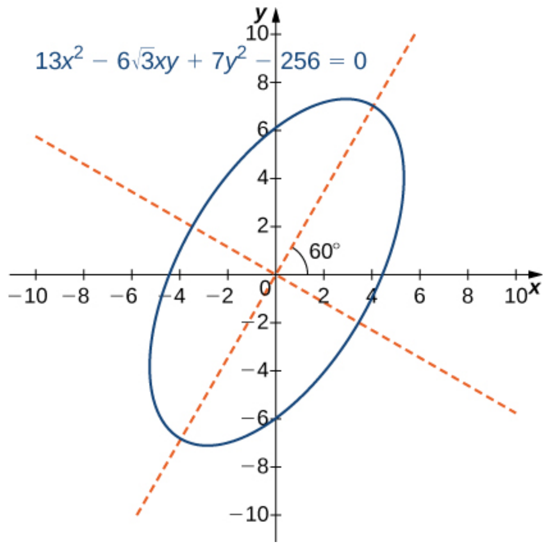


Figura 7.57 Gráfico de la elipse descrita por la ecuación $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 256 = 0$. Los ejes se rotan $60°$. Las líneas rojas discontinuas indican los ejes rotados.

7.23 Identifique la sección cónica y calcule el ángulo de rotación de los ejes para la curva descrita por la ecuación

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 125 = 0.$$

SECCIÓN 7.5 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, determine la ecuación de la parábola utilizando la información dada.

255. Foco $(4, 0)$ y directriz $x = -4$

256. Foco $(0, -3)$ y directriz $y = 3$

257. Foco $(0, 0{,}5)$ y directriz $y = -0{,}5$

258. Foco $(2,\ 3)$ y directriz $x = -2$

259. Foco $(0, 2)$ y directriz $y = 4$

260. Foco $(-1, 4)$ y directriz $x = 5$

261. Foco $(-3, 5)$ y directriz $y = 1$

262. Foco $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$ y directriz $x = \frac{7}{2}$

En los siguientes ejercicios, determine la ecuación de la elipse utilizando la información dada.

263. Puntos finales del eje mayor en $(4, 0)$, $(-4, 0)$ y focos situados en $(2, 0)$, $(-2, 0)$ grandes.

264. Puntos finales del eje mayor en $(0, 5)$, $(0, -5)$ y focos situados en $(0, 3)$, $(0, -3)$

265. Puntos finales del eje menor en $(0, 2)$, $(0, -2)$ y focos situados en $(3, 0)$, $(-3, 0)$ grandes.

266. Puntos finales del eje mayor en $(-3, 3)$, $(7, 3)$ y focos situados en $(-2, 3)$, $(6, 3)$

267. Puntos finales del eje mayor en $(-3, 5)$, $(-3, -3)$ y focos situados en $(-3, 3)$, $(-3, -1)$ grandes.

268. Puntos finales del eje mayor en $(0, 0)$, $(0, 4)$ y focos situados en $(5, 2)$, $(-5, 2)$

269. Focos situados en $(2, 0)$, $(-2, 0)$ y excentricidad de $\frac{1}{2}$

270. Focos situados en $(0, -3)$, $(0, 3)$ y excentricidad de $\frac{3}{4}$

En los siguientes ejercicios, determine la ecuación de la hipérbola utilizando la información dada.

271. Vértices situados en $(5, 0)$, $(-5, 0)$ y focos situados en $(6, 0)$, $(-6, 0)$ grandes.

272. Vértices situados en $(0, 2)$, $(0, -2)$ y focos situados en $(0, 3)$, $(0, -3)$

273. Puntos finales del eje conjugado situados en $(0, 3)$, $(0, -3)$ y focos situados en $(4, 0)$, $(-4, 0)$ grandes.

274. Vértices situados en $(0, 1)$, $(6, 1)$ y foco situado en $(8, 1)$

275. Vértices situados en $(-2, 0)$, $(-2, -4)$ y foco situado en $(-2, -8)$ grandes.

276. Puntos finales del eje conjugado situados en $(3, 2)$, $(3, 4)$ y foco situado en $(3, 7)$

277. Focos situados en $(6, -0)$, $(6, 0)$ y excentricidad de 3

278. $(0, 10)$, $(0, -10)$ y excentricidad de 2,5

En los siguientes ejercicios, considere las siguientes ecuaciones polares de secciones cónicas. Determine la excentricidad e identifique la sección cónica.

279. $r = \frac{-1}{1+\cos\theta}$

280. $r = \frac{8}{2-\text{sen}\,\theta}$

281. $r = \frac{5}{2+\text{sen}\,\theta}$

282. $r = \frac{5}{-1+2\,\text{sen}\,\theta}$

283. $r = \frac{3}{2-6\,\text{sen}\,\theta}$

284. $r = \frac{3}{-4+3\,\text{sen}\,\theta}$

En los siguientes ejercicios, halle una ecuación polar de la sección cónica con foco en el origen y excentricidad y directriz dadas.

285. Directriz: $x = 4; e = \frac{1}{5}$

286. Directriz: $x = -4; e = 5$

287. Directriz: $\text{y} = 2; e = 2$

288. Directriz: $\text{y} = -2; e = \frac{1}{2}$

En los siguientes ejercicios, dibuje el gráfico de cada sección cónica.

289. $r = \frac{1}{1+\text{sen}\,\theta}$

290. $r = \frac{1}{1-\cos\theta}$

291. $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$

292. $r = \frac{10}{5+4\,\text{sen}\,\theta}$

293. $r = \frac{15}{3-2\cos\theta}$

294. $r = \frac{32}{3+5\,\text{sen}\,\theta}$

295. $r(2 + \text{sen}\,\theta) = 4$

296. $r = \frac{3}{2+6\,\text{sen}\,\theta}$

297. $r = \frac{3}{-4+2\,\text{sen}\,\theta}$

298. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

299. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

300. $4x^2 + 9y^2 = 36$

301. $25x^2 - 4y^2 = 100$

302. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

303. $x^2 = 12y$

304. $y^2 = 20x$

305. $12x = 5y^2$

Para las siguientes ecuaciones, determine cuál de las secciones cónicas se describe.

306. $xy = 4$

307. $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

308. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0$

309. $x^2 - xy + y^2 - 2 = 0$

310. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$

311. $52x^2 - 72xy + 73y^2 + 40x + 30y - 75 = 0$

312. El espejo de un faro de automóvil tiene una sección transversal parabólica, con la bombilla en el foco. En un esquema, la ecuación de la parábola viene dada por $x^2 = 4y$. ¿En qué coordenadas debe colocar la bombilla?

313. Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. El receptor debe situarse en el foco. Si la antena parabólica tiene 12 pies de diámetro en la abertura y 4 pies de profundidad en su centro, ¿dónde debe colocarse el receptor?

314. Consideremos la antena parabólica del problema anterior. Si la antena parabólica tiene 8 pies de ancho en la abertura y 2 pies de profundidad, ¿dónde debemos colocar el receptor?

315. Un reflector tiene forma de paraboloide de revolución. Una fuente de luz está situada a 1 pie de la base a lo largo del eje de simetría. Si la abertura del reflector es de 3 pies de ancho, halle la profundidad.

316. Los gabinetes de secretos son habitaciones diseñadas con techos elípticos. Una persona situada en un foco puede susurrar y ser escuchada por una persona situada en el otro foco porque todas las ondas sonoras que llegan al techo se reflejan en la otra persona. Si un gabinete de secretos tiene una longitud de 120 pies y los focos están situados a 30 pies del centro, halle la altura del techo en el centro.

317. Una persona está de pie a 8 pies de la pared más cercana en un gabinete de secretos. Si esa persona está en un foco y el otro foco está a 80 pies, ¿cuál es la longitud y la altura en el centro de la galería?

En los siguientes ejercicios, determine la forma de ecuación polar de la órbita dada la longitud del eje mayor y la excentricidad para las órbitas de los cometas o planetas. La distancia se indica en unidades astronómicas (UA).

318. Cometa Halley: longitud del eje mayor = 35,88, excentricidad = 0,967

319. Cometa Hale-Bopp: longitud del eje mayor = 525,91, excentricidad = 0,995

320. Marte: longitud del eje mayor = 3,049, excentricidad = 0,0934

321. Júpiter: longitud del eje mayor = 10,408, excentricidad = 0,0484

Revisión del capítulo

Términos clave

caracol gráfico de la ecuación $r = a + b \operatorname{sen} \theta$ o $r = a + b \cos \theta$. Si $a = b$ entonces el gráfico es una cardioide

cardioide curva plana trazada por un punto en el perímetro de un círculo que está rodando alrededor de un círculo fijo del mismo radio; la ecuación de una cardioide es $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$ o $r = a(1 + \cos \theta)$

cicloide curva trazada por un punto del neumático de una rueda circular cuando esta rueda a lo largo de una línea recta sin deslizarse

coordenada angular θ el ángulo formado por un segmento de línea que une el origen a un punto del sistema de coordenadas polares con el eje radial (x) positivo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj

coordenada radial r coordenada en el sistema de coordenadas polares que mide la distancia de un punto del plano al polo

curva de relleno de espacio curva que ocupa completamente un subconjunto bidimensional del plano real

curva paramétrica gráfico de las ecuaciones paramétricas $x(t)$ y de $y(t)$ en un intervalo $a \leq t \leq b$ combinado con las ecuaciones

cúspide extremo o parte puntiaguda donde se juntan dos curvas

directriz línea utilizada para construir y definir una sección cónica; una parábola tiene una directriz; las elipses y las hipérbolas tienen dos

discriminante el valor $4AC - B^2$, que se utiliza para identificar una sección cónica cuando la ecuación contiene un término que implica xy, se llama discriminante

ecuación polar ecuación o función que relaciona la coordenada radial con la coordenada angular en el sistema de coordenadas polares

ecuaciones paramétricas las ecuaciones $x = x(t)$ y de $y = y(t)$ que definen una curva paramétrica

eje mayor el eje mayor de una sección cónica pasa por el vértice en el caso de una parábola o por los dos vértices en el caso de una elipse o una hipérbola; también es un eje de simetría de la sección cónica; también se llama eje transversal

eje menor el eje menor es perpendicular al eje mayor y corta al eje mayor en el centro de la sección cónica, o en el vértice en el caso de la parábola; también se llama eje conjugado

eje polar el eje horizontal en el sistema de coordenadas polares correspondiente a $r \geq 0$

excentricidad distancia de cualquier punto de la sección cónica a su foco dividida entre la distancia perpendicular de ese punto a la directriz más cercana

foco punto utilizado para construir y definir una sección cónica; una parábola tiene un foco; una elipse y una hipérbola tienen dos

forma estándar una ecuación de una sección cónica que muestra sus propiedades, como la ubicación del vértice o las longitudes de los ejes mayor y menor

forma general ecuación de una sección cónica escrita como una ecuación general de segundo grado

hoja la mitad de un cono doble

orientación dirección en la que se mueve un punto en un gráfico cuando aumenta el parámetro

parametrización de una curva reescribir la ecuación de una curva definida por una función $y = f(x)$ como ecuaciones paramétricas

parámetro una variable independiente de la que dependen tanto *x* como *y* en una curva paramétrica; normalmente representada por la variable t

parámetro focal distancia de un foco de una sección cónica a la directriz más cercana

polo punto central del sistema de coordenadas polares equivalente al origen de un sistema cartesiano

rosa gráfico de la ecuación polar $r = a \cos 2\theta$ o $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ para una constante positiva *a*

sección cónica cualquier curva formada por la intersección de un plano con un cono de dos hojas

sistema de coordenadas polares sistema de localización de puntos en el plano. Las coordenadas son r, la coordenada radial, y θ, la coordenada angular

vértice punto extremo de una sección cónica; una parábola tiene un vértice en su punto de inflexión. Una elipse tiene dos vértices, uno en cada extremo del eje mayor; una hipérbola tiene dos vértices, uno en el punto de inflexión de cada rama

Ecuaciones clave

Derivada de ecuaciones paramétricas	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

Derivada de segundo orden de ecuaciones paramétricas	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(d/dt)(dy/dx)}{dx/dt}$
Área bajo una curva paramétrica	$A = \int_a^b y(t)\,x'(t)\;dt$
Longitud de arco de una curva paramétrica	$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$
Área superficial generada por una curva paramétrica	$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$

Área de una región delimitada por una curva polar	$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$
Longitud de arco de una curva polar	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + \left[f'(\theta)\right]^2}\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

Conceptos clave

7.1 Ecuaciones paramétricas

- Las ecuaciones paramétricas ofrecen una forma conveniente de describir una curva. Un parámetro puede representar el tiempo o alguna otra cantidad significativa.
- A menudo es posible eliminar el parámetro en una curva parametrizada para obtener una función o relación que describa esa curva.
- Siempre hay más de una forma de parametrizar una curva.
- Las ecuaciones paramétricas pueden describir curvas complicadas que son difíciles o quizás imposibles de describir utilizando coordenadas rectangulares.

7.2 Cálculo de curvas paramétricas

- La derivada de la curva definida paramétricamente $x = x(t)$ y de $y = y(t)$ se puede calcular mediante la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Utilizando la derivada, podemos hallar la ecuación de una línea tangente a una curva paramétrica.
- El área entre una curva paramétrica y el eje *x* puede determinarse mediante la fórmula $A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\;dt$.
- La longitud de arco de una curva paramétrica se puede calcular mediante la fórmula $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$.
- La superficie de un volumen de revolución que gira alrededor del eje *x* está dada por $S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$. Si la curva gira alrededor del eje *y*, entonces la fórmula es $S = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$.

7.3 Coordenadas polares

- El sistema de coordenadas polares ofrece una forma alternativa de localizar puntos en el plano.
- Convierta puntos entre coordenadas rectangulares y polares mediante las fórmulas

$$x = r\cos\theta \text{ y } y = r\,\text{sen}\,\theta$$

y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

- Para dibujar una curva polar a partir de una función polar dada, haga una tabla de valores y aproveche las propiedades periódicas.
- Utilice las fórmulas de conversión para convertir ecuaciones entre coordenadas rectangulares y polares.
- Identifique la simetría en las curvas polares, que puede darse a través del polo, del eje horizontal o del eje vertical.

7.4 Área y longitud de arco en coordenadas polares

- El área de una región en coordenadas polares definida por la ecuación $r = f(\theta)$ con $\alpha \le \theta \le \beta$ está dada por la integral $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2 \, d\theta$.
- Para hallar el área entre dos curvas en el sistema de coordenadas polares, primero hay que hallar los puntos de intersección y luego restar las áreas correspondientes.
- La longitud de arco de una curva polar definida por la ecuación $r = f(\theta)$ con $\alpha \le \theta \le \beta$ está dada por la integral $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$.

7.5 Secciones cónicas

- La ecuación de una parábola vertical en forma estándar con foco y directriz dados es $y = \frac{1}{4p}(x - h)^2 + k$ donde p es la distancia del vértice al foco y (h, k) son las coordenadas del vértice.
- La ecuación de una elipse horizontal en forma estándar es $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ donde el centro tiene coordenadas (h, k), el eje mayor tiene longitud 2*a*, el eje menor tiene longitud 2*b* y las coordenadas de los focos son $(h \pm c, k)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$.
- La ecuación de una hipérbola horizontal en forma estándar es $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ donde el centro tiene coordenadas (h, k), los vértices se encuentran en $(h \pm a, k)$, y las coordenadas de los focos son $(h \pm c, k)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.
- La excentricidad de una elipse es menor que 1, la excentricidad de una parábola es igual a 1 y la excentricidad de una hipérbola es mayor que 1. La excentricidad de un círculo es 0.
- La ecuación polar de una sección cónica con excentricidad *e* es $r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$ o $r = \frac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen}\theta}$, donde *p* representa el parámetro focal.
- Para identificar una sección cónica generada por la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, primero calcule el discriminante $D = 4AC - B^2$. Si $D > 0$ entonces la sección cónica es una elipse, si $D = 0$ entonces la cónica es una parábola, y si $D < 0$ entonces la cónica es una hipérbola.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

322. Las coordenadas rectangulares del punto $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ son $\left(2\sqrt{3}, -2\right)$.

323. Las ecuaciones $x = \cosh(3t)$, $y = 2\operatorname{senoh}(3t)$ representan una hipérbola.

324. La longitud de arco de la espiral dada por $r = \frac{\theta}{2}$ para $0 \le \theta \le 3\pi$ es $\frac{9}{4}\pi^3$.

325. Dada $x = f(t)$ y de $y = g(t)$, si $\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx}$, entonces $f(t) = g(t) + \text{C}$, donde C es una constante.

En los siguientes ejercicios, dibuje la curva paramétrica y elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

326. $x = 1 + t,\ y = t^2 - 1,$ $-1 \leq t \leq 1$

327. $x = e^t,\ y = 1 - e^{3t},$ $0 \leq t \leq 1$

328. $x = \text{sen}\,\theta,\ y = 1 - \csc\theta,$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

329. $x = 4\cos\phi,$ $y = 1 - \text{sen}\,\phi,$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$

En los siguientes ejercicios, dibuje la curva polar y determine qué tipo de simetría existe, si es que existe.

330. $r = 4\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)$ grandes.

331. $r = 5\cos(5\theta)$

En los siguientes ejercicios, halle la ecuación polar de la curva dada como ecuación cartesiana.

332. $x + y = 5$

333. $y^2 = 4 + x^2$

En los siguientes ejercicios, halle la ecuación de la línea tangente a la curva dada. Grafique la función y su línea tangente.

334. $x = \ln(t),\ y = t^2 - 1,\ t = 1$

335. $r = 3 + \cos(2\theta),\ \theta = \frac{3\pi}{4}$

336. Halle $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$, y $\frac{d^2x}{dy^2}$ de $y = \left(2 + e^{-t}\right),$ $x = 1 - \text{sen}(t)$

En los siguientes ejercicios, halle el área de la región.

337. $x = t^2,\ y = \ln(t),$ $0 \leq t \leq e$

338. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$ en el primer cuadrante

En los siguientes ejercicios, halle la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.

339. $x = 3t + 4,\ y = 9t - 2,$ $0 \leq t \leq 3$

340. $r = 6\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$ Compruebe su respuesta utilizando la geometría.

En los siguientes ejercicios, halle la ecuación cartesiana que describe las formas dadas.

341. Una parábola con foco $(2, -5)$ y directriz $x = 6$

342. Una elipse con una longitud de eje mayor de 10 y focos en $(-7, 2)$ y $(1, 2)$

343. Una hipérbola con vértices en $(3, -2)$ y $(-5, -2)$ y focos en $(-2, -6)$ y $(-2, 4)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, determine la excentricidad e identifique la sección cónica. Dibuje la sección cónica.

344. $r = \frac{6}{1+3\cos(\theta)}$ grandes.

345. $r = \frac{4}{3-2\cos\theta}$

346. $r = \frac{7}{5-5\cos\theta}$

347. Determine la ecuación cartesiana que describe la órbita de Plutón, la más excéntrica alrededor del Sol. La longitud del eje mayor es de 39,26 UA y la del eje menor de 38,07 UA. ¿Cuál es la excentricidad?

348. El cometa C/1980 E1 fue observado en 1980. Dada una excentricidad de 1,057 y un perihelio (punto de máxima aproximación al Sol) de 3,364 UA, halle las ecuaciones cartesianas que describen la trayectoria del cometa. ¿Está garantizado que volveremos a ver este cometa? (*Pista*: Considere el Sol en el punto $(0, 0)$.)

A TABLA DE INTEGRALES

Integrales básicas

1. $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

3. $\int e^u\, du = e^u + C$

4. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u\, du = \ln |\sec u| + C$

12. $\int \cot u\, du = \ln |\sin u| + C$

13. $\int \sec u\, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

14. $\int \csc u\, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$

16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$

Integrales trigonométricas

18. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

19. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

20. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

21. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

22. $\int \text{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}\left(2 + \text{sen}^2 u\right)\cos u + C$

23. $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}\left(2 + \cos^2 u\right)\sin u + C$

24. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

25. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$

26. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

27. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u\cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

28. $\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\,du$

29. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

30. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

31. $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

32. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u\sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

33. $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u\csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

34. $\int \text{sen}\,au\sin bu\,du = \frac{\text{sen}\,(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\text{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

35. $\int \cos au\cos bu\,du = \frac{\text{sen}\,(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\text{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

36. $\int \text{sen}\,au\cos bu\,du = -\frac{\cos\,(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

37. $\int u\sin u\,du = \text{sen}\,u - u\cos u + C$

38. $\int u\cos u\,du = \cos u + u\sin u + C$

39. $\int u^n\sin u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

40. $\int u^n\cos u\,du = u^n\sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$

41. $$\begin{aligned}\int \sin^n u\cos^m u\,du &= -\frac{\text{sen}^{n-1} u\cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} u\cos^m u\,du \\ &= \frac{\text{sen}^{n+1} u\cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n u\cos^{m-2} u\,du\end{aligned}$$

Integrales exponenciales y logarítmicas

42. $\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

43. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

44. $\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$

45. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$

46. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

47. $\int u^n\ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

48. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Integrales hiperbólicas

49. $\int \operatorname{senoh} u\,du = \cosh u + C$

50. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senoh} u + C$

51. $\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

52. $\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senoh} u| + C$

53. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senoh} u| + C$

54. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh \frac{1}{2}u\right| + C$

55. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

56. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

57. $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

58. $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrales trigonométricas inversas

59. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\sin^{-1}u + \sqrt{1-u^2} + C$

60. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1}u - \sqrt{1-u^2} + C$

61. $\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1}u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + C$

62. $\int u\sin^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\sin^{-1}u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

63. $\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1}u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

64. $\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1}u - \frac{u}{2} + C$

65. $\int u^n\sin^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\sin^{-1}u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\ n \neq -1$

66. $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$

67. $\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right], n \neq -1$

Integrales que implican $a^2 + u^2$, $a > 0$

68. $\int \sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

69. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{8}\left(a^2+2u^2\right)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

70. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

71. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

72. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

73. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\left(\sqrt{a^2+u^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

74. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

75. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2 u} + C$

76. $\int \frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Integrales que implican u^2 - a^2, $a > 0$

77. $\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

78. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

79. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

80. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

81. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

82. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

83. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2 u} + C$

84a. $\int \frac{du}{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

84b. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Integrales que implican $a^2 - u^2$, $a > 0$

85. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

86. $\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}\left(2u^2 - a^2\right)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

87. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

88. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

89. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

90. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

91. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

92. $\int \left(a^2 - u^2\right)^{3/2} du = -\frac{u}{8}\left(2u^2 - 5a^2\right)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

93a. $\int \frac{du}{\left(a^2 - u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

93b. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

Integrales que implican $2au - u^2$, $a > 0$

94. $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

95. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

96. $\int u\sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

97. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

Integrales que implican $a + bu$, $a \neq 0$

98. $\int \frac{u\, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}\left(a + bu - a\ln|a + bu|\right) + C$

99. $\int \frac{u^2\, du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2\ln|a + bu|\right] + C$

100. $\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

101. $\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

102. $\int \frac{u\, du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a + bu| + C$

103. $\int \frac{u\, du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

104. $\int \frac{u^2\, du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

105. $\int u\sqrt{a+bu}\, du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$

106. $\int \frac{u\, du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$

107. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}\left(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu\right)\sqrt{a+bu} + C$

108. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan - 1\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \quad \text{si } a < 0$$

109. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\, du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

110. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

111. $\int u^n\sqrt{a+bu}\, du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\, du\right]$

112. $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{a+bu}}$

113. $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

B TABLA DE DERIVADAS

Fórmulas generales

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
3. $\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, para los números reales n
5. $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$
6. $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
8. $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

9. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
10. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
12. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
13. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
14. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Funciones trigonométricas inversas

15. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$
17. $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
18. $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19. $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$
20. $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Funciones exponenciales y logarítmicas

21. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
22. $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$
23. $\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$
24. $\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right) = \frac{1}{x \ln b}$

Funciones hiperbólicas

25. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senoh} x) = \cosh x$
26. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

27. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

28. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

29. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

30. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

Funciones hiperbólicas inversas

31. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{senoh}^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

32. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}(|x| < 1)$

33. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1)$

34. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$

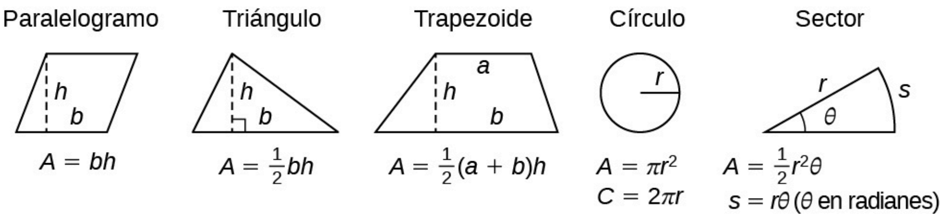
35. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$

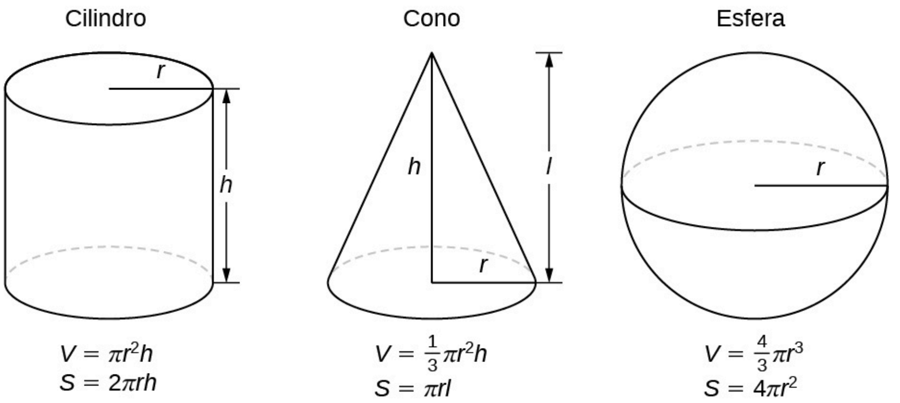
36. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} x\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\ (x \neq 0)$

C REPASO DE PRECÁLCULO

Fórmulas de geometría

Los términos $A = \text{área}, V = \text{Volumen}, \text{ y } S = \text{área superficial lateral}$





Fórmulas de álgebra

Leyes de los exponentes

Los términos

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Factorizaciones especiales

Los términos

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

Fórmula cuadrática

Si los valores de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ca}}{2a}$.

Teorema del binomio

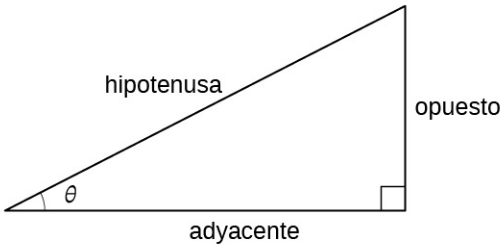
Los términos $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$,

donde $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Fórmulas de trigonometría

Trigonometría de ángulo recto

Los términos $$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} & \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} \\ \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} & \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} \\ \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} & \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \end{array}$$



Funciones trigonométricas de ángulos importantes

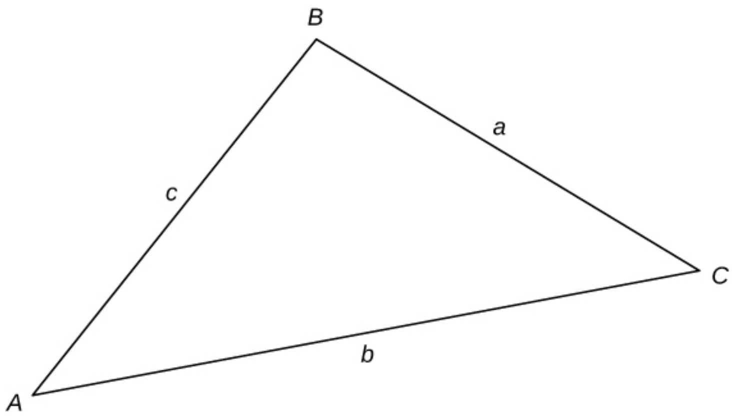
Los términos θ	Los términos Radianes	Los términos $\operatorname{sen}\theta$	Los términos $\cos\theta$	Los términos $\tan\theta$
Los términos $0°$	Los términos 0	Los términos 0	Los términos 1	Los términos 0
Los términos $30°$	Los términos $\pi/6$	Los términos $1/2$	Los términos $\sqrt{3}/2$	Los términos $\sqrt{3}/3$
Los términos $45°$	Los términos $\pi/4$	Los términos $\sqrt{2}/2$	Los términos $\sqrt{2}/2$	Los términos 1
Los términos $60°$	Los términos $\pi/3$	Los términos $\sqrt{3}/2$	Los términos $1/2$	Los términos $\sqrt{3}$
Los términos $90°$	Los términos $\pi/2$	Los términos 1	Los términos 0	—

Identidades fundamentales

Los términos $$\begin{array}{rclrcl} \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta & = & 1 & \operatorname{sen}(-\theta) & = & -\operatorname{sen}\theta \\ 1 + \tan^2\theta & = & \sec^2\theta & \cos(-\theta) & = & \cos\theta \\ 1 + \cot^2\theta & = & \csc^2\theta & \tan(-\theta) & = & -\tan\theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & = & \cos\theta & \sin(\theta + 2\pi) & = & \operatorname{sen}\theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & = & \operatorname{sen}\theta & \cos(\theta + 2\pi) & = & \cos\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & = & \cot\theta & \tan(\theta + \pi) & = & \tan\theta \end{array}$$

Ley de senos

Los términos $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



Ley de los cosenos

Los términos
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Fórmulas de suma y resta

Los términos
$$\begin{aligned} \text{sen }(x+y) &= \text{sen } x\cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) &= \text{sen } x\cos y - \cos x\sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \text{sen } x\sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \text{sen } x\sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \end{aligned}$$

Fórmulas del ángulo doble

Los términos
$$\begin{aligned} \text{sen } 2x &= 2\,\text{sen } x\cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

Fórmulas de ángulo mitad

Los términos
$$\begin{aligned} \text{sen}^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

Clave de respuestas

Capítulo 1

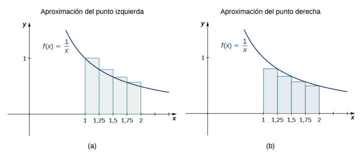
Punto de control

1.1 $\sum_{i=3}^{6} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 120$

1.2 15.550

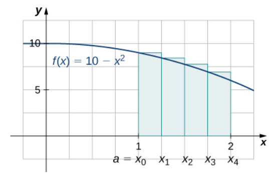
1.3 440

1.4 La aproximación del extremo izquierdo es de 0,7595. La aproximación del punto final derecho es 0,6345.



1.5 a. $\text{Suma superior} = 8{,}0313.$

b.



1.6 $A \approx 1{,}125$

1.7 6

1.8 18 unidades cuadradas

1.9 6

1.10 18

1.11 $6\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x^2\,dx + 2\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 3\,dx$

1.12 −7

1.13 3

1.14 $\text{Valor medio} = 1{,}5;\ c = 3$

1.15 $c = \sqrt{3}$

1.16 $g'(r) = \sqrt{r^2 + 4}$

1.17 $F'(x) = 3x^2 \cos x^3$

1.18 $F'(x) = 2x \cos x^2 - \cos x$

1.19 $\frac{7}{24}$

1.20 Kathy sigue ganando, pero por un margen mucho mayor: James patina 24 ft en 3 segundos, pero Kathy patina 29,3634 ft en 3 segundos.

1.21 $-\frac{10}{3}$

1.22 Desplazamiento neto: $\frac{e^2 - 9}{2} \approx -0{,}8055$ m; distancia total recorrida: $4 \ln 4 - 7{,}5 + \frac{e^2}{2} \approx 1{,}740$ m

1.23 17,5 mi

1.24 $\frac{64}{5}$

1.25 $\int 3x^2 \left(x^3 - 3\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x^3 - 3\right)^3 + C$

1.26 $\frac{\left(x^3 + 5\right)^{10}}{30} + C$

1.27 $-\frac{1}{\operatorname{sen} t} + C$

1.28 $-\frac{\cos^4 t}{4} + C$

1.29 $\frac{91}{3}$

1.30 $\frac{2}{3\pi} \approx 0{,}2122$

1.31 $\int x^2 e^{-2x^3} dx = -\frac{1}{6} e^{-2x^3} + C$

1.32 $\int e^x (3e^x - 2)^2 dx = \frac{1}{9}(3e^x - 2)^3$

1.33 $\int 2x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{2}e^{x^4}$

1.34 $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$

1.35 $Q(t) = \frac{2^t}{\ln 2} + 8{,}557$. Hay 20.099 bacterias en la placa después de 3 horas.

1.36 Hay 116.

1.37 $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{4x^{-2}} dx = \frac{1}{8}\left[e^4 - e\right]$

1.38 $\ln|x+2| + C$

1.39 $\frac{x}{\ln 3}(\ln x - 1) + C$

1.40 $\frac{1}{4}\text{sen}^{-1}(4x) + C$

1.41 $\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

1.42 $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right) + C$

1.43 $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$

1.44 $\frac{\pi}{8}$

Sección 1.1 ejercicios

1. a. Son iguales; ambas representan la suma de los 10 primeros números enteros. b. Son iguales; ambas representan la suma de los 10 primeros números enteros. c. Son iguales sustituyendo $j = i - 1$. d. Son iguales; la primera suma factoriza los términos de la segunda.

3. $385 - 30 = 355$

5. $15 - (-12) = 27$

7. $5(15) + 4(-12) = 27$

9. $\sum_{j=1}^{50} j^2 - 2\sum_{j=1}^{50} j = \frac{(50)(51)(101)}{6} - \frac{2(50)(51)}{2} = 40, \quad 375$

11. $4\sum_{k=1}^{25} k^2 - 100\sum_{k=1}^{25} k = \frac{4(25)(26)(51)}{6} - 50(25)(26) = -10, \quad 400$

13. $R_4 = -0{,}25$

15. $R_6 = 0{,}372$

17. $L_4 = 2{,}20$

19. $L_8 = 0{,}6875$

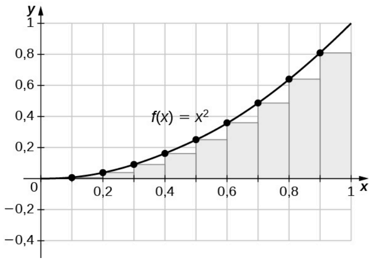
21. $L_6 = 9{,}000 = R_6$. El gráfico de f es un triángulo de área 9.

23. $L_6 = 13{,}12899 = R_6$. Son iguales.

25. $L_{10} = \frac{4}{10}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{4 - \left(-2 + 4\frac{(i-1)}{10}\right)^2}$

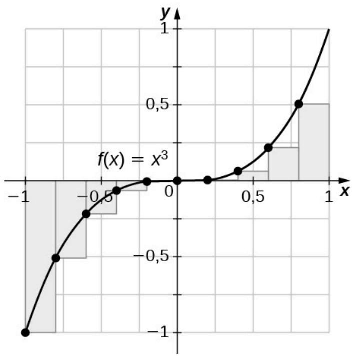
27. $R_{100} = \frac{e-1}{100} \sum_{i=1}^{100} \ln \left(1 + (e-1) \frac{i}{100} \right)$

29.



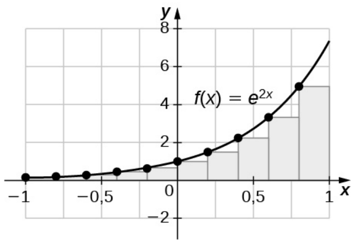
$R_{100} = 0{,}33835, L_{100} = 0{,}32835.$ El gráfico muestra que la suma de Riemann de la izquierda es una subestimación porque la función es creciente. Del mismo modo, la suma de Riemann derecha es una sobreestimación. El área se encuentra entre las sumas de Riemann izquierda y derecha. Se muestran diez rectángulos para mayor claridad visual. Este comportamiento persiste para más rectángulos.

31.



$L_{100} = -0{,}02, R_{100} = 0{,}02$. La suma del extremo izquierdo es una subestimación porque la función es creciente. Del mismo modo, una aproximación al extremo derecho es una sobreestimación. El área se encuentra entre las estimaciones de los puntos finales izquierdo y derecho.

33.



$L_{100} = 3{,}555, R_{100} = 3{,}670$. El gráfico muestra que la suma de Riemann de la izquierda es una subestimación porque la función es creciente. Se muestran diez rectángulos para mayor claridad visual. Este comportamiento persiste para más rectángulos.

35. La suma representa las precipitaciones acumuladas en enero de 2009.

37. El kilometraje total es

$$7 \times \sum_{i=1}^{25} \left(1 + \frac{(i-1)}{10} \right) = 7 \times 25 + \frac{7}{10} \times 12 \times 25 = 385 \text{ mi.}$$

39. Sume los números para obtener un aumento neto de 8,1 in.

41. 309.389.957

43. $L_8 = 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 = 24$

45. $L_8 = 3 + 5 + 7 + 6 + 8 + 6 + 5 + 4 = 44$ **47**. $L_{10} \approx 1{,}7604, L_{30} \approx 1{,}7625, L_{50} \approx 1{,}76265$

49. $R_1 = -1, L_1 = 1, R_{10} = -0{,}1, L_{10} = 0{,}1, L_{100} = 0{,}01,$ y $R_{100} = -0{,}1$. Por simetría del gráfico, el área exacta es cero.

51. $R_1 = 0, L_1 = 0, R_{10} = 2{,}4499, L_{10} = 2{,}4499, R_{100} = 2{,}1365, L_{100} = 2{,}1365$

53. Si $[c, d]$ es un subintervalo de $[a, b]$ bajo uno de los rectángulos de la suma del punto del extremo izquierdo, entonces el área del rectángulo que contribuye a la estimación del punto del extremo izquierdo es $f(c)(d - c)$. Pero, $f(c) \le f(x)$ por $c \le x \le d$, por lo que el área bajo el gráfico de *f* entre *c* y *d* es $f(c)(d - c)$ más el área por debajo del gráfico de *f* pero por encima del segmento de línea horizontal a la altura $f(c)$, que es positivo. Como esto se cumple en cada intervalo de suma del extremo izquierdo, se deduce que la suma de Riemann izquierda es menor o igual que el área bajo el gráfico de *f* en $[a, b]$.

55. $L_N = \frac{b–a}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b–a)\frac{i-1}{N}\right) = \frac{b–a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + (b–a)\frac{i}{N}\right)$ y $R_N = \frac{b–a}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b–a)\frac{i}{N}\right)$. La suma de la izquierda tiene un término correspondiente a $i = 0$ y la suma de la derecha tiene un término correspondiente a $i = N$. En $R_N - L_N$, cualquier término correspondiente a $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ aparece una vez con el signo más y otra con el signo menos, por lo que cada uno de estos términos se anula y uno queda $R_N - L_N = \frac{b–a}{N}\left(f(a + (b–a))\frac{N}{N}\right) - \left(f(a) + (b–a)\frac{0}{N}\right) = \frac{b–a}{N}(f(b) - f(a))$.

57. Gráfico 1: a. $L(A) = 0, B(A) = 20$; b. $U(A) = 20$. Gráfico 2: a. $L(A) = 9$; b. $B(A) = 11, U(A) = 20$. Gráfico 3: a. $L(A) = 11{,}0$; b. $B(A) = 4{,}5, U(A) = 15{,}5$.

59. Supongamos que *A* es el área del círculo unitario. El círculo encierra *n* triángulos congruentes de área $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$, por lo que $\frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leq A$. De la misma manera, el círculo está contenido en *n* triángulos congruentes de área $\frac{BH}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, por lo que $A \leq \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. A medida que $n \to \infty, \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \to \pi$, por lo que concluimos $\pi \leq A$. Además, como $n \to \infty, \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \to 1$, por lo que también tenemos $A \leq \pi$. Por el teorema del emparedado para los límites, concluimos que $A = \pi$.

Sección 1.2 ejercicios

61. $\int_0^2 \left(5x^2 - 3x^3\right) dx$

63. $\int_0^1 \cos^2(2\pi x)\, dx$

65. $\int_0^1 x dx$

67. $\int_3^6 x dx$

69. $\int_1^2 x\log\left(x^2\right) dx$

71. $1 + 2.2 + 3.3 = 14$

73. $1 - 4 + 9 = 6$

75. $1 - 2\pi + 9 = 10 - 2\pi$

77. La integral es el área del triángulo, $\frac{1}{2}$

79. La integral es el área del triángulo, 9.

81. La integral es el área $\frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi$.

83. La integral es el área del triángulo "grande" menos el triángulo "perdido", $9 - \frac{1}{2}$.

85. $L = 2 + 0 + 10 + 5 + 4 = 21, R = 0 + 10 + 10 + 2 + 0 = 22, \frac{L+R}{2} = 21{,}5$

87. $L = 0 + 4 + 0 + 4 + 2 = 10, R = 4 + 0 + 2 + 4 + 0 = 10, \frac{L+R}{2} = 10$

89. $\int_2^4 f(x)\, dx + \int_2^4 g(x)\, dx = 8 - 3 = 5$

91. $\int_2^4 f(x)\, dx - \int_2^4 g(x)\, dx = 8 + 3 = 11$

93. $4\int_2^4 f(x)\, dx - 3\int_2^4 g(x)\, dx = 32 + 9 = 41$

95. El integrando es impar; la integral es cero.

97. El integrando es antisimétrico con respecto a $x = 3$. La integral es cero.

99. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

101. $\int_0^1 \left(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right) dx = \left(x{-}3x^2 + 4x^3{-}2x^4\right) = \left(1{-}3 + 4{-}2\right)\left(0{-}0 + 0{-}0\right) = 0$

103. $7 - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}$

105. El integrando es negativo sobre $[-2, 3]$.

107. $x \le x^2$ en $[1, 2]$, así que $\sqrt{1 + x} \le \sqrt{1 + x^2}$ en $[1, 2]$.

109. $\cos(t) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$. Multiplique por la longitud del intervalo para obtener la desigualdad.

111. $f_{\text{ave}} = 0; c = 0$

113. $\frac{3}{2}$ cuando $c = \pm\frac{3}{2}$

115. $f_{\text{ave}} = 0; c = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

117. $L_{100} = 1{,}294, R_{100} = 1{,}301;$ el promedio exacto está entre estos valores.

119. $L_{100} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}5178, R_{100} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}5294$

121. $L_1 = 0, L_{10} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 8{,}743493, L_{100} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 12{,}861728.$
La respuesta exacta $\approx 26{,}799$, por lo que L_{100} no es exacta.

123. $L_1 \times \left(\frac{1}{\pi}\right) = 1{,}352, L_{10} \times \left(\frac{1}{\pi}\right) = -0{,}1837, L_{100} \times \left(\frac{1}{\pi}\right) = -0{,}2956.$
La respuesta exacta $\approx -0{,}303$, por lo que L_{100} no es exacto en el primer decimal.

125. Utilice la sustitución en $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Entonces, $B - A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1dx = \frac{\pi}{2}$.

127. $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$, así que divida por la longitud 2π del intervalo. $\cos^2 t$ tiene periodo π, así que es cierto.

129. La integral se maximiza cuando se utiliza el mayor intervalo en el que p es no negativo. Así, $A = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $B = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

131. Si los valores de $f(t_0) > g(t_0)$ para algunos $t_0 \in [a, b]$, entonces ya que $f - g$ es continua, existe un intervalo que contiene t_0 tal que $f(t) > g(t)$ en el intervalo $[c, d]$, y luego $\int_d^d f(t)\,dt > \int_c^d g(t)\,dt$ en este intervalo.

133. La integral de f sobre un intervalo es la misma que la integral del promedio de f sobre ese intervalo. Así,
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a_0}^{a_1} f(t)\,dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \cdots + \int_{a_{N+1}}^{a_N} f(t)\,dt = \int_{a_0}^{a_1} 1dt + \int_{a_1}^{a_2} 1dt + \cdots + \int_{a_{N+1}}^{a_N} 1dt$$
$= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + \left(a_N - a_{N-1}\right) = a_N - a_0 = b{-}a.$
Al dividir entre $b{-}a$ resulta la identidad deseada.

135. $\int_0^N f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{i-1}^{i} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

137. $L_{10} = 1{,}815, R_{10} = 1{,}515, \frac{L_{10}+R_{10}}{2} = 1{,}665,$ para que la estimación sea precisa con dos decimales.

139. El promedio es $1/2$, que en este caso es igual a la integral.

141. a. El gráfico es antisimétrico con respecto a $t = \frac{1}{2}$ en $[0, 1]$, para que el valor promedio sea cero. b. Para cualquier valor de *a*, el gráfico entre $[a, a+1]$ es un desplazamiento del gráfico sobre $[0, 1]$, para que las áreas netas por encima y por debajo del eje no cambien y el promedio siga siendo cero.

143. Sí, la integral sobre cualquier intervalo de longitud 1 es la misma.

Sección 1.3 ejercicios

145. Sí. Está implícito en el teorema del valor medio de las integrales.

147. $F'(2) = -1$; valor promedio de F' en $[1, 2]$ ¿es $-1/2$.

149. $e^{\cos x}$

151. $\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

153. $\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}$

155. $-\sqrt{1-\cos^2 x}\frac{d}{dx}\cos x = |\operatorname{sen} x|\operatorname{sen} x$

157. $2x\frac{|x|}{1+x^2}$

159. $\ln(e^{2x})\frac{d}{dx}e^x = 2xe^x$

161. a. *f* es positiva en $(1, 2)$ y $(5, 6)$, negativo en $(0, 1)$ y $(3, 4)$, y cero en $(2, 3)$ y $(4, 5)$. b. El valor máximo es 2 y el mínimo es -3. c. El valor medio es 0.

163. a. ℓ es positivo en $(0, 1)$ y $(3, 6)$, y negativo en $(1, 3)$. b. Aumenta en $(0, 1)$ y $(3, 5)$, y es constante a lo largo de $(1, 3)$ y $(5, 6)$. c. Su valor medio es $\frac{1}{3}$.

165. $T_{10} = 49{,}08, \int_{-4}^{3}\left(x^3 + 6x^2 + x - 5\right)dx = 48$

167. $T_{10} = 260{,}836, \int_{1}^{9}\left(\sqrt{x} + x^2\right)dx = 260$

169. $T_{10} = 3{,}058, \int_{1}^{4}\frac{4}{x^2}dx = 3$

171. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x, F(3) - F(-2) = -\frac{35}{6}$

173. $F(x) = -\frac{t^5}{5} + \frac{13t^3}{3} - 36t, F(3) - F(2) = \frac{62}{15}$

175. $F(x) = \frac{x^{100}}{100}, F(1) - F(0) = \frac{1}{100}$

177. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}, F(4) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1125}{64}$

179. $F(x) = \sqrt{x}, F(4) - F(1) = 1$

181. $F(x) = \frac{4}{3}t^{3/4}, F(16) - F(1) = \frac{28}{3}$

183. $F(x) = -\cos x, F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 1$

185. $F(x) = \sec x, F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \sqrt{2} - 1$

187. $F(x) = -\cot(x),\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

189. $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2},\ F(-1) - F(-2) = \frac{7}{8}$

191. $F(x) = e^x - e$

193. $F(x) = 0$

195. $\int_{-2}^{-1} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt - \int_{-1}^{3} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt + \int_{3}^{4} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt = \frac{46}{3}$

197. $-\int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen} t\, dt + \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = 2$

199. a. El promedio es $11{,}21 \times 10^9$ dado que $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ tiene periodo 12 e integral 0 en cualquier periodo. El consumo es igual al promedio cuando $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0$, cuando $t = 3$, y cuando $t = 9$. b. El consumo total es la tasa promedio por la duración: $11{,}21 \times 12 \times 10^9 = 1{,}35 \times 10^{11}$ c. $10^9 \left(11{,}21 - \frac{1}{6}\int_3^9 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) dt\right) = 10^9 \left(11{,}21 + \frac{2}{\pi}\right) = 11{,}84x10^9$

201. Si f no es constante, su promedio es estrictamente menor que el máximo y mayor que el mínimo, que se alcanzan sobre $[a, b]$ según el teorema del valor extremo.

203. a. $d^2\theta = (a\cos\theta + c)^2 + b^2\operatorname{sen}^2\theta = a^2 + c^2\cos^2\theta + 2ac\cos\theta = (a + c\cos\theta)^2$; b. $\bar{d} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a + 2c\cos\theta)\, d\theta = a$

205. Fuerza gravitacional media = $\frac{GmM}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(a + 2\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta\right)^2} d\theta.$

Sección 1.4 ejercicios

207. $\int\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C_1 - 2x^{1/2} + C_2 = \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2} + C$

209. $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$

211. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx - \int_0^{\pi} \cos x\, dx = -\cos x|_0^{\pi} - (\operatorname{sen} x)|_0^{\pi} = (-(-1) + 1) - (0 - 0) = 2$

213. $P(s) = 4s$, así que $\frac{dP}{ds} = 4$ y $\int_2^4 4ds = 8.$

215. $\int_1^2 N ds = N$

217. Con p como en el ejercicio anterior, cada uno de los 12 pentágonos aumenta su área de $2p$ unidades a $4p$ unidades por lo que el aumento neto del área del dodecaedro es de $36p$ unidades.

219. $18s^2 = 6\int_s^{2s} 2xdx$

221. $12\pi R^2 = 8\pi \int_R^{2R} rdr$

223. $d(t) = \int_0^t v(s)\, ds = 4t - t^2.$ La distancia total es $d(2) = 4$ m.

225. $d(t) = \int_0^t v(s)\, ds$. Para $t < 3, d(t) = \int_0^t (6 - 2t)\, dt = 6t - t^2$. Para $t > 3, d(t) = d(3) + \int_3^t (2t - 6)dt = 9 + (t^2 - 6t)\Big|_3^6.$ La distancia total es $d(6) = 18$ m.

227. $v(t) = 40 - 9{,}8t$m/s; $h(t) = 1{,}5 + 40t - 4{,}9t^2$ m/s

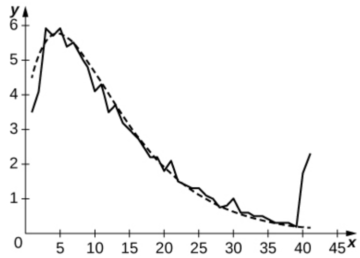
229. El aumento neto es de 1 unidad.

231. A $t = 5$, la altura del agua es $x = \left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}$ m.. El cambio neto de altura desde $t = 5$ al $t = 10$ ¿es $\left(\frac{30}{\pi}\right)^{1/3} - \left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}$ m.

233. El consumo total de energía diario se estima como la suma de las tasas de energía horaria, o sea 911 gW-h.

235. 17 kJ

237. a. 54,3 %; b. 27,00 %; c. La curva del siguiente gráfico es $2{,}35\,(t + 3)\, e^{-0{,}15(t+3)}$.

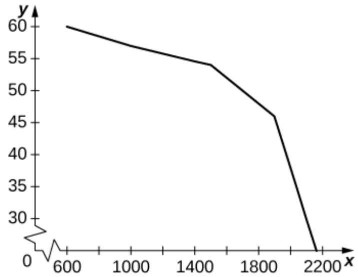


239. En condiciones secas, con una velocidad inicial $v_0 = 30$ m/s, $D = 64{,}3$ y, si $v_0 = 25$, $D = 44{,}64$. En condiciones de humedad, si $v_0 = 30$, y $D = 180$ y si $v_0 = 25$, $D = 125$.

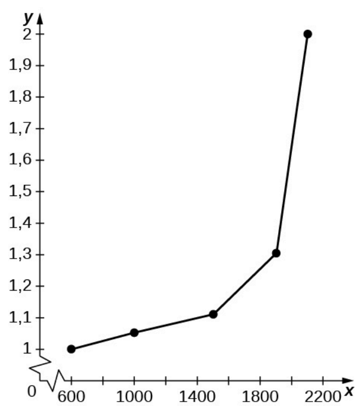
241. 225 cal

243. $E(150) = 28, E(300) = 22, E(450) = 16$

245. a.



b. Entre 600 y 1.000 la disminución promedio de vehículos por hora por carril es de -0,0075. Entre 1.000 y 1.500 es de -0,006 por vehículos por hora y carril, y entre 1.500 y 2.100 es de -0,04 vehículos por hora y carril. c.



El gráfico no es lineal, ya que los minutos por milla aumentan drásticamente a medida que los vehículos por hora por carril alcanzan los 2.000.

247. $\frac{1}{37}\int_0^{37} p(t)\,dt = \frac{0{,}07(37)^3}{4} + \frac{2{,}42(37)^2}{3} - \frac{25{,}63(37)}{2} + 521{,}23 \approx 2037$

249. La aceleración media es $A = \frac{1}{5}\int_0^5 a(t)\,dt = -\frac{0{,}7\left(5^2\right)}{3} + \frac{1{,}44(5)}{2} + 10{,}44 \approx 8{,}2$ mph/s

251. $d(t) = \int_0^1 |v(t)|\,dt = \int_0^t \left(\frac{7}{30}t^3 - 0{,}72t^2 - 10{,}44t + 41{,}033\right)dt = \frac{7}{120}t^4 - 0{,}24t^3 - 5{,}22t^3 + 41{,}033t.$ Entonces, $d(5) \approx 81{,}12$ mph $\times \sec \approx 119$ pies.

253. $\frac{1}{40}\int_0^{40} (-0{,}068t + 5{,}14)\,dt = -\frac{0{,}068(40)}{2} + 5{,}14 = 3{,}78\text{m/seg}$

Sección 1.5 ejercicios

255. $u = h(x)$

257. $f(u) = \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}$

259. $du = 8x dx;\ f(u) = \frac{1}{8\sqrt{u}}$

261. $\frac{1}{5}(x+1)^5 + C$

263. $-\frac{1}{12(2x-3)^6} + C$

265. $\sqrt{x^2+1} + C$

267. $\frac{1}{8}\left(x^2 - 2x\right)^4 + C$

269. $\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} + C$

271. $\frac{(1-x)^{101}}{101} - \frac{(1-x)^{100}}{100} + C$

273. $\int (11x-7)^{-2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{22(11x-7)^2} + C$

275. $-\frac{\cos^4\theta}{4} + C$

277. $-\frac{\cos^3(\pi t)}{3\pi} + C$

279. $-\frac{1}{4}\cos^2\left(t^2\right) + C$

281. $-\frac{1}{3(x^3-3)} + C$

283. $-\frac{2\left(y^3-2\right)}{3\sqrt{1-y^3}}$

285. $\frac{1}{33}\left(1 - \cos^3\theta\right)^{11} + C$

287. $\frac{1}{12}\left(\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\right)^4 + C$

289. $L_{50} = -8{,}5779$. El área exacta es $\frac{-81}{8}$

291. $L_{50} = -0{,}006399\ldots$ El área exacta es 0.

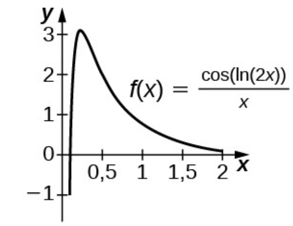
293. $u = 1 + x^2,\ du = 2x dx,\ \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2} du = \sqrt{2} - 1$

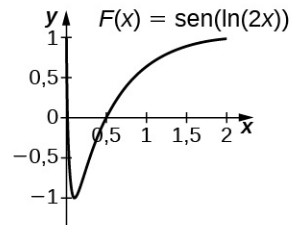
295. $u = 1 + t^3,\ du = 3t^2 dt,\ \frac{1}{3}\int_1^2 u^{-1/2} du = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

grandes.

297. $u=\cos\theta, du=-\operatorname{sen}\theta d\theta, \int_{1/\sqrt{2}}^{1} u^{-4} du=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

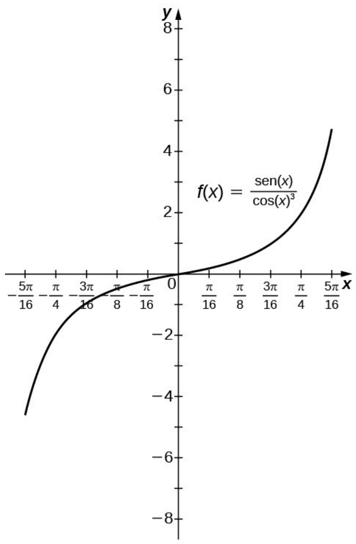
299.

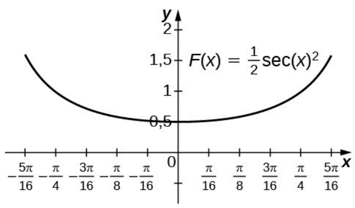




La antiderivada es $y=\operatorname{sen}\left(\ln\left(2x\right)\right)$. Como la antiderivada no es continua en $x=0$, no se puede encontrar un valor de *C* que logre que $y=\operatorname{sen}\left(\ln\left(2x\right)\right)-C$ trabajen como una integral definitiva.

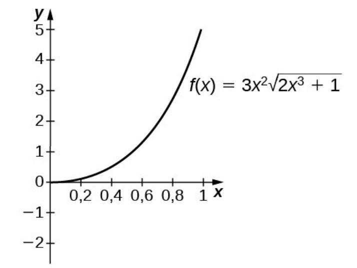
301.

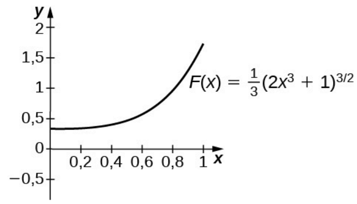




La antiderivada es $y = \frac{1}{2}\sec^2 x$. Debe tomar $C = -2$ por lo que $F\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

303.





La antiderivada es $y = \frac{1}{3}\left(2x^3 + 1\right)^{3/2}$. Hay que tomar $C = -\frac{1}{3}$.

305. No, porque el integrando es discontinuo en $x = 1$.

307. $u = \text{sen}\left(t^2\right)$; la integral se convierte en $\frac{1}{2}\int_0^0 u du$.

309. $u = \left(1 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right)$; la integral se convierte en $-\int_{5/4}^{5/4} \frac{1}{u} du$.

311. $u = 1 - t$; la integral se convierte en

$$\int_1^{-1} u \cos\left(\pi\left(1 - u\right)\right) du$$
$$= \int_1^{-1} u\left[\cos\pi\cos\pi u - \text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,\pi u\right] du$$
$$= -\int_1^{-1} u\cos\pi u du$$
$$= \int_{-1}^{1} u\cos\pi u du = 0$$

ya que el integrando es impar.

313. Si establecemos que $u = cx$ y $du = cdx$ da como resultado

$$\frac{1}{\frac{b}{c} - \frac{a}{c}} \int_{a/c}^{b/c} f\left(cx\right) dx = \frac{c}{b- a}\int_{u=a}^{u=b} f\left(u\right)\frac{du}{c} = \frac{1}{b- a}\int_a^b f\left(u\right) du.$$

315. $\int_0^x g\left(t\right) dt = \frac{1}{2}\int_{u=1-x^2}^{1} \frac{du}{u^a} = \frac{1}{2(1-a)} u^{1-a}\Big|_{u=1-x^2}^{1} = \frac{1}{2(1-a)}\left(1 - \left(1 - x^2\right)^{1-a}\right)$.
Dado que $x \to 1$ el límite es $\frac{1}{2(1-a)}$ si $a < 1$, y el límite diverge a +∞ si $a > 1$.

317. $\int_{t=\pi}^{0} b\sqrt{1-\cos^2 t} \times (-a \operatorname{sen} t)dt = \int_{t=0}^{\pi} ab\operatorname{sen}^2 t dt$

319. $f(t) = 2\cos(3t) - \cos(2t);\ \int_0^{\pi/2} (2\cos(3t) - \cos(2t)) = -\frac{2}{3}$

Sección 1.6 ejercicios

321. $\frac{-1}{3}e^{-3x} + C$

323. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

325. $\ln\left(x^2\right) + C$

327. $2\sqrt{x} + C$

329. $-\frac{1}{\ln x} + C$

331. $\ln(\ln(\ln x)) + C$

333. $\ln(x\cos x) + C$

335. $-\frac{1}{2}(\ln(\cos(x)))^2 + C$

337. $\frac{-e^{-x^3}}{3} + C$

339. $e^{\tan x} + C$

341. $t + C$

343. $\frac{2}{9}x^3\left(\ln\left(x^3\right) - 1\right) + C$

345. $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$

347. $\int_0^{\ln x} e^t\,dt = e^t\Big|_0^{\ln x} = e^{\ln x} - e^0 = x - 1$

349. $-\frac{1}{3}\ln|\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x)| + C$

351. $-\frac{1}{2}\ln\left|\csc\left(x^2\right) + \cot\left(x^2\right)\right| + C$

353. $-\frac{1}{2}(\ln(\csc x))^2 + C$

355. $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{26}{7}\right)$ grandes.

357. $\ln\left(\sqrt{3} - 1\right)$ grandes.

359. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

361. $y - 2\ln|y + 1| + C$

363. $\ln|\operatorname{sen} x - \cos x| + C$

365. $-\frac{1}{3}\left(1 - (\ln x)^2\right)^{3/2} + C$

367. Solución exacta: $\frac{e-1}{e}$, $R_{50} = 0{,}6258$. Como f es decreciente, la estimación del punto extremo derecho subestima el área.

369. Solución exacta: $\frac{2\ln(3)-\ln(6)}{2}$, $R_{50} = 0{,}2033$. Como f es creciente, la estimación del punto extremo derecho sobreestima el área.

371. Solución exacta: $-\frac{1}{\ln(4)}$, $R_{50} = -0{,}7164$. Como f es creciente, la estimación del punto extremo derecho sobreestima el área (el área real es un número negativo mayor).

373. $\frac{11}{2}\ln 2$

375. $\frac{1}{\ln(65{,}536)}$

377. $\int_N^{N+1} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-N^2} - e^{-(N+1)^2}\right)$. La cantidad es inferior a 0,01 cuando $N = 2$.

379. $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \int_{1/b}^{1/a} \frac{dx}{x}$

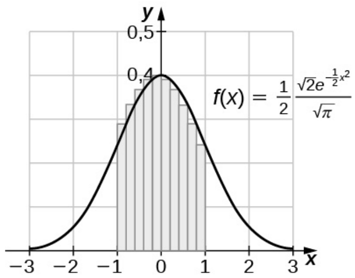
381. 23

383. Podemos suponer que $x > 1$, por lo que $\frac{1}{x} < 1$. Entonces, $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}$. Ahora haga la sustitución $u = \frac{1}{t}$, así que $du = -\frac{dt}{t^2}$ y $\frac{du}{u} = -\frac{dt}{t}$, y cambie los puntos finales: $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t} = -\int_1^x \frac{du}{u} = -\ln x$.

385. Las respuestas variarán.

387. $x = E(\ln(x))$. Entonces, $1 = \frac{E'(\ln x)}{x}$ o $x = E'(\ln x)$. Dado que cualquier número t se puede escribir $t = \ln x$ para alguna x, y para tal t tenemos $x = E(t)$, luego se deduce que para cualquier t, $E'(t) = E(t)$.

389. $R_{10} = 0{,}6811$, $R_{100} = 0{,}6827$



Sección 1.7 ejercicios

391. $\text{sen}^{-1} x \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{3}$

393. $\tan^{-1} x \Big|_{\sqrt{3}}^{1} = -\frac{\pi}{12}$

395. $\sec^{-1} x \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

397. $\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

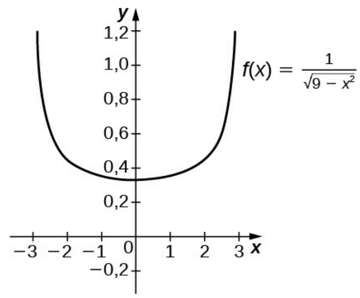
399. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

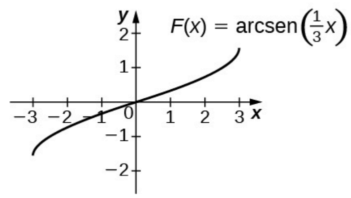
401. $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

403. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$. Así que, $\operatorname{sen}^{-1} t = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} t$. Se diferencian por una constante.

405. $\sqrt{1 - t^2}$ no se define como un número real cuando $t > 1$.

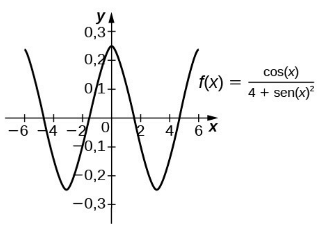
407.

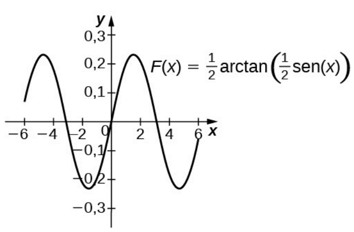




La antiderivada es $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$. Si tomamos $C = \frac{\pi}{2}$ recupera la integral definida.

409.





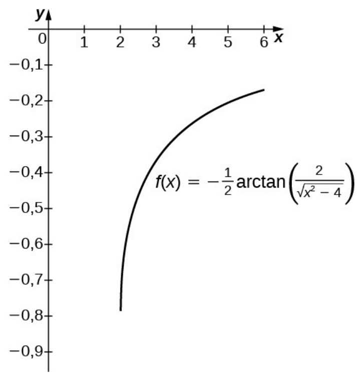
La antiderivada es $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right) + C$. Si tomamos $C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}(6)}{2}\right)$ recupera la integral definida.

411. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1} t\right)^2 + C$

413. $\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}(2t)\right)^2$

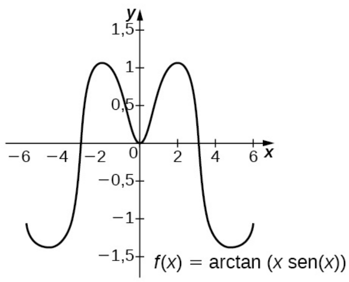
415. $\frac{1}{4}\left(\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) + C$

417.



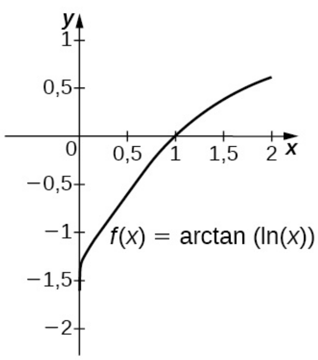
La antiderivada es $\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$. Si tomamos $C = 0$ se recupera la integral definida en $[2, 6]$.

419.



La antiderivada general es $\tan^{-1}(x \operatorname{sen} x) + C$. Si tomamos $C = -\tan^{-1}(6 \operatorname{sen}(6))$ recupera la integral definida.

421.



La antiderivada general es $\tan^{-1}(\ln x) + C$. Si tomamos $C = \frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\infty$ recupera la integral definida.

423. $\operatorname{sen}^{-1}\left(e^t\right) + C$

425. $\operatorname{sen}^{-1}(\ln t) + C$

427. $-\frac{1}{4}\left(\cos^{-1}(2t)\right)^2 + C$

429. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ grandes.

431. $1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$

433. $2\tan^{-1}(A) \to \pi$ cuando $A \to \infty$

435. Usando la pista, el uno tiene $\int \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x + \cot^2 x} dx = \int \frac{\csc^2 x}{1 + 2\cot^2 x} dx$. Establezca $u = \sqrt{2}\cot x$. Entonces, $du = -\sqrt{2}\csc^2 x$ y la integral es $-\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1 + u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1} u + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\cot x\right) + C$. Si el uno utiliza la identidad $\tan^{-1} s + \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2}$, entonces esto también se puede escribir $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

437. $x \approx \pm 1{,}7321$. La estimación del punto extremo izquierdo con $N = 100$ es 4,781 y estos decimales persisten en $N = 500$.

Ejercicios de repaso

439. Falso

441. Verdadero

443. $L_4 = 5{,}25$, $R_4 = 3{,}25$, respuesta exacta: 4

445. $L_4 = 5{,}364$, $R_4 = 5{,}364$, respuesta exacta: 5,870

447. $-\frac{4}{3}$

449. 1

451. $-\frac{1}{2(x+4)^2} + C$

453. $\frac{4}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(x^3\right) + C$

455. $\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1+t^2}}$

457. $4\frac{\ln x}{x} + 1$

459. \$6.328.113

461. \$73,36

463. $\frac{19117}{12}$ ft/s, o 1593 ft/s

Capítulo 2

Punto de control

2.1 12 unidades^2

2.2 $\frac{3}{10}$ unidad^2

2.3 $2 + 2\sqrt{2}$ unidades^2

2.4 $\frac{5}{3}$ unidades^2

2.5 $\frac{5}{3}$ unidades^2

2.7 $\frac{\pi}{2}$

2.8 8π unidades^3

2.9 21π unidades^3

2.10 $\frac{10\pi}{3}$ unidades^3

2.11 60π unidades^3

2.12 $\frac{15\pi}{2}$ unidades^3

2.13 8π unidades^3

2.14 12π unidades^3

2.15 $\frac{11\pi}{6}$ unidades^3

2.16 $\frac{\pi}{6}$ unidades^3

2.17 Utilice el método de las arandelas; $V = \int_{-1}^{1} \pi\left[\left(2 - x^2\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx$

2.18 $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 1{,}697$

2.19 Longitud de arco $\approx 3{,}8202$

2.20 Longitud de arco $= 3{,}15018$

2.21 $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right) \approx 3{,}133$

2.22 12π

2.23 $70/3$

2.24 24π

2.25 8 ft-lb

2.26 Aproximadamente 43255.2 ft-lb

2.27 156800 N

2.28 Aproximadamente 7.164.520.000 lb o 3.582.260 t

2.29 $M = 24, \bar{x} = \frac{2}{5}$ m

2.30 $(-1, -1)$ m

2.31 El centroide de la región es $(3/2, 6/5)$.

2.32 El centroide de la región es $(1, 13/5)$.

2.33 El centroide de la región es $(0, 2/5)$.

2.34 $6\pi^2$ unidades^3

2.35 a. $\frac{d}{dx}\ln\left(2x^2 + x\right) = \frac{4x+1}{2x^2+x}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x^3\right)\right)^2 = \frac{6\ln\left(x^3\right)}{x}$

2.36 $\int \frac{x^2}{x^3 + 6}dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 6\right| + C$

2.37 $4\ln 2$

2.38 a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right) = e^{x^2 - 5x}\,(2x - 5)$

grandes.

b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3 = 6e^{6t}$

2.39 $\int \frac{4}{e^{3x}}dx = -\frac{4}{3}e^{-3x} + C$

2.40 a. $\frac{d}{dt}4^{t^4} = 4^{t^4}\,(\ln 4)\left(4t^3\right)$ grandes.

b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) = \frac{x}{(\ln 3)\left(x^2+1\right)}$

2.41 $\int x^2 2^{x^3}\,dx = \frac{1}{3\ln 2}2^{x^3} + C$

2.42 Hay 81377396 bacterias en la población después de 4 horas. La población alcanza 100 millones de bacterias después de $244{,}12$ minutos.

2.43 A $5\ \%$ interés, debe invertir $\$223130.16$. A $6\ \%$ interés, debe invertir $\$165298.89$.

2.44 $38{,}90$ meses

2.45 El café se enfría lo suficiente como para servirlo alrededor de $3{,}5$ minutos después de ser vertido. El café está demasiado frío para servir cerca de 7 minutos después de ser vertido.

2.46 Un total de $94{,}13$ g de carbono. El artefacto tiene aproximadamente 13.300 años.

2.47 a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2 + 3x\right)\right) = \left(\operatorname{sech}^2\left(x^2 + 3x\right)\right)(2x + 3)$

grandes.

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(\text{senoh}\ x)^2}\right) = \frac{d}{dx}(\text{senoh}\ x)^{-2} = -2(\text{senoh}\ x)^{-3}\cosh x$

2.48 a. $\int \text{senoh}^3 x \cosh x\,dx = \frac{\text{senoh}^4 x}{4} + C$

b. $\int \operatorname{sech}^2(3x)\,dx = \frac{\tanh(3x)}{3} + C$

(carbono 14).

2.49 a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}(3x)\right) = \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)^3 = \frac{3\left(\coth^{-1}x\right)^2}{1-x^2}$

2.50 a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx = -\text{sech}^{-1}(e^x) + C$

(carbono 14).

2.51 52,95 pies

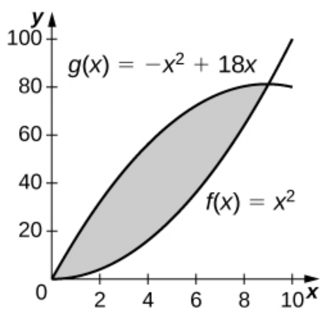
Sección 2.1 ejercicios

1. $\frac{32}{3}$

3. $\frac{13}{12}$

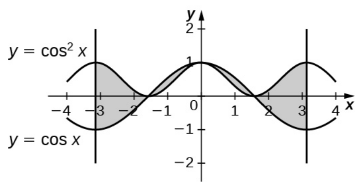
5. 36

7.



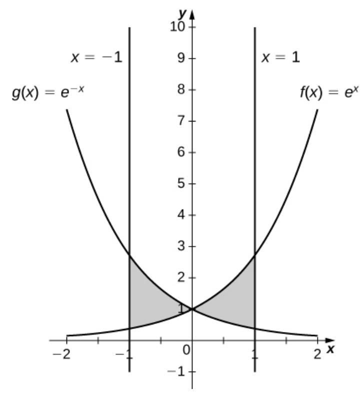
243 unidades cuadradas

9.



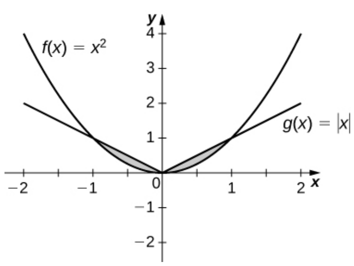
4

11.



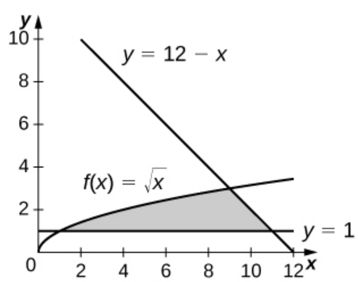
$\frac{2(e-1)^2}{e}$

13.



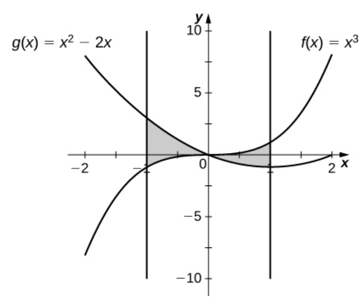
$\frac{1}{3}$

15.



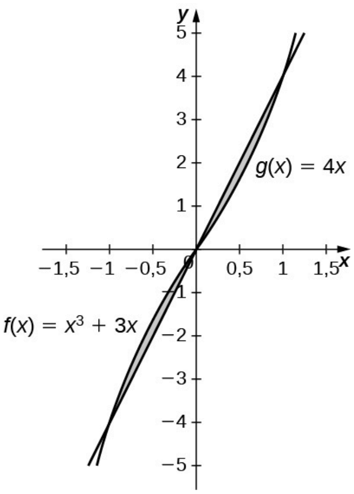
$\frac{34}{3}$

17.



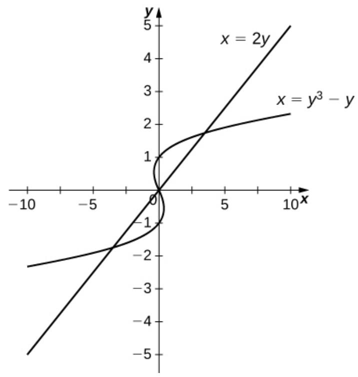
$\frac{5}{2}$

19.



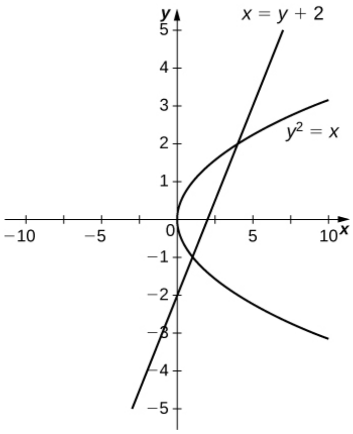
$\frac{1}{2}$

21.



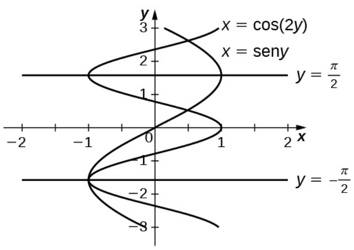
$\frac{9}{2}$

23.



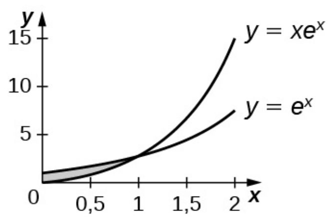
$\frac{9}{2}$

25.



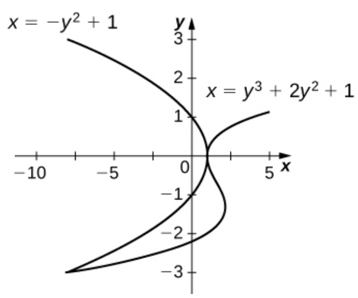
$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

27.



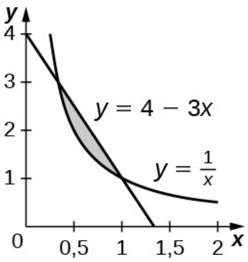
$e{-}2$

29.



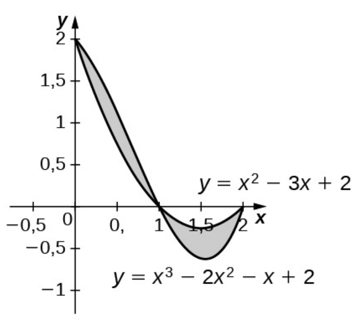
$\frac{27}{4}$

31.



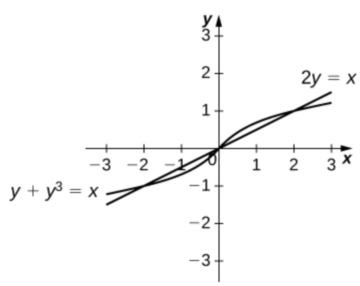
$\frac{4}{3} - \ln(3)$ grandes.

33.



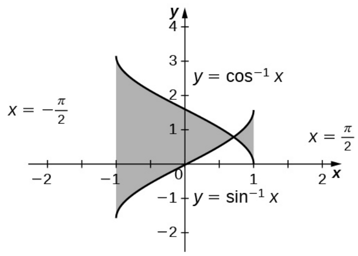
$\frac{1}{2}$

35.



$\frac{1}{2}$

37.



$-2\left(\sqrt{2} - \pi\right)$

39. $1{,}067$

41. $0{,}852$

43. $7{,}523$

45. $\frac{3\pi-4}{12}$

47. $1{,}429$

49. $\$33.333{,}33$ de beneficio total en 200 teléfonos celulares vendidos

51. $3{,}263$ mi representa qué tan lejos está la liebre de la tortuga.

53. $\frac{343}{24}$

55. $4\sqrt{3}$

57. $\pi - \frac{32}{25}$

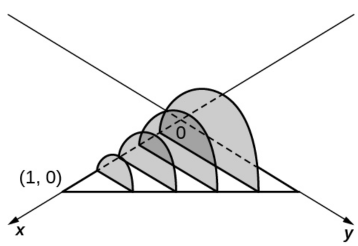
Sección 2.2 ejercicios

63. 8 unidades^3

65. $\frac{32}{3\sqrt{2}}$ unidades^3

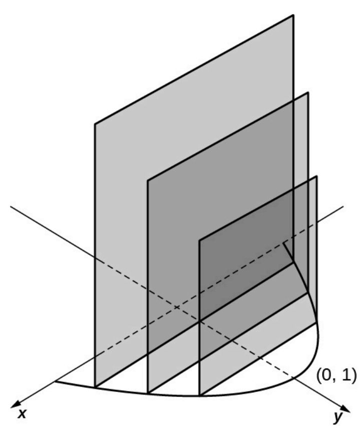
67. $\frac{7}{24}\pi r^2 h$ unidades^3

69.



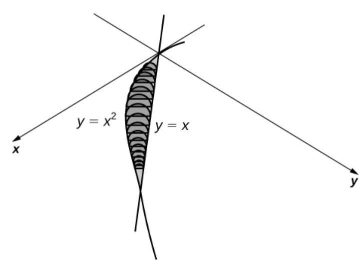
$\frac{\pi}{24}$ unidades^3

71.



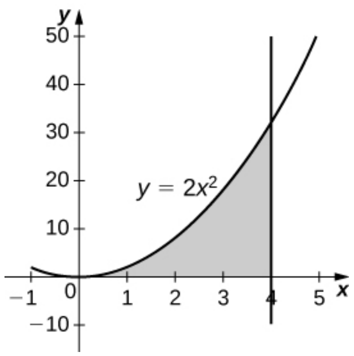
2 unidades^3

73.



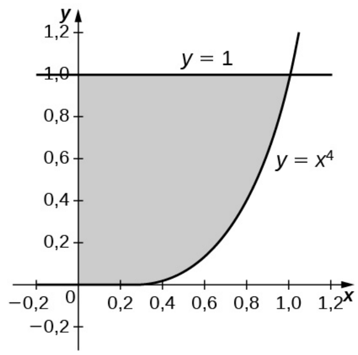
$\frac{\pi}{240}$ unidades^3

75.



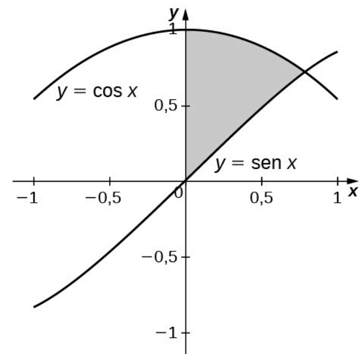
$\frac{4096\pi}{5}$ unidades^3

77.



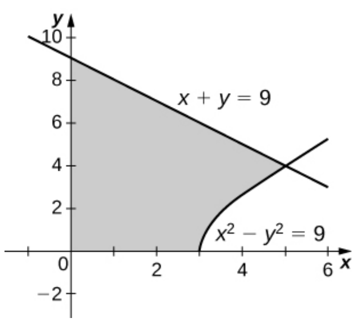
$\frac{8\pi}{9}$ unidades^3

79.



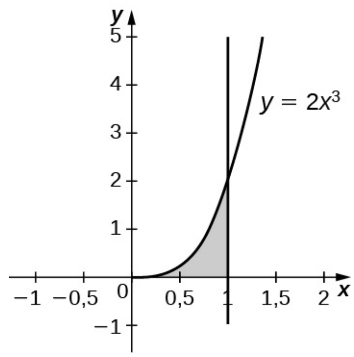
$\frac{\pi}{2}$ unidades^3

81.



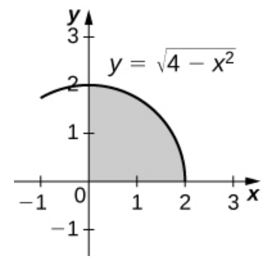
207π unidades^3

83.



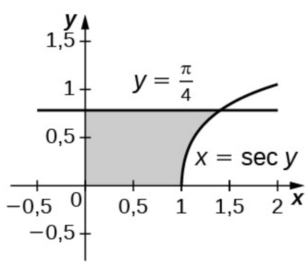
$\frac{4\pi}{5}$ unidades^3

85.



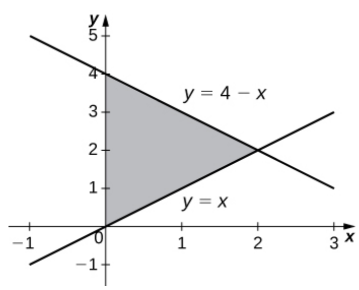
$\frac{16\pi}{3}$ unidades^3

87.



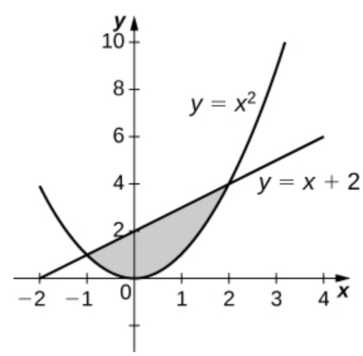
π unidades^3

89.



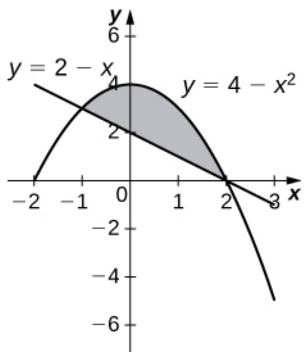
$\frac{16\pi}{3}$ unidades^3

91.



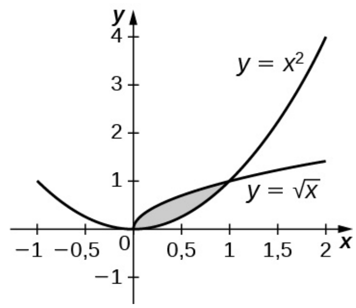
$\frac{72\pi}{5}$ unidades^3

93.



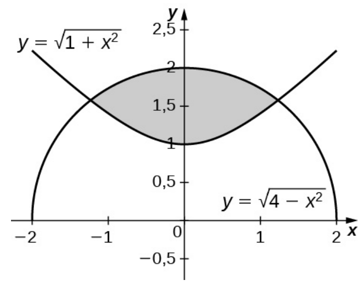
$\frac{108\pi}{5}$ unidades^3

95.



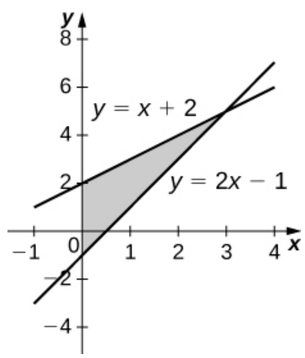
$\frac{3\pi}{10}$ unidades^3

97.



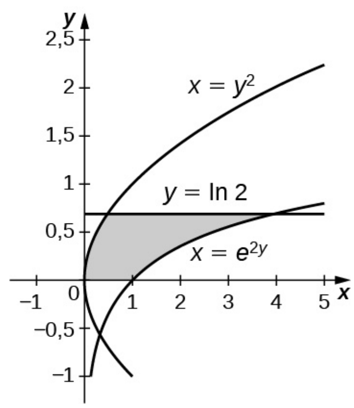
$2\sqrt{6}\pi$ unidades^3

99.



9π unidades^3

101.



$\frac{\pi}{20}\left(75 - 4\ln^5(2)\right)$ unidades^3

103. $\frac{m^2\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)$ unidades^3

105. $\frac{4a^2b\pi}{3}$ unidades^3

107. $2\pi^2$ unidades^3

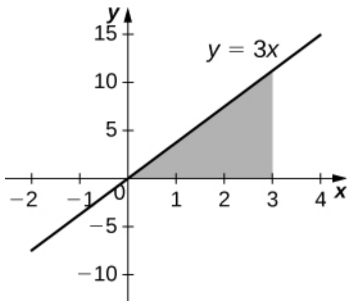
109. $\frac{2ab^2\pi}{3}$ unidades^3

111. $\frac{\pi}{12}(r+h)^2(6r-h)$ unidades^3

113. $\frac{\pi}{3}(h+R)(h-2R)^2$ unidades^3

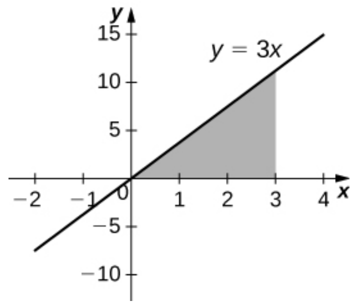
Sección 2.3 ejercicios

115.



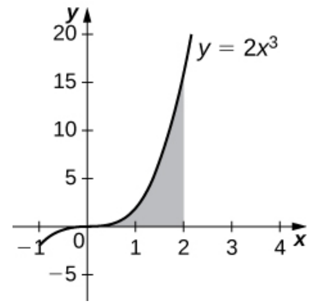
54π unidades^3

117.



81π unidades^3

119.



$\frac{512\pi}{7}$ unidades^3

121. 2π unidades^3

123. $\frac{2\pi}{3}$ unidades^3

125. 2π unidades^3

127. $\frac{4\pi}{5}$ unidades^3

129. $\frac{64\pi}{3}$ unidades^3

131. $\frac{32\pi}{5}$ unidades^3

133. $\frac{7\pi}{6}$

135. 48π

137. $\frac{114\pi}{5}$

139. $\frac{512\pi}{7}$

141. $\frac{96\pi}{5}$ unidades^3

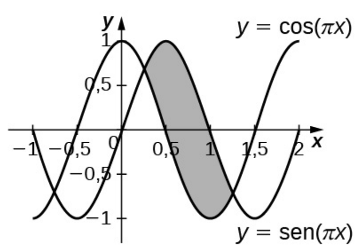
143. $\frac{28\pi}{15}$ unidades^3

145. $\frac{3\pi}{10}$ unidades^3

147. $\pi\left(\frac{6.2^{2/3}}{5} - \frac{11}{10}\right) = \frac{\pi}{10}\left(12.\,2^{2/3} - 11\right) \approx 2.\,5286$ unidades^3

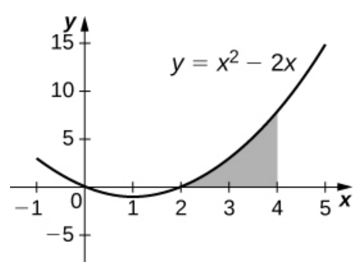
149. $0{,}9876$ unidades^3

151.



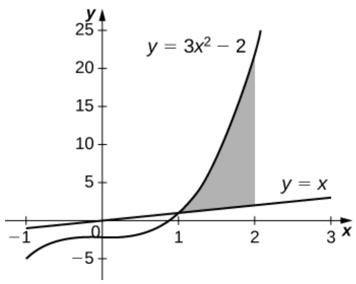
$3\sqrt{2}$ unidades^3

153.



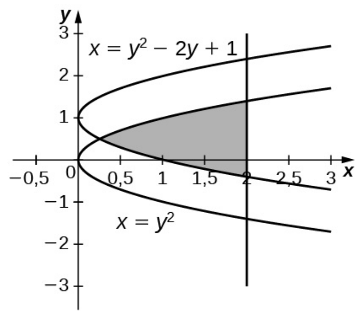
$\frac{496\pi}{15}$ unidades^3

155.



$\frac{398\pi}{15}$ unidades^3

157.



15,9074 unidades^3

159. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ unidades^3

161. $\pi r^2 h$ unidades^3

163. πa^2 unidades^3

Sección 2.4 ejercicios

165. $2\sqrt{26}$

167. $2\sqrt{17}$

169. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$

171. $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$

173. $\frac{4}{3}$

175. 2,0035

177. $\frac{123}{32}$

179. 10

181. $\frac{20}{3}$

183. $\frac{1}{675}\left(229\sqrt{229} - 8\right)$

185. $\frac{1}{8}\left(4\sqrt{5} + \ln\left(9 + 4\sqrt{5}\right)\right)$ grandes.

187. 1,201

189. 15,2341

191. $\frac{49\pi}{3}$

193. $70\pi\sqrt{2}$

195. 8π

197. $120\pi\sqrt{26}$

199. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$ grandes.

201. $9\sqrt{2}\pi$

203. $\frac{10\sqrt{10}\pi}{27}\left(73\sqrt{73} - 1\right)$

205. 25,645

207. $\pi(\pi + 2)$

209. 10,5017

211. 23 pies

213. 2

215. Las respuestas pueden variar

217. Para más información, busque el cuerno de Gabriel.

Sección 2.5 ejercicios

219. 150 ft-lb

221. 200 J

223. 1 J

225. $\frac{39}{2}$

227. $\ln(243)$

229. $\frac{332\pi}{15}$

231. 100π

233. $20\pi\sqrt{15}$

235. 6 J

237. 5 cm

239. 36 J

241. 18.750 ft-lb

243. Peso= $\frac{32}{3} \times 10^9$ lb
Trabajo = $\frac{4}{3} \times 10^{12}$ ft-lb

245. 9,71 $\times\ 10^2$ N m

247. a. 3.000.000 lb, b. 749.000 lb

249. 23.25π millones de ft-lb.

251. $\frac{A\rho H^2}{2}$

253. Las respuestas pueden variar

Sección 2.6 ejercicios

255. $\frac{5}{4}$

257. $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ grandes.

259. $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$

261. $\frac{3L}{4}$

263. $\frac{\pi}{2}$

265. $\frac{e^2+1}{e^2-1}$

267. $\frac{\pi^2-4}{\pi}$

269. $\frac{1}{4}\left(1+e^2\right)$

271. $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ grandes.

273. $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$

275. $(0, 3)$

277. $\left(0, \frac{4}{\pi}\right)$

279. $\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{3}\right)$

281. $\frac{2m\pi}{3}$

283. $\pi a^2 b$

285. $\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$

287. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

289. $\left(0, \frac{28}{9\pi}\right)$

291. Centro de masa: $\left(\frac{a}{6}, \frac{4a^2}{5}\right)$, volumen: $\frac{2\pi a^4}{9}$

293. Volumen: $2\pi^2 a^2\,(b+a)$

Sección 2.7 ejercicios

295. $\frac{1}{x}$

297. $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$

299. $\ln(x+1)+C$

301. $\ln(x)+1$

303. $\cot(x)$

305. $\frac{7}{x}$

307. $\csc(x)\sec x$

309. $-2\tan x$

311. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ grandes.

313. $2-\frac{1}{2}\ln(5)$ grandes.

315. $\frac{1}{\ln(2)}-1$

317. $\frac{1}{2}\ln(2)$ grandes.

319. $\frac{1}{3}(\ln x)^3$

321. $\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}}$

323. $x^{-2-(1/x)}(\ln x - 1)$ grandes.

325. ex^{e-1}

327. 1

329. $-\frac{1}{x^2}$

331. $\pi - \ln(2)$ grandes.

333. $\frac{1}{x}$

335. $e^5 - 6$ al cuadrado^2

337. $\ln(4) - 1$ al cuadrado^2

339. $2{,}8656$

341. $3{,}1502$

Sección 2.8 ejercicios

349. Verdadero

351. Falso; $k = \frac{\ln(2)}{t}$

353. 20 horas

355. No. La reliquia tiene aproximadamente 871 años.

357. 71,92 años

359. 5 días 6 horas 27 minutos

361. 12

363. 8,618 %

365. $6766,76

367. 9 horas 13 minutos

369. 239.179 años

371. $P'(t) = 43e^{0{,}01604t}$. La población siempre aumenta.

373. La población alcanza 10 mil millones de personas en 2027.

375. $P'(t) = 2{,}259e^{0{,}06407t}$. La población siempre aumenta.

Sección 2.9 ejercicios

377. e^x y e^{-x}

379. Las respuestas pueden variar

381. Las respuestas pueden variar

383. Las respuestas pueden variar

385. $3\,\text{senoh}(3x+1)$

387. $-\tanh(x)\,\text{sech}(x)$

389. $4\cosh(x)\,\text{senoh}(x)$

391. $\frac{x\,\text{sech}^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

393. $6\,\text{senoh}^5(x)\cosh(x)$

395. $\frac{1}{2}\text{senoh}(2x+1) + C$

397. $\frac{1}{2}\text{senoh}^2\left(x^2\right) + C$

399. $\frac{1}{3}\cosh^3(x) + C$

401. $\ln(1+\cosh(x)) + C$

403. $\cosh(x) + \text{senoh}(x) + C$

405. $\frac{4}{1-16x^2}$

407. $\frac{\text{senoh}(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)+1}}$

409. $-\csc(x)$ grandes.

411. $-\frac{1}{\left(x^2-1\right)\tanh^{-1}(x)}$

413. $\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

415. $\sqrt{x^2+1} + C$

417. $\cosh^{-1}(e^x) + C$

419. Las respuestas pueden variar

421. $37{,}30$

423. $y = \frac{1}{c}\cosh(cx)$

425. $-0{,}521095$

427. 10

Ejercicios de repaso

435. Falso

437. Falso

439. $32\sqrt{3}$

441. $\frac{162\pi}{5}$

443. a. 4, b. $\frac{128\pi}{7}$, c. $\frac{64\pi}{5}$

445. a. $1{,}949$, b. $21{,}952$, c. $17{,}099$

447. a. $\frac{31}{6}$, b. $\frac{452\pi}{15}$, c. $\frac{31\pi}{6}$

449. $245{,}282$

451. Masa: $\frac{1}{2}$, centro de masa: $\left(\frac{18}{35}, \frac{9}{22}\right)$

453. $\sqrt{17} + \frac{1}{8}\ln(33 + 8\sqrt{17})$

455. Volumen: $\frac{3\pi}{4}$, área superficial: $\pi\left(\sqrt{2} - \text{senoh}^{-1}(1) + \text{senoh}^{-1}(16) - \frac{\sqrt{257}}{16}\right)$

457. 11:02 a.m.

459. $\pi(1 + \text{senoh}(1)\cosh(1))$

Capítulo 3

Punto de control

3.1 $\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

3.2 $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

3.3 $-x^2\cos x + 2x\,\text{sen}\,x + 2\cos x + C$

3.4 $\frac{\pi}{2} - 1$

3.5 $\frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C$

3.6 $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C$

3.7 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}\,(2x) + C$

3.8 $\text{sen}\,x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + C$

3.9 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\,\text{sen}\,(6x) + C$

3.10 $\frac{1}{2}\text{sen}\,x + \frac{1}{22}\,\text{sen}\,(11x) + C$

3.11 $\frac{1}{6}\tan^6 x + C$

3.12 $\frac{1}{9}\sec^9 x - \frac{1}{7}\sec^7 x + C$

3.13 $\int \sec^5 x\,dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{4}\int \sec^3 x$

3.14 $\int 125\,\text{sen}^3\theta\,d\theta$

3.15 $\int 32\tan^3\theta\sec^3\theta\,d\theta$

3.16 $\ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C$

3.17 $x - 5\ln|x+2| + C$

3.18 $\frac{2}{5}\ln|x+3| + \frac{3}{5}\ln|x-2| + C$

3.19 $\frac{x+2}{(x+3)^3(x-4)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} + \frac{D}{(x-4)} + \frac{E}{(x-4)^2}$

3.20 $\frac{x^2+3x+1}{(x+2)(x-3)^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$

3.21 Las posibles soluciones incluyen $\text{senoh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ y $\ln\left|\sqrt{x^2+4}+x\right| + C$.

3.22 $\frac{24}{35}$

3.23 $\frac{17}{24}$

3.24 0,0074, 1,1 %

3.25 $\frac{1}{192}$

3.26 $\frac{25}{36}$

3.27 e^3, converge

3.28 $+\infty$, diverge

3.29 Dado que

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \text{ diverge.}$$

Sección 3.1 ejercicios

1. $u = x^3$

3. $u = y^3$

5. $u = \text{sen}(2x)$

7. $-x + x\ln x + C$

9. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

11. $-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + C$

13. $e^{-x}(-1-x) + C$

15. $2x\cos x + \left(-2+x^2\right)\text{sen}\,x + C$

17. $\frac{1}{2}(1+2x)(-1+\ln(1+2x)) + C$

19. $\frac{1}{2}e^x(-\cos x + \text{sen}\,x) + C$

21. $-\frac{e^{-x^2}}{2} + C$

23. $-\frac{1}{2}x\cos[\ln(2x)] + \frac{1}{2}x\,\text{sen}[\ln(2x)] + C$

25. $2x - 2x\ln x + x(\ln x)^2 + C$

27. $\left(-\frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}x^3\ln x\right) + C$

29. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + x\cos^{-1}(2x) + C$

31. $-\left(-2+x^2\right)\cos x + 2x\,\text{sen}\,x + C$

33. $-x\left(-6+x^2\right)\cos x + 3\left(-2+x^2\right)\text{sen}\,x + C$

35. $\frac{1}{2}x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + x.\sec^{-1}x\right) + C$

37. $-\cosh x + x\,\text{senoh}\,x + C$

39. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$

41. 2

43. 2π

45. $-2+\pi$

47. $-\text{sen}(x) + \ln[\text{sen}(x)]\,\text{sen}\,x + C$

49. Las respuestas varían

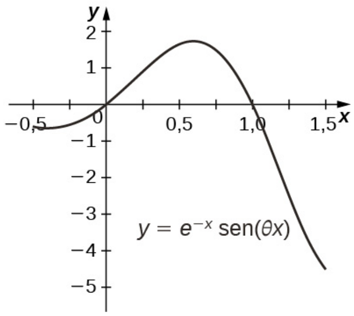
51. a. $\frac{2}{5}(1+x)(-3+2x)^{3/2} + C$ b. $\frac{2}{5}(1+x)(-3+2x)^{3/2} + C$

53. No utilice la integración por partes. Elija u para que sea $\ln x$, y la integral sea de la forma $\int u^2 du$.

55. No utilice la integración por partes. Supongamos que $u = x^2 - 3$, y la integral se puede poner en la forma $\int e^u du$.

57. No utilice la integración por partes. Elija u para que sea $u = 3x^3 + 2$ y la integral se puede poner en la forma $\int \text{sen}(u) du$.

59. El área bajo el gráfico es 0,39535



61. $2\pi e$

63. 2,05

65. 12π

67. $8\pi^2$

Sección 3.2 ejercicios

69. $\cos^2 x$

71. $\frac{1-\cos(2x)}{2}$

73. $\frac{\text{sen}^4 x}{4} + C$

75. $\frac{1}{12}\tan^6(2x) + C$

77. $\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + C$

79. $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^2 x + C$

81. $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$ o $\frac{1}{2}\text{sen}^2 x + C$

83. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

85. $\frac{2}{3}(\text{sen}\, x)^{\frac{3}{2}} + C$

87. $\sec x + C$

89. $\frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + C$

91. $\frac{2\tan x}{3} + \frac{1}{3}\sec(x)^2 \tan x$
$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

93. $-\ln|\cot x + \csc x| + C$

95. $\frac{\text{sen}^3(ax)}{3a} + C$

97. $\frac{\pi}{2}$

99. $\frac{x}{2} + \frac{1}{12}\,\text{sen}(6x) + C$

101. $x + C$

103. 0

105. 0

107. 0

109. Aproximadamente 0,239

111. $\sqrt{2}$

113. 1,0

115. 0

117. $\frac{3\theta}{8} - \frac{1}{4\pi}\,\text{sen}(2\pi\theta) + \frac{1}{32\pi}\,\text{sen}(4\pi\theta) + C = f(x)$

119. $\ln\left(\sqrt{3}\right)$

121. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(2x)\cos(3x)dx = 0$

123. $\sqrt{\tan(x)}x\left(\frac{8\tan x}{21} + \frac{2}{7}\sec x^2 \tan x\right) + C = f(x)$

125. La segunda integral es más difícil porque la primera integral es simplemente un tipo de sustitución en *u*.

Sección 3.3 ejercicios

127. $9\tan^2\theta$

129. $a^2\cosh^2\theta$

131. $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

133. $-(x+1)^2+5$

135. $\ln\left|x+\sqrt{-a^2+x^2}\right|+C$

137. $\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2+1}+3x\right|+C$

139. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

141. $9\left[\frac{x\sqrt{x^2+9}}{18}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{x}{3}\right|\right]+C$

143. $-\frac{1}{3}\sqrt{9-\theta^2}\left(18+\theta^2\right)+C$

145. $\frac{\left(-1+x^2\right)\left(2+3x^2\right)\sqrt{x^6-x^8}}{15x^3}+C$

147. $-\frac{x}{9\sqrt{-9+x^2}}+C$

149. $\frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+x\sqrt{x^2-1}\right)+C$

151. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

153. $\frac{1}{8}\left(x\left(5-2x^2\right)\sqrt{1-x^2}+3\operatorname{arcsen}x\right)+C$

155. $\ln x-\ln\left|1+\sqrt{1-x^2}\right|+C$

157. $-\frac{\sqrt{-1+x^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{-1+x^2}\right|+C$

159. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\operatorname{arcsenh}x+C$

161. $-\frac{1}{1+x}+C$

163. $\frac{2\sqrt{-10+x}\sqrt{x}\ln\left|\sqrt{-10+x}+\sqrt{x}\right|}{\sqrt{(10-x)x}}+C$

165. $\frac{9\pi}{2}$; área de un semicírculo de radio 3

167. $\operatorname{arcsen}(x)+C$ es la respuesta habitual.

169. $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$ es el resultado utilizando cualquiera de los dos métodos.

171. Utilice la sustitución trigonométrica. Supongamos que $x=\sec(\theta)$.

173. 4,367

175. $\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}$

177. $y=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+8}{x-8}\right|+3$

179. 24,6 m^3

181. $\frac{2\pi}{3}$

Sección 3.4 ejercicios

183. $-\frac{2}{x+1}+\frac{5}{2(x+2)}+\frac{1}{2x}$

185. $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}$

187. $2x^2+4x+8+\frac{16}{x-2}$

189. $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$

191. $-\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{6x}+\frac{1}{6(x-3)}$ grandes.

193. $\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

195. $\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}$

197. $-\ln|2-x|+2\ln|4+x|+C$

199. $\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|+C$

201. $2\left(x+\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1+x}{3}\right)\right)+C$

203. $2\ln|x|-3\ln|1+x|+C$

205. $\frac{1}{16}\left(-\frac{4}{-2+x}-\ln|-2+x|+\ln|2+x|\right)+C$

207. $\frac{1}{30}\left(-2\sqrt{5}\arctan\left[\frac{1+x}{\sqrt{5}}\right]+2\ln|-4+x|-\ln\left|6+2x+x^2\right|\right)+C$ **209.** $-\frac{3}{x}+4\ln|x+2|+x+C$

211. $-\ln|3-x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C$ **213.** $\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+C$ **215.** $-x+\ln|1-e^x|+C$

217. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\cos x+3}{\cos x-2}\right|+C$ **219.** $\frac{1}{2-2e^{2t}}+C$ **221.** $2\sqrt{1+x}-2\ln\left|1+\sqrt{1+x}\right|+C$

223. $\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right|+C$ **225.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **227.** $x-\ln(1+e^x)+C$

229. $6x^{1/6}-3x^{1/3}+2\sqrt{x}-6\ln\left(1+x^{1/6}\right)+C$ **231.** $\frac{4}{3}\pi\operatorname{arctanh}\left[\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}\pi\ln 4$

233. $x=-\ln|t-3|+\ln|t-4|+\ln 2$

235. $x=\ln|t-1|-\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t\right)-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\arctan\left(2\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\ln 4{,}5$

237. $\frac{2}{5}\pi\ln\frac{28}{13}$ **239.** $\frac{\arctan\left[\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^2\right|+C$

241. 2,0 in^2 **243.** $3(-8+x)^{1/3}$
$-2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{-1+(-8+x)^{1/3}}{\sqrt{3}}\right]$
$-2\ln\left[2+(-8+x)^{1/3}\right]$
$+\ln\left[4-2(-8+x)^{1/3}+(-8+x)^{2/3}\right]+C$

Sección 3.5 ejercicios

245. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+2\arctan(x+1)+C$ **247.** $\cosh^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right)+C$ **249.** $\frac{2^{x^2-1}}{\ln 2}+C$

251. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right)+C$ **253.** $-\frac{1}{2}\csc(2w)+C$ **255.** $9-6\sqrt{2}$

257. $2-\frac{\pi}{2}$ **259.** $\frac{1}{12}\tan^4(3x)-\frac{1}{6}\tan^2(3x)+\frac{1}{3}\ln|\sec(3x)|+C$

261. $2\cot\left(\frac{w}{2}\right)-2\csc\left(\frac{w}{2}\right)+w+C$ **263.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2(5+4\operatorname{sen} t-3\cos t)}{4\cos t+3\operatorname{sen} t}\right|$

265. $6x^{1/6}-3x^{1/3}+2\sqrt{x}-6\ln\left[1+x^{1/6}\right]+C$ **267.** $-x^3\cos x+3x^2\operatorname{sen} x+6x\cos x-6\operatorname{sen} x+C$

269. $\frac{1}{2}\left(x^2+\ln\left|1+e^{-x^2}\right|\right)+C$ **271.** $2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right)+C$ **273.** $0{,}5=\frac{1}{2}$

275. 8,0 **277.** $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(x+2)\right)+C$ **279.** $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$

281. $\ln\left(e^x+\sqrt{4+e^{2x}}\right)+C$

283. $\ln x - \frac{1}{6}\ln\left(x^6+1\right)-\frac{\arctan\left(x^3\right)}{3x^3}+C$

285. $\ln\left|x+\sqrt{16+x^2}\right|+C$

287. $-\frac{1}{4}\cot(2x)+C$

289. $\frac{1}{2}\arctan 10$

291. 1276,14

293. 7,21

295. $\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\left|\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}\right|$

297. $\frac{1}{3}\arctan(3)\approx 0{,}416$

Sección 3.6 ejercicios

299. 0,696

301. 9,298

303. 0,5000

305. $T_4=18{,}75$

307. 0,500

309. 1,2819

311. 0,6577

313. 0,0213

315. 1,5629

317. 1,9133

319. $\mathrm{T}(4)=0{,}1088$

321. 1,0

323. El error aproximado es de 0,000325.

325. $\frac{1}{7938}$

327. $\frac{81}{25{,}000}$

329. 475

331. 174

333. 0,1544

335. 6,2807

337. 4,606

339. 3,41 pies

341. $T_{16}=100{,}125$; error absoluto = 0,125

343. unos 89.250 m^2

345. parábola

Sección 3.7 ejercicios

347. divergente

349. $\frac{\pi}{2}$

351. $\frac{2}{e}$

353. Converge

355. Converge a 1/2.

357. −4

359. π

361. diverge

363. diverge

365. 1,5

367. diverge

369. diverge

371. diverge

373. Ambas integrales divergen.

375. diverge

377. diverge

379. π

381. 0,0

383. 0,0

385. 6,0

387. $\frac{\pi}{2}$

389. $8\ln(16) - 4$

391. $1{,}047$

393. $-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

395. 7,0

397. $\frac{5\pi}{2}$

399. 3π

401. $\frac{1}{s}, s > 0$

403. $\frac{s}{s^2+4}, s > 0$

405. Las respuestas variarán.

407. 0,8775

Ejercicios de repaso

409. Falso

411. Falso

413. $-\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x} + C$

415. $\frac{1}{10}(4\ln(2-x) + 5\ln(x+1) - 9\ln(x+3)) + C$

417. $-\frac{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2(x)}}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{x}{2} + C$

419. $\frac{1}{15}\left(x^2+2\right)^{3/2}\left(3x^2-4\right) + C$

421. $\frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right) - \frac{1}{8}\tan^{-1}(1-x) + \frac{1}{8}\tan^{-1}(x+1) + C$

423. $\mathrm{M}_4 = 3{,}312, \mathrm{T}_4 = 3{,}354, S_4 = 3{,}326$

425. $\mathrm{M}_4 = -0{,}982, \mathrm{T}_4 = -0{,}917, S_4 = -0{,}952$

427. aproximadamente 0,2194

431. Las respuestas pueden variar. Ej.: 9,405 km

Capítulo 4

Punto de control

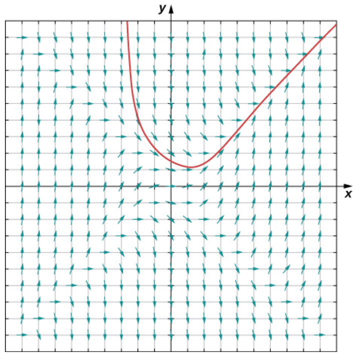
4.2 5

4.3 $y = 2x^2 + 3x + 2$

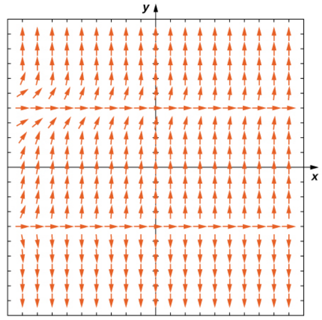
4.5 $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 6e^x + 14$

4.6 $v(t) = -9{,}8t$

4.7



4.8



Las soluciones de equilibrio son $y = -2$ y $y = 2$. Para esta ecuación, $y = -2$ es una solución de equilibrio inestable, e $y = 2$ es una solución de equilibrio semiestable.

4.9

n	x_n	$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ **grandes.**
0	1	-2
1	1,1	$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = -1{,}5$
2	1,2	$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = -1{,}1419$
3	1.3	$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = -0{,}8387$
4	1,4	$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = -0{,}5487$
5	1,5	$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = -0{,}2442$
6	1,6	$y_6 = y_5 + hf(x_5, y_5) = 0{,}0993$
7	1,7	$y_7 = y_6 + hf(x_6, y_6) = 0{,}5099$
8	1,8	$y_8 = y_7 + hf(x_7, y_7) = 1{,}0272$
9	1,9	$y_9 = y_8 + hf(x_8, y_8) = 1{,}7159$
10	2	$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = 2{,}6962$

4.10 $y = 2 + Ce^{x^2+3x}$

4.11 $y = \frac{4+14e^{x^2+x}}{1-7e^{x^2+x}}$

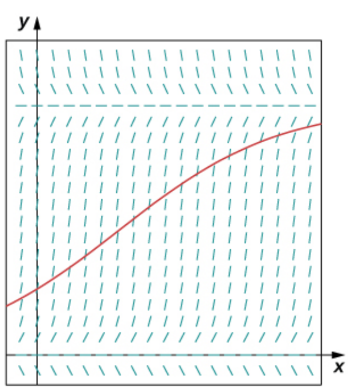
4.12 Problema de valor inicial:

$\frac{du}{dt} = 2{,}4 - \frac{2u}{25}, \quad u(0) = 3$

Solución: $u(t) = 30 - 27e^{-t/50}$

4.13
a. Problema del valor inicial
$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \quad T(0) = 450$
b. $T(t) = 70 + 380e^{kt}$
c. Aproximadamente 114 minutos.

4.14
a. $\frac{dP}{dt} = 0{,}04\left(1 - \frac{P}{750}\right), \quad P(0) = 200$
b.



c. $P(t) = \frac{3.000e^{0{,}04t}}{11+4e^{0{,}04t}}$

d. Después de 12 meses, la población será $P(12) \approx 278$ conejos.

4.15 $y' + \frac{15}{x+3}y = \frac{10x-20}{x+3}$; $p(x) = \frac{15}{x+3}$ y $q(x) = \frac{10x-20}{x+3}$

4.16 $y = \frac{x^3+x^2+C}{x-2}$

4.17 $y = -2x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}$

4.18 a.
$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -v - 9{,}8\\ v(0) &= 0\end{aligned}$$

b. $v(t) = 9{,}8\left(e^{-t} - 1\right)$ grandes.

c. $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(9{,}8\left(e^{-t} - 1\right)\right) = -9{,}8 \text{ m/s} \approx -21{,}922 \text{ mph}$

4.19 Problema de valor inicial:

$8q' + \frac{1}{0{,}02}q = 20 \operatorname{sen} 5t, \quad q(0) = 4$

$q(t) = \frac{10 \operatorname{sen} 5t - 8\cos 5t + 172e^{-6{,}25t}}{41}$

Sección 4.1 ejercicios

1. 1

3. 3

5. 1

7. 1

19. $y = 4 + \frac{3x^4}{4}$

21. $y = \frac{1}{2}e^{x^2}$

23. $y = 2e^{-1/x}$

25. $u = \operatorname{sen}^{-1}\left(e^{-1+t}\right)$

27. $y = -\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} - 1$

29. $y = C - x + x\ln x - \ln(\cos x)$ grandes.

31. $y = C + \frac{4^x}{\ln(4)}$ grandes.

33. $y = \frac{2}{3}\sqrt{t^2 + 16}\left(t^2 + 16\right) + C$

35. $x = \frac{2}{15}\sqrt{4 + t}\left(3t^2 + 4t - 32\right) + C$

37. $y = Cx$

39. $y = 1 - \frac{t^2}{2}, y = -\frac{t^2}{2} - 1$

41. $y = e^{-t}, y = -e^{-t}$

43. $y = 2\left(t^2 + 5\right), t = 3\sqrt{5}$

45. $y = 10e^{-2t}, t = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{10}\right)$ grandes.

47. $y = \frac{1}{4}\left(41 - e^{-4t}\right)$, nunca

49. La solución cambia de creciente a decreciente en $y(0) = 0$

51. La solución cambia de creciente a decreciente en $y(0) = 0$

53. $v(t) = -32t + a$

55. 0 ft/s.

57. 4,86 metros

59. $x = 50t - \frac{15}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{3}{\pi^2}, 2$ horas 1 minuto

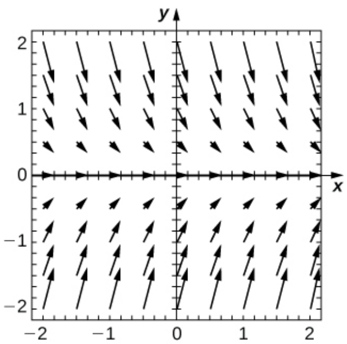
61. $y = 4e^{3t}$

63. $y = 3 - 2t + t^2$

65. $y = \frac{1}{k}\left(e^{kt} - 1\right)$ y de $y = x$

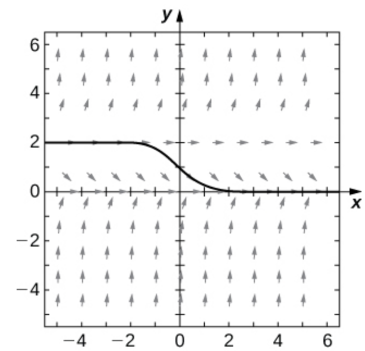
Sección 4.2 ejercicios

67.



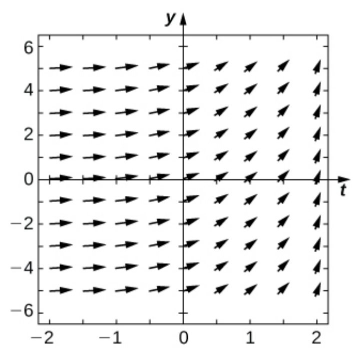
69. $y = 0$ es un equilibrio estable

71.

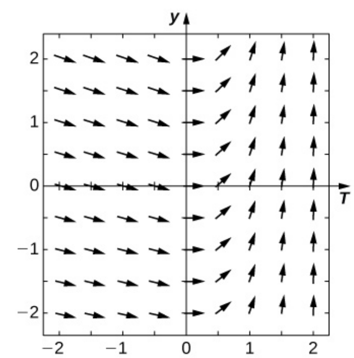


73. $y = 0$ es un equilibrio estable y $y = 2$ es inestable

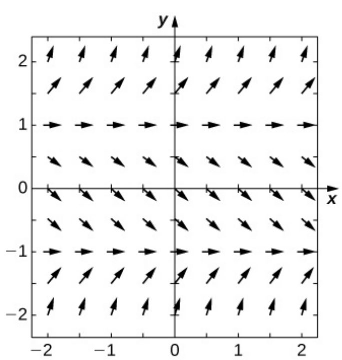
75.



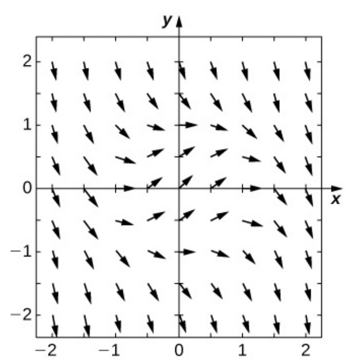
77.



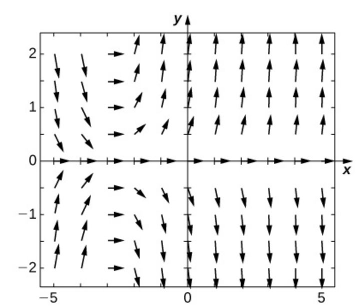
79.



81.



83.



85. E

87. A

89. B

91. A

93. C

95. $2{,}24$, exacta: 3

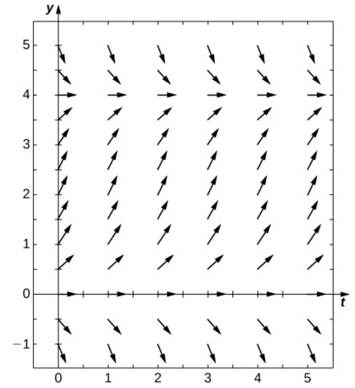
97. $7{,}739364$, exacta: $5(e-1)$ grandes.

99. $-0{,}2535$ exacta: 0

101. $1{,}345$, exacta: $\frac{1}{\ln(2)}$ grandes.

103. -4, exacta: $-1/2$

105.



107. $y' = 2e^{t^2/2}$

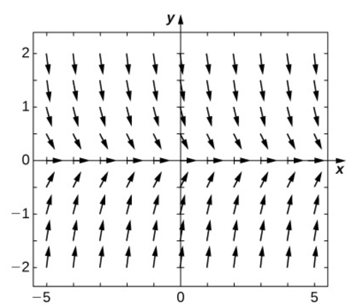
109. 2

111. $3{,}2756$

113. $2\sqrt{e}$

Tamaño de paso	Error
$h = 1$	$0{,}3935$
$h = 10$	$0{,}06163$
$h = 100$	$0{,}006612$
$h = 1.000$	$0{,}0006661$

115.



117. $4{,}0741e^{-10}$

Sección 4.3 ejercicios

119. $y = e^t - 1$

121. $y = 1 - Ce^{-t}$

123. $y = Cxe^{-1/x}$

125. $y = \frac{1}{C - x^2}$

127. $y = -\frac{2}{C + \ln x}$

129. $y = Ce^x(x+1) + 1$

131. $y = \operatorname{sen}(\ln t + C)$ grandes.

133. $y = -\ln(e^{-x})$ grandes.

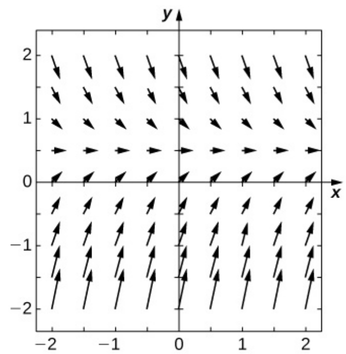
135. $y = \frac{1}{\sqrt{2 - e^{x^2}}}$

137. $y = \tanh^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ grandes.

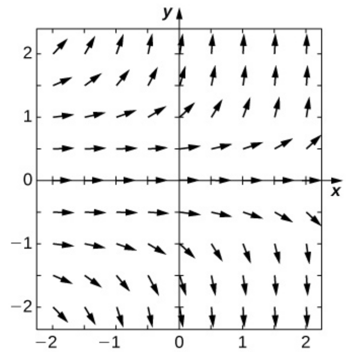
139. $x = \operatorname{sen}(1 - t + t\ln t)$ grandes.

141. $y = \ln(\ln(5)) - \ln(2 - 5^x)$ grandes.

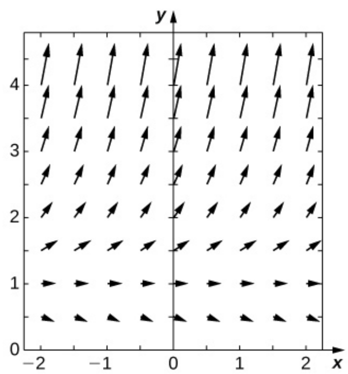
143. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}$



145. $y = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{C-e^x}}$



147. $y = Ce^{-x}x^x$



149. $y = \frac{r}{d}\left(1 - e^{-dt}\right)$

151. $y(t) = 10 - 9e^{-x/50}$

153. 134,3 kilogramos

155. 720 segundos

157. 24 horas 57 minutos

159. $T(t) = 20 + 50e^{-0{,}125t}$

161. $T(t) = 20 + 38{,}5e^{-0{,}125t}$

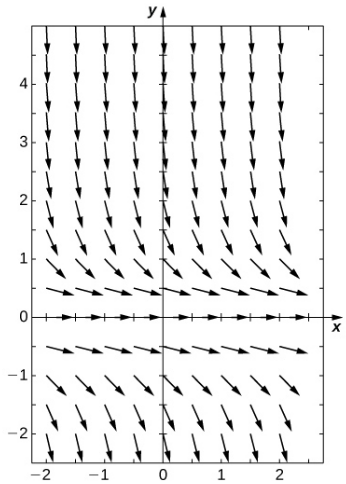
163. $y = \left(c + \frac{b}{a}\right)e^{ax} - \frac{b}{a}$

165. $y(t) = cL + (I - cL)e^{-rt/L}$

167. $y = 40\left(1 - e^{-0{,}1t}\right)$, 40 g/cm^2

Sección 4.4 ejercicios

169.



$P = 0$ semiestable

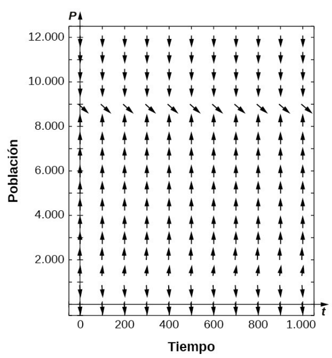
171. $P = \frac{10e^{10x}}{e^{10x}+4}$

173. $P(t) = \frac{10.000e^{0,02t}}{150+50e^{0,02t}}$

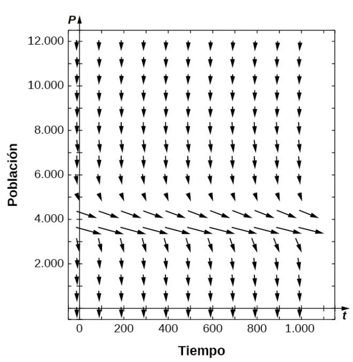
175. 69 horas 5 minutos

177. 8 años 11 meses

179.

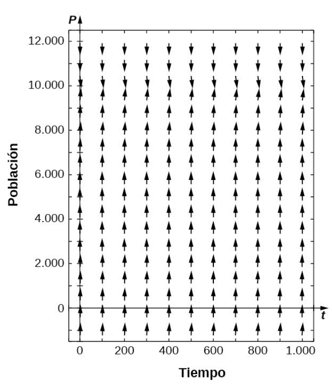


181.



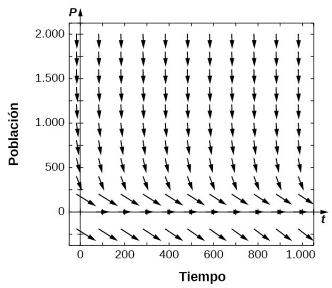
P_1 semiestable

183.



$P_2 > 0$ estable

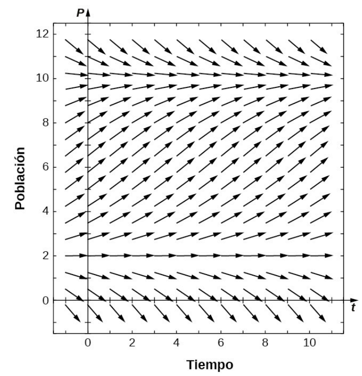
185.



$P_1 = 0$ es semiestable

187. $y = \frac{-20}{4 \times 10^{-6} - 0{,}002e^{0{,}01t}}$

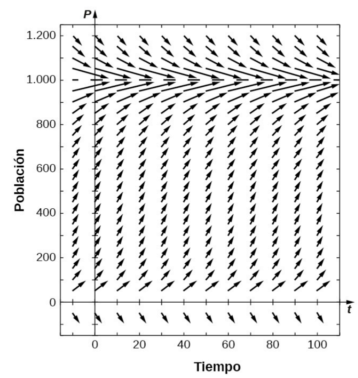
189.



191. $P(t) = \frac{850+500e^{0{,}009t}}{85+5e^{0{,}009t}}$

193. 13 años meses

195.



197. 31,465 días

199. Septiembre de 2008

201. $\frac{K+T}{2}$

203. $r = 0{,}0405$

205. $\alpha = 0{,}0081$

207. Logística: 361, Umbral: 436, Gompertz: 309.

Sección 4.5 ejercicios

209. Sí

211. Sí

213. $y' - x^3 y = \operatorname{sen} x$

215. $y' + \frac{(3x+2)}{x} y = -e^x$

217. $\frac{dy}{dt} - yx(x+1) = 0$

219. e^x

221. $-\ln(\cosh x)$ grandes.

223. $y = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$

225. $y = Cx^3 + 6x^2$

227. $y = Ce^{x^2/2} - 3$

229. $y = C\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2x + 4\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ grandes.

231. $y = Cx^3 - x^2$

233. $y = C(x+2)^2 + \frac{1}{2}$

235. $y = \frac{C}{\sqrt{x}} + 2\operatorname{sen}(3t)$

237. $y = C(x+1)^3 - x^2 - 2x - 1$

239. $y = Ce^{\operatorname{senoh}^{-1} x} - 2$

241. $y = x + 4e^x - 1$

243. $y = -\frac{3x}{2}\left(x^2 - 1\right)$ grandes.

245. $y = 1 - e^{\tan^{-1} x}$

247. $y = (x+2)\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)$ grandes.

249. $y = 2e^{2\sqrt{x}} - 2x - 2\sqrt{x} - 1$

251. $v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$

253. 40,451 segundos

255. $\sqrt{\frac{gm}{k}}$

257. $y = Ce^x - a(x+1)$

259. $y = Ce^{x^2/2} - a$

261. $y = \frac{e^{kt} - e^t}{k-1}$

Ejercicios de repaso

263. F

265. T

267. $y(x) = \frac{2^x}{\ln(2)} + x\cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$

269. $y(x) = \ln(C - \cos x)$ grandes.

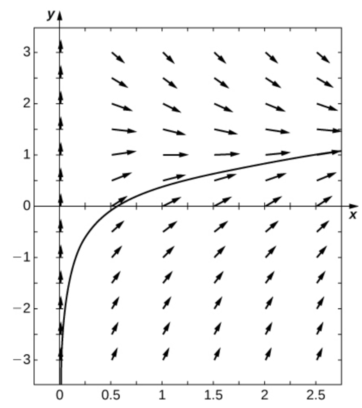
271. $y(x) = e^{e^{C+x}}$

273. $y(x) = 4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - \operatorname{sen} x$

275. $y(x) = -\frac{2}{1 + 3\left(x^2 + 2\operatorname{sen} x\right)}$ grandes.

277. $y(x) = -2x^2 - 2x - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}e^{3x}$

279.



$y(x) = Ce^{-x} + \ln x$

281. Euler: 0,6939, solución exacta: $y(x) = \frac{3^x - e^{-2x}}{2 + \ln(3)}$

283. $\frac{40}{49}$ segundos

285. $x(t) = 5.000 + \frac{245}{9} - \frac{49}{3}t - \frac{245}{9}e^{-5/3t}$, $t = 307{,}8$ segundos

287. $T(t) = 200\left(1 - e^{-t/1.000}\right)$

289. $P(t) = \frac{1.600.000e^{0{,}02t}}{9840 + 160e^{0{,}02t}}$

Capítulo 5

Punto de control

5.1 $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3+2n}$

5.2 $a_n = 6n - 10$

5.3 La secuencia converge y su límite es 0.

5.4 La secuencia converge y su límite es $\sqrt{2/3}$.

5.5 2

5.6 0.

5.7 La serie diverge porque la $k\text{−ésima}$ suma parcial $S_k > k$.

5.8 10.

5.9 $5/7$

5.10 $475/90$

5.11 $e - 1$

5.12 La serie diverge.

5.13 La serie diverge.

5.14 La serie converge.

5.15 $S_5 \approx 1{,}09035$, $R_5 < 0{,}00267$

5.16 La serie converge.

5.17 La serie diverge.

5.18 La serie converge.

5.19 $0{,}04762$

5.20 La serie converge absolutamente.

5.21 La serie converge.

5.22 La serie converge.

5.23 La prueba de comparación porque $2^n/(3^n + n) < 2^n/3^n$ para todos los enteros positivos n. También podría utilizarse la prueba de comparación de límites.

Sección 5.1 ejercicios

1. $a_n = 0$ si n es impar y $a_n = 2$ si n es par

3. $\{a_n\} = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\}$

5. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

7. $a_n = 4n - 7$

9. $a_n = 3{,}10^{1-n} = 30{,}10^{-n}$

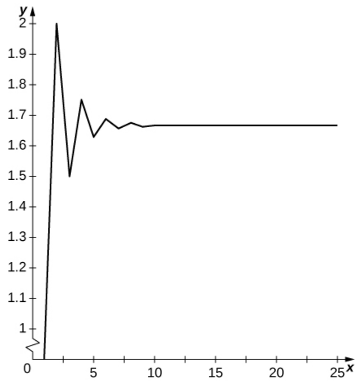
11. $a_n = 2^{n-1} - 1$

13. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

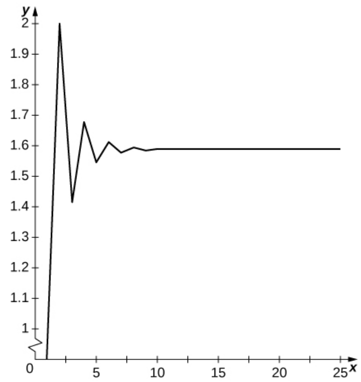
15. $f(n) = 2^n$

17. $f(n) = n!/2^{n-2}$

19. Los términos oscilan por encima y por debajo de $5/3$ y parecen converger a $5/3$.



21. Los términos oscilan por encima y por debajo de $y \approx 1{,}57...$ y parecen converger a un límite.



23. 7

25. 0

27. 0

29. 1

31. delimitada, decreciente para $n \geq 1$

33. delimitada, no monótona

35. delimitada, decreciente

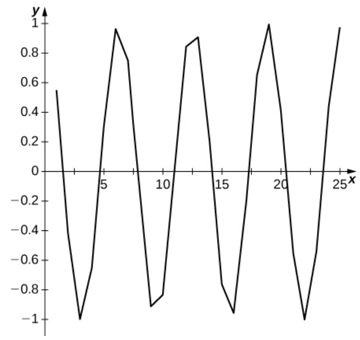
37. no monótona, no delimitada

39. a_n es decreciente y está delimitada por debajo de 2. El límite a debe satisfacer $a = \sqrt{2a}$ así que $a = 2$, independiente del valor inicial.

41. 0

43. $0 : |\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ así que $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$).

45. El gráfico oscila y no sugiere ningún límite.



47. $n^{1/n} \to 1$ y $2^{1/n} \to 1$, así que $a_n \to 0$

49. Dado que $(1 + 1/n)^n \to e$, se tiene $(1 - 2/n)^n \approx (1 + k)^{-2k} \to e^{-2}$ como $k \to \infty$.

51. $2^n + 3^n \leq 2.\,3^n$ y $3^n/4^n \to 0$ a medida que $n \to \infty$, así que $a_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

53. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n!/(n+1)(n+2)\cdots(2n) = \frac{1.2.3\cdots n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} < 1/2^n$. En particular, $a_{n+1}/a_n \leq 1/2$, así que $a_n \to 0$ a medida que $n \to \infty$.

55. $x_{n+1} = x_n - \left((x_n - 1)^2 - 2\right)/2\,(x_n - 1)$; $x = 1 + \sqrt{2}$, $x \approx 2{,}4142$, $n = 5$

57. $x_{n+1} = x_n - x_n\,(\ln(x_n) - 1)$; $x = e$, $x \approx 2{,}7183$, $n = 5$

59. a. Sin pérdidas, la población obedecería $P_n = 1{,}06P_{n-1}$. La sustracción de 150 contabiliza las pérdidas de peces. b. Después de 12 meses, tenemos $P_{12} \approx 1.494$.

61. a. El estudiante debe $\$9.383$ después de 12 meses. b. El préstamo se pagará en su totalidad después de 139 meses u once años y medio.

63. $b_1 = 0$, $x_1 = 2/3$, $b_2 = 1$, $x_2 = 4/3 - 1 = 1/3$, para que el patrón se repita, y $1/3 = 0{,}010101\ldots$.

65. Para los valores iniciales $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_1 = 10$, los correspondientes promedios de bits calculados por el método indicado son $0{,}5220$, $0{,}5000$, $0{,}4960$, $0{,}4870$, $0{,}4860$, $0{,}4680$, $0{,}5130$, $0{,}5210$, $0{,}5040$, y $0{,}4840$. Aquí hay un ejemplo de diez promedios correspondientes de cadenas de 1.000 bits generados por un generador de números aleatorios $0{,}4880$, $0{,}4870$, $0{,}5150$, $0{,}5490$, $0{,}5130$, $0{,}5180$, $0{,}4860$, $0{,}5030$, $0{,}5050$, $0{,}4980$. No hay un patrón real en ninguno de los dos tipos de promedio. Los promedios generados por números aleatorios oscilan entre $0{,}4860$ y $0{,}5490$, un rango de $0{,}0630$, mientras que los promedios de bits de PRNG calculados oscilan entre $0{,}4680$ y $0{,}5220$, un rango de $0{,}0540$.

Sección 5.2 ejercicios

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

71. $1, 3, 6, 10$

73. $1, 1, 0, 0$

75. $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. La serie converge a $S = 1$.

77. $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$. La serie diverge porque las sumas parciales no están delimitadas.

79. $S_1 = 1/3$,
$S_2 = 1/3 + 2/4 > 1/3 + 1/3 = 2/3$,
$S_3 = 1/3 + 2/4 + 3/5 > 3.(1/3) = 1$.
En general $S_k > k/3$. La serie diverge.

81.
$S_1 = 1/(2,3) = 1/6 = 2/3 - 1/2$,
$S_2 = 1/(2,3) + 1/(3,4) = 2/12 + 1/12 = 1/4 = 3/4 - 1/2$,
$S_3 = 1/(2,3) + 1/(3,4) + 1/(4,5) = 10/60 + 5/60 + 3/60 = 3/10 = 4/5 - 1/2$,
$S_4 = 1/(2,3) + 1/(3,4) + 1/(4,5) + 1/(5,6) = 10/60 + 5/60 + 3/60 + 2/60 = 1/3 = 5/6 - 1/2$.

El patrón es $S_k = (k+1)/(k+2) - 1/2$ y la serie converge a $1/2$.

83. 0

85. -3

87. diverge, $\sum_{n=1.001}^{\infty} \frac{1}{n}$

89. series geométricas convergentes, $r = 1/10 < 1$

91. series geométricas convergentes, $r = \pi/e^2 < 1$

93. $\sum_{n=1}^{\infty} 5.(-1/5)^n$, converge a $-5/6$

95. $\sum_{n=1}^{\infty} 100.(1/10)^n$, converge a $100/9$

97. $x \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$

99. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}^{2n}(x)$ grandes.

101. $S_k = 2 - 2^{1/(k+1)} \to 1$ como $k \to \infty$.

103. $S_k = 1 - \sqrt{k+1}$ diverge

105. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n - \ln(n+1)$, $S_k = -\ln(k+1)$ grandes.

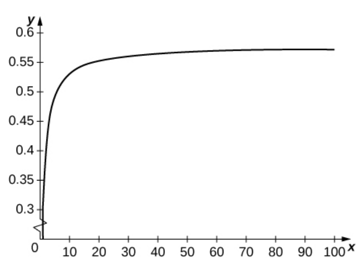
107. $a_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ y $S_k = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(k+1)} \to \frac{1}{\ln(2)}$ grandes.

109. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(1) - f(2)$ grandes.

111. $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$

113. $\frac{2}{n^3-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}$,
$S_n = (1 - 1 + 1/3) + (1/2 - 2/3 + 1/4) + (1/3 - 2/4 + 1/5) + (1/4 - 2/5 + 1/6) + \cdots = 1/2$

115. t_k converge a $0,57721\ldots t_k$ es una suma de rectángulos de altura $1/k$ en el intervalo $[k, k+1]$ que se encuentran por encima del gráfico de $1/x$.



117. $N = 22, S_N = 6{,}1415$

119. $N = 3,$
$S_N = 1{,}559877597243667...$

121. a. La probabilidad de cualquier secuencia ordenada de resultados para n lanzamientos de monedas es $1/2^n$. b. La probabilidad de salir cara por primera vez en el n–ésimo lanzamiento es la probabilidad de la secuencia $TT\ldots TH$ que es $1/2^n$. La probabilidad de salir cara por primera vez en un lanzamiento par es $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{2n}$ o $1/3$.

123. $5/9$

125. $E = \sum_{n=1}^{\infty} n/2^{n+1} = 1$, como puede demostrarse utilizando la suma por partes

127. La parte de la primera dosis después de n horas es dr^n, la parte de la segunda dosis es dr^{n-N}, y, en general, la parte que queda de la $m$sima dosis es dr^{n-mN}, así que

$$A(n) = \sum_{l=0}^{m} dr^{n-lN} = \sum_{l=0}^{m} dr^{k+(m-l)N} = \sum_{q=0}^{m} dr^{k+qN} = dr^k \sum_{q=0}^{m} r^{Nq} = dr^k \frac{1-r^{(m+1)N}}{1-r^N}, n = k + mN.$$

129. $S_{N+1} = a_{N+1} + S_N \geq S_N$

131. Dado que $S > 1$, $a_2 > 0$, y dado que $k < 1$, $S_2 = 1 + a_2 < 1 + (S - 1) = S$. Si $S_n > S$ para algún *n*, entonces hay un *n* más pequeño. Para este *n*, $S > S_{n-1}$, así que $S_n = S_{n-1} + k(S - S_{n-1}) = kS + (1 - k)S_{n-1} < S$, una contradicción. Así, $S_n < S$ y $a_{n+1} > 0$ para todo *n*, por lo que S_n es creciente y está delimitada por S. Supongamos que $S_* = \text{lím}\, S_n$. Si $S_* < S$, entonces $\delta = k(S - S_*) > 0$, pero podemos hallar *n* tal que $S_* - S_n < \delta/2$, lo que implica que $S_{n+1} = S_n + k(S - S_n) > S_* + \delta/2$, lo que contradice que S_n está aumentando a S_*. Así que $S_n \to S$.

133. Supongamos que $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ y $S_k \to L$. Entonces S_k finalmente se acerca arbitrariamente a L, lo que significa que $L - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ se vuelve arbitrariamente pequeño a medida que $N \to \infty$.

135. $L = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n \text{ n} = \frac{3}{2}.$

137. En la primera fase, un cuadrado de área $1/9$ se retira, en la etapa 2 se retiran 8 cuadrados de área $1/9^2$, en la tercera etapa se eliminan 8^2 cuadrados de área $1/9^3$, y así sucesivamente. El área total eliminada después de N etapas es $\sum_{n=0}^{N-1} 8^N/9^{N+1} = \frac{1}{8}\left(1 - (8/9)^N\right)/(1 - 8/9) \to 1$ a medida que $N \to \infty$. El perímetro total es $4 + 4\sum_{n=0} 8^N/3^{N+1} \to \infty$.

Sección 5.3 ejercicios

139. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La prueba de divergencia no aplica.

141. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. La serie diverge.

143. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (no existe). La serie diverge.

145. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. La serie diverge.

147. $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe. La serie diverge.

149. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/e^2$. La serie diverge.

151. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La prueba de divergencia no aplica.

153. La serie converge, $p > 1$.

155. La serie converge, $p = 4/3 > 1$.

157. La serie converge, $p = 2e - \pi > 1$.

159. La serie diverge por comparación con $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+5)^{1/3}}$.

161. La serie diverge por comparación con $\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$.

163. La serie converge por comparación con $\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^4}dx$.

165. $2^{-\ln n} = 1/n^{\ln 2}$. Dado que $\ln 2 < 1$, diverge por la serie p.

167. $2^{-2\ln n} = 1/n^{2\ln 2}$. Dado que $2\ln 2 – 1 < 1$, diverge por la serie p.

169. $R_{1.000} \le \int_{1.000}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{1.000}^{\infty} = 0{,}001$

171. $R_{1.000} \le \int_{1.000}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}(1.000) = \pi/2 - \tan^{-1}(1.000) \approx 0{,}000999$

173. $R_N < \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1/N, N > 10^4$

175. $R_N < \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{1{,}01}} = 100N^{-0{,}01}, N > 10^{600}$

177. $R_N < \int_N^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2 - \tan^{-1}(N), N > \tan\left(\pi/2 - 10^{-3}\right) \approx 1.000$

179. $R_N < \int_N^{\infty} \frac{dx}{e^x} = e^{-N}, N > 5\ln(10),$ está bien si $N = 12; \sum_{n=1}^{12} e^{-n} = 0{,}581973....$ La estimación coincide con $1/(e-1)$ con cinco decimales.

181. $R_N < \int_N^{\infty} dx/x^4 = 1/3N^3, N > \left(10^4/3\right)^{1/3},$ está bien si $N = 15;$ $\sum_{n=1}^{15} 1/n^4 = 1{,}08226\ldots.$ La estimación coincide con la suma con precisión de tres decimales.

183. $\ln(2)$

185. $T = 0{,}5772...$

187. El número esperado de inserciones aleatorias para que B llegue a la parte superior es $n + n/2 + n/3 + \cdots + n/(n-1).$ Entonces una inserción más pone B de nuevo en una posición aleatoria. Por lo tanto, el número esperado de barajadas para que el mazo quede distribuido de manera aleatoria es $n(1 + 1/2 + \cdots + 1/n).$

189. Establezca $b_n = a_{n+N}$ y $g(t) = f(t+N)$ tal que f es decreciente en $[t, \infty)$.

191. La serie converge para $p > 1$ por la prueba de la integral utilizando el cambio de variable.

193. $N = e^{e^{100}} \approx e^{10^{43}}$ términos son necesarios.

Sección 5.4 ejercicios

195. Converge por comparación con $1/n^2$.

197. Diverge por comparación con la serie armónica, dado que $2n-1 \geq n$.

199. $a_n = 1/(n+1)(n+2) < 1/n^2$. Converge por comparación con la serie p, $p = 2$.

201. $\operatorname{sen}(1/n) \leq 1/n$, por lo que converge por comparación con la serie p, $p = 2$.

203. $\operatorname{sen}(1/n) \leq 1$, por lo que converge por comparación con la serie p, $p = 3/2$.

205. Dado que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \leq 2/\sqrt{n},$ la serie converge por comparación con la serie p para $p = 1{,}5$.

207. Converge por comparación de límites con la serie p para $p > 1$.

209. Converge por comparación de límites con la serie p, $p = 2$.

211. Converge por comparación de límites con 4^{-n}.

213. Converge por comparación de límites con $1/e^{1{,}1n}$.

215. Diverge por comparación de límites con la serie armónica.

217. Converge por comparación de límites con la serie *p*, $p = 3$.

219. Converge por comparación de límites con la serie *p*, $p = 3$.

221. Diverge por comparación de límites con $1/n$.

223. Converge para $p > 1$ en comparación con una serie p para un p un poco más pequeño p.

225. Converge para todo $p > 0$.

227. Converge para todo $r > 1$. Si $r > 1$ entonces $r^n > 4$, digamos, una vez $n > \ln(2)/\ln(r)$ y entonces la serie converge por comparación de límites con una serie geométrica con razón $1/2$.

229. El numerador es igual a 1 cuando n es impar y 0 cuando n es par, por lo que la serie se puede reescribir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, que diverge por comparación de límites con la serie armónica.

231. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ o $a^2 + b^2 \geq 2ab$, por lo que la convergencia se deduce de la comparación de $2a_n b_n$ con $a^2{}_n + b^2{}_n$. Como las sumas parciales de la izquierda están delimitadas por las de la derecha, la desigualdad se mantiene para la serie infinita.

233. $(\ln n)^{-\ln n} = e^{-\ln(n)\ln\ln(n)}$. Si n es lo suficientemente grande, entonces $\ln\ln n > 2$, tal que $(\ln n)^{-\ln n} < 1/n^2$, y la serie converge por comparación con una serie .

235. $a_n \to 0$, así que $a^2{}_n \leq |a_n|$ para n. La convergencia se desprende de la comparación de límites. $\sum 1/n^2$ converge, pero $\sum 1/n$ no lo hace, por lo que el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ converge no implica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

237. No. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. Supongamos que $b_k = 0$ a menos que $k = n^2$ para algunos n. Entonces $\sum_k b_k/k = \sum 1/k^2$ converge.

239. $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$, por lo que el resultado se desprende de la prueba de comparación.

241. Por la prueba de comparación,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/2^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$$

243. Si $b_1 = 0$, entonces, en comparación,

$$x \leq \sum_{n=2}^{\infty} 1/2^n = 1/2.$$

245. Sí. Siga añadiendo pesos de $1\ -\text{kg}$ hasta que la balanza se incline hacia el lado de los pesos. Si se equilibra perfectamente, con Robert de pie en el otro lado, deténgase. En caso contrario, elimine uno de los pesos de $1\ -\text{kg}$ y añada pesos de $0{,}1\ -\text{kg}$ uno a la vez. Si se equilibra después de añadir algunos de estos, deténgase. De lo contrario, si se inclina hacia los pesos, retire el último peso de $0{,}1\ -\text{kg}$. Empiece a añadir pesos de $0{,}01\ -\text{kg}$. Si se equilibra, deténgase. Si se inclina hacia el lado con los pesos, retire el último peso de $0{,}01\ -\text{kg}$ que se añadió. Continúe así para los pesos de $0{,}001\ -\text{kg}$ y así sucesivamente. Después de un número finito de pasos, se tiene una serie finita de la forma $A + \sum_{n=1}^{N} s_n/10^n$ donde A es el número de pesos completos en kg y d_n es el número de pesos de $1/10^n\ -\text{kg}$ que se añadieron. Si en algún estado esta serie es el peso exacto de Robert, el proceso se detendrá. En caso contrario, representa la enésimasimo suma parcial de una serie infinita que da el peso exacto de Robert, y el error de esta suma es como máximo $1/10^N$.

247. a. $10^d - 10^{d-1} < 10^d$ b. $h(d) < 9^d$ c. $m(d) = 10^{d-1} + 1$ d. Agrupe los términos de la serie armónica eliminada por el número de dígitos $h(d)$ delimita el número de términos, y cada término es como máximo $1/m(d)$.

$$\sum_{d=1}^{\infty} h(d)/m(d) \le \sum_{d=1}^{\infty} 9^d/(10)^{d-1} \le 90.$$

En realidad se puede utilizar la comparación para estimar el valor a menor que 80. El valor real es menor que 23.

249. Siguiendo la pista, da $S_N = \left(1 + 1/N^2\right)\left(1 + 1/(N-1)^2 \ldots (1 + 1/4)\right)$. Entonces $\ln(S_N) = \ln\left(1 + 1/N^2\right) + \ln\left(1 + 1/(N-1)^2\right) + \cdots + \ln(1 + 1/4)$. Dado que $\ln(1 + t)$ está delimitada por una constante de t veces t, cuando $0 < t < 1$ se tiene $\ln(S_N) \le C \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, que converge por comparación con la serie *p* para $p = 2$.

Sección 5.5 ejercicios

251. No converge por la prueba de divergencia. Los términos no tienden a cero.

253. Converge condicionalmente por la prueba de series alternadas, dado que $\sqrt{n+3}/n$ es decreciente. No converge absolutamente por comparación con la serie *p*, $p = 1/2$.

255. Converge absolutamente por comparación de límites a $3^n/4^n$, por ejemplo.

257. Diverge por la prueba de divergencia dado que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = e$.

259. No converge. Los términos no tienden a cero.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2(1/n) = 1$. Diverge por la prueba de divergencia.

263. Converge por la prueba de series alternadas.

265. Converge condicionalmente por la prueba de series alternadas. No converge absolutamente por comparación de límites con la serie *p*, $p = \pi - e$

267. Diverge; los términos no tienden a cero.

269. Converge por la prueba de series alternadas. No converge en absoluto por comparación de límites con la serie armónica.

271. Converge absolutamente por comparación de límites con la serie *p*, $p = 3/2$, después de aplicar la pista.

273. Converge por la prueba de series alternadas ya que $n(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n)$ es decreciente hasta cero para n No converge absolutamente por comparación de límites con la serie armónica después de aplicar la pista.

275. Converge absolutamente, ya que $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ son términos de una serie telescópica.

277. Los términos no tienden a cero. La serie diverge por la prueba de divergencia.

279. Converge por la prueba de series alternadas. No converge en absoluto por comparación de límites con la serie armónica.

281. $\ln(N+1) > 10$, $N + 1 > e^{10}$, $N \geq 22026$; $S_{22026} = -0{,}9743\ldots$

283. $2^{N+1} > 10^6$ o $N + 1 > 6\ln(10)/\ln(2) = 19{,}93$. o $N \geq 19$; $S_{19} = 0{,}333333969\ldots$

285. $(N+1)^2 > 10^6$ o $N > 999$; $S_{1.000} \approx 0{,}822466$.

287. Verdadero. b_n no necesita tender a cero ya que si $c_n = b_n - \lim b_n$, entonces $c_{2n-1} - c_{2n} = b_{2n-1} - b_{2n}$.

289. Verdadero. $b_{3n-1} - b_{3n} \geq 0$, por lo que la convergencia de $\sum b_{3n-2}$ se deduce de la prueba de comparación.

291. Verdadero. Si una de ellas converge, la otro también debe hacerlo, lo que implica una convergencia absoluta.

293. Sí. Tome $b_n = 1$ si $a_n \geq 0$ y $b_n = 0$ si $a_n < 0$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n:a_n \geq 0} a_n$ converge. Del mismo modo, se puede mostrar que $\sum_{n:a_n<0} a_n$ converge. Como ambas series convergen, la serie debe converger absolutamente.

295. No disminuye. No converge absolutamente.

297. No es alternada. Puede expresarse como $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}\right)$, que diverge en comparación con $\sum \frac{1}{3n-2}$.

299. Supongamos que $a^+{}_n = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $a^+{}_n = 0$ si $a_n < 0$. Entonces $a^+{}_n \leq |a_n|$ para todo n por lo que la secuencia de sumas parciales de $a^+{}_n$ es creciente y está delimitada por encima por la secuencia de sumas parciales de $|a_n|$, que converge; por esto, $\sum_{n=1}^{\infty} a^+{}_n$ converge.

301. Para $N = 5$ se tiene $|R_N| b_6 = \theta^{10}/10!$. Cuando $\theta = 1$, $R_5 \leq 1/10! \approx 2{,}75 \times 10^{-7}$. Cuando $\theta = \pi/6$, $R_5 \leq (\pi/6)^{10}/10! \approx 4{,}26 \times 10^{-10}$. Cuando $\theta = \pi$, $R_5 \leq \pi^{10}/10! = 0{,}0258$.

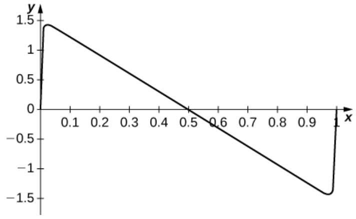
303. Supongamos que $b_n = 1/(2n-2)!$. Entonces $R_N \leq 1/(2N)! < 0{,}00001$ cuando $(2N)! > 10^5$ o $N = 5$ y $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} = 0{,}540325\ldots$, mientras que $\cos 1 = 0{,}5403023\ldots$

305. Supongamos que $T = \sum \frac{1}{n^2}$. Entonces $T - S = \frac{1}{2}T$, así que $S = T/2$. $\sqrt{6 \times \sum_{n=1}^{1.000} 1/n^2} = 3{,}140638\ldots$; $\sqrt{12 \times \sum_{n=1}^{1.000} (-1)^{n-1}/n^2} = 3{,}141591\ldots$; $\pi = 3{,}141592\ldots$. Las series alternadas son más precisas para 1.000 términos.

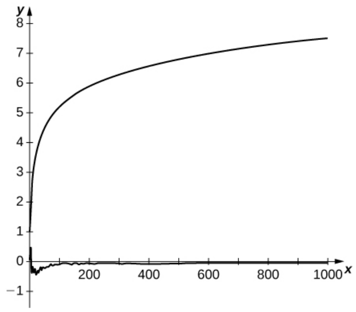
307. $N = 6,\ S_N = 0{,}9068$

309. $\ln(2)$. La 3enésimo suma parcial es la misma que la de la serie armónica alternada.

311. La serie salta rápidamente cerca de los puntos finales. Para x lejos de los puntos finales, el gráfico tiene el siguiente aspecto $\pi(1/2 - x)$.



313. Este es un resultado típico. La curva superior está formada por sumas parciales de las series armónicas. La curva inferior representa sumas parciales de una serie armónica aleatoria.



315. Por la prueba de series alternadas, $|S_n - S| \leq b_{n+1}$, por lo que se necesitan 10^4 términos de la serie armónica alternada para estimar $\ln(2)$ con una precisión de $0{,}0001$. Las primeras 10 sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ son (hasta cuatro decimales) $0{,}5000, 0{,}6250, 0{,}6667, 0{,}6823, 0{,}6885, 0{,}6911, 0{,}6923, 0{,}6928, 0{,}6930, 0{,}6931$ y la décima suma parcial está dentro de $0{,}0001$ de $\ln(2) = 0{,}6931\ldots$.

Sección 5.6 ejercicios

317. $a_{n+1}/a_n \to 0$. Converge.

319. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to 1/2 < 1$. Converge.

321. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/27 < 1$. Converge.

323. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 4/e^2 < 1$. Converge.

325. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. El criterio del cociente no es concluyente.

327. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1/e^2$. Converge.

329. $(a_k)^{1/k} \to 2 > 1$. Diverge.

331. $(a_n)^{1/n} \to 1/2 < 1$. Converge.

333. $(a_k)^{1/k} \to 1/e < 1$. Converge.

335. $a_n^{1/n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{e} < 1.$ Converge.

337. $a_n^{1/n} = \frac{(\ln(1+\ln n))}{(\ln n)} \to 0$ por la regla de L'Hôpital. Converge.

339. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2k+1} \to 0.$ Converge por el criterio del cociente.

341. $(a_n)^{1/n} \to 1/e$. Converge por el criterio de la raíz.

343. $a_k^{1/k} \to \ln(3) > 1$. Diverge por el criterio de la raíz.

345. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2n+1}}{2^{3n^2+3n+1}} \to 0.$ Converge.

347. Converge por el criterio de la raíz y la prueba de comparación de límites ya que $x_n \to \sqrt{2}$.

349. Converge absolutamente por comparación de límites con la serie p, $p = 2$.

351. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/e^2 \neq 0$. La serie diverge.

353. Los términos no tienden a cero: $a_k \geq 1/2$, dado que $\operatorname{sen}^2 x \leq 1$.

355. $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$, que converge por comparación con la serie p para $p = 2$.

357. $a_k = \frac{2^k 1.2\cdots k}{(2k+1)(2k+2)\cdots 3k} \leq (2/3)^k$ converge por comparación con la serie geométrica.

359. $a_k \approx e^{-\ln k^2} = 1/k^2$. La serie converge por comparación de límites con la serie p, $p = 2$.

361. Si $b_k = c^{1-k}/(c-1)$ y $a_k = k$, entonces $b_{k+1} - b_k = -c^{-k}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k}{c^k} = a_1 b_1 + \frac{1}{c-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c^{-k} = \frac{c}{(c-1)^2}$.

363. $6 + 4 + 1 = 11$

365. $|x| \leq 1$

367. $\left|x\right| < \infty$

369. Todos los números reales p mediante el criterio del cociente.

371. $r < 1/p$

373. $0 < r < 1$. Observe que los criterios del cociente y la raíz no son concluyentes. Utilizando la pista, hay $2k$ términos $r^{\sqrt{n}}$ para $k^2 \leq n < (k+1)^2$, y para $r < 1$ cada término es de al menos r^k. Por lo tanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{\sqrt{n}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} r^{\sqrt{n}}$ $\geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2kr^k$, que converge mediante el criterio del cociente para $r < 1$. Para $r \geq 1$ la serie diverge por la prueba de divergencia.

375. Se tiene $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 1/2, \ldots\ a_{2n} = a_{2n+1} = 1/2^n$. El criterio del cociente no aplica porque $a_{n+1}/a_n = 1$ si n es par. Sin embargo, $a_{n+2}/a_n = 1/2$, por lo que la serie converge según el ejercicio anterior. Por supuesto, la serie es solo una serie geométrica duplicada.

377. $a_{2n}/a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n+1+x} \frac{n+2}{n+2+x} \cdots \frac{2n}{2n+x}$.
La inversa del $k-$ésimo factor es $(n+k+x)/(n+k) > 1 + x/(2n)$ para que el producto sea menor que $(1 + x/(2n))^{-n} \approx e^{-x/2}$. Por lo tanto, para $x > 0$, $\frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2} e^{-x/2}$. La serie converge para $x > 0$.

Ejercicios de repaso

379. falso

381. verdadero

383. no delimitada, no monótona, divergente

385. delimitada, monótona, convergente, 0

387. no delimitada, no monótona, divergente

389. diverge

391. converge

393. converge, pero no absolutamente

395. converge absolutamente

397. converge absolutamente

399. $\frac{1}{2}$

401. ∞, 0, x_0

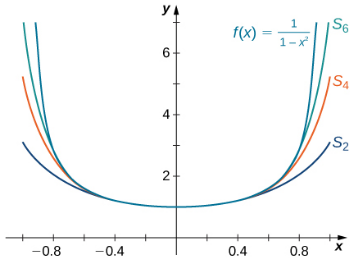
403. $S_{10} \approx 383,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 400$

Capítulo 6

Punto de control

6.1 El intervalo de convergencia es $[-1, 1)$. El radio de convergencia es $R = 1$.

6.2



6.3 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{2^{n+1}}$ con intervalo de convergencia $(-2, 2)$

6.4 El intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

6.5 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$. El intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

6.6 $f(x) = \frac{3}{3-x}$. El intervalo de convergencia es $(-3, 3)$.

6.7 $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

6.8 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n$

6.9 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$

6.10 $p_0(x) = 1; p_1(x) = 1 - 2(x-1); p_2(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2; p_3(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3$

6.11 $p_0(x) = 1; p_1(x) = 1 - x; p_2(x) = 1 - x + x^2; p_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3; p_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

6.12
$p_1(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4); p_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2; p_1(6) = 2{,}5; p_2(6) = 2{,}4375;$
$|R_1(6)| \leq 0{,}0625; |R_2(6)| \leq 0{,}015625$

6.13 0,96593

6.14 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-x}{2^{n+2}}\right)^n$. El intervalo de convergencia es $(0, 4)$.

6.15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ Mediante el criterio del cociente, el intervalo de convergencia es $\left(-\infty, \infty\right)$. Dado que $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, la serie converge a $\cos x$ para todo x real.

6.16 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$

6.17 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$

6.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n} x^n$

6.19 $y = 5e^{2x}$

6.20 $y = a\left(1 - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} - \cdots\right) + b\left(x - \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^9}{4.5.8.9} - \cdots\right)$

6.21 $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(2n-2)!}$ La integral definida es aproximadamente $0{,}514$ con un error de $0{,}01$.

6.22 La estimación es de aproximadamente $0{,}3414$. Esta estimación tiene una precisión de $0{,}0000094$.

Sección 6.1 ejercicios

1. Verdadero. Si una serie converge, sus términos tienden a cero.

3. Falso. Esto implicaría que $a_n x^n \to 0$ para $|x| < R$. Si $a_n = n^n$, entonces $a_n x^n = (nx)^n$ no tiende a cero para cualquier $x \neq 0$.

5. Debe converger en $(0, 6]$ y por lo tanto en: a. $x = 1$; b. $x = 2$; c. $x = 3$; d. $x = 0$; e. $x = 5{,}99$; y f. $x = 0{,}000001$.

7. $\left|\frac{a_{n+1} 2^{n+1} x^{n+1}}{a_n 2^n x^n}\right| = 2|x| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 2|x|$ así que $R = \frac{1}{2}$

9. $\left|\frac{a_{n+1} \left(\frac{\pi}{e}\right)^{n+1} x^{n+1}}{a_n \left(\frac{\pi}{e}\right)^n x^n}\right| = \frac{\pi|x|}{e} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{\pi|x|}{e}$ así que $R = \frac{e}{\pi}$

11. $\left|\frac{a_{n+1}(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{a_n(-1)^n x^{2n}}\right| = \left|x^2\right|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \left|x^2\right|$ así que $R = 1$

13. $a_n = \frac{2^n}{n}$ así que $\frac{a_{n+1}x}{a_n} \to 2x$. así que $R = \frac{1}{2}$. Cuando $x = \frac{1}{2}$ la serie es armónica y divergente. Cuando $x = -\frac{1}{2}$ la serie es armónica alternada y converge. El intervalo de convergencia es $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

15. $a_n = \frac{n}{2^n}$ así que $\frac{a_{n+1}x}{a_n} \to \frac{x}{2}$ así que $R = 2$. Cuando $x = \pm 2$ la serie diverge por la prueba de divergencia. El intervalo de convergencia es $I = (-2, 2)$.

17. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ así que $R = 2$. Cuando $x = \pm 2$ la serie diverge por la prueba de divergencia. El intervalo de convergencia es $I = (-2, 2)$.

19. $a_k = \frac{\pi^k}{k^\pi}$ así que $R = \frac{1}{\pi}$. Cuando $x = \pm\frac{1}{\pi}$ la serie es una serie *p* absolutamente convergente. El intervalo de convergencia es $I = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

21. $a_n = \frac{10^n}{n!}$, $\frac{a_{n+1}x}{a_n} = \frac{10x}{n+1} \to 0 < 1$ por lo que la serie converge para todo *x* por el criterio del cociente e $I = \left(-\infty, \infty\right)$.

23. $a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ así que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \to \frac{1}{4}$ así que $R = 4$

25. $a_k = \frac{k!}{1.3.5\cdots(2k-1)}$ así que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{2k+1} \to \frac{1}{2}$ así que $R = 2$

27. $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ así que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\,\frac{2n!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4}$ así que $R = 4$

29. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to \frac{1}{27}$ así que $R = 27$

31. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ así que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$ así que $R = e$

33. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ en $I = (0, 2)$ grandes.

35. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ en $I = (-1, 1)$ grandes.

37. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}$ en $I = (-1, 1)$ grandes.

39. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ grandes.

41. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n+2}$ en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ grandes.

43. $|a_n x^n|^{1/n} = |a_n|^{1/n}\,|x| \to |x|\,r$ a medida que $n \to \infty$ y $|x|\,r < 1$ cuando $|x| < \frac{1}{r}$. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge cuando $|x| < \frac{1}{r}$ por el criterio de la *enésima* raíz.

45. $a_k = \left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k$ así que $(a_k)^{1/k} \to \frac{1}{2} < 1$ así que $R = 2$

47. $a_n = \left(n^{1/n} - 1\right)^n$ así que $(a_n)^{1/n} \to 0$ así que $R = \infty$

49. Podemos reescribir

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$ y

$p(x) = p(-x)$ dado que $x^{2n+1} = -(-x)^{2n+1}$.

51. Si los valores de $x \in [0, 1]$, entonces $y = 2x - 1 \in [-1, 1]$ así que

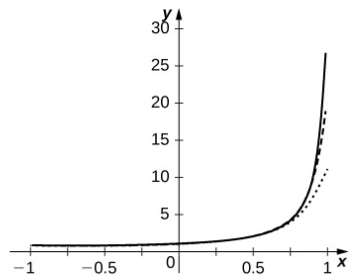
$$p(2x - 1) = p(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

converge.

53. Converge en $(-1, 1)$ por el criterio del cociente

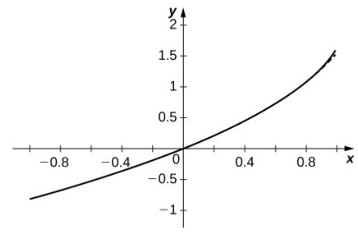
55. Considere la serie $\sum b_k x^k$ donde $b_k = a_k$ si $k = n^2$ y $b_k = 0$ por lo contrario. Entonces $b_k \leq a_k$ y así la serie converge en $(-1, 1)$ por la prueba de comparación.

57.



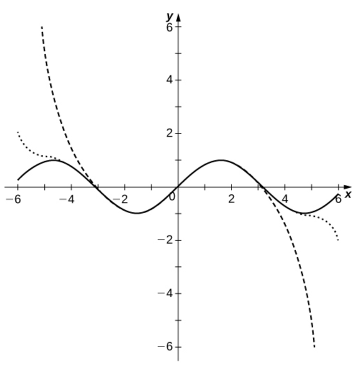
La aproximación es más precisa cerca de $x = -1$. Las sumas parciales siguen $\frac{1}{1-x}$ más de cerca a medida que aumenta *N*, pero nunca son precisas cerca de $x = 1$ ya que la serie diverge allí.

59.



La aproximación parece estabilizarse rápidamente cerca de ambos $x = \pm 1$.

61.



Las curvas polinómicas tienen raíces cercanas a las de $\operatorname{sen} x$ hasta su grado y luego los polinomios divergen de $\operatorname{sen} x$.

Sección 6.2 ejercicios

63. $\frac{1}{2}(f(x)+g(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ y

$\frac{1}{2}(f(x)-g(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

65. $\frac{4}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}-\frac{1}{1-(-x)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^{n}$

67. $\frac{5}{\left(x^{2}+4\right)\left(x^{2}-1\right)}=\frac{1}{x^{2}-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+2}\right)x^{2n}$

69. $\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^{n}}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1}$

71. $\frac{1}{x-3}\frac{1}{1-\frac{1}{(x-3)^{2}}}=\frac{x-3}{(x-3)^{2}-1}$

73. $P=P_1+\cdots+P_{20}$ donde $P_k=10.000\frac{1}{(1+r)^{k}}$. Entonces $P=10.000\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(1+r)^{k}}=10.000\frac{1-(1+r)^{-20}}{r}$. Cuando $r=0{,}03$, $P\approx 10.000\times 14{,}8775=148.775$. Cuando $r=0{,}05$, $P\approx 10.000\times 12{,}4622=124.622$. Cuando $r=0{,}07$, $P\approx 105.940$.

75. En general, $P=\frac{C\left(1-(1+r)^{-N}\right)}{r}$ para N años de pagos, o $C=\frac{Pr}{1-(1+r)^{-N}}$. Para $N=20$ y $P=100.000$, se tiene $C=6721{,}57$ cuando $r=0{,}03$; $C=8.024{,}26$ cuando $r=0{,}05$; y $C\approx 9.439{,}29$ cuando $r=0{,}07$.

77. En general, $P=\frac{C}{r}$. Por lo tanto, $r=\frac{C}{P}=5\times\frac{10^{4}}{10^{6}}=0{,}05$.

79. $\left(x+x^{2}-x^{3}\right)\left(1+x^{3}+x^{6}+\cdots\right)=\frac{x+x^{2}-x^{3}}{1-x^{3}}$

81. $\left(x-x^{2}-x^{3}\right)\left(1+x^{3}+x^{6}+\cdots\right)=\frac{x-x^{2}-x^{3}}{1-x^{3}}$

83. $a_n=2, b_n=n$ así que

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}b_k a_{n-k}=2\sum_{k=0}^{n}k=(n)(n+1)$$

y $f(x)\,g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n}$

85. $a_n = b_n = 2^{-n}$ así que

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\, a_{n-k} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{2^n}$$

y $f(x)\, g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{2}\right)^n$

87. La derivada de f es

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (n+1)\, x^n.$$

89. La integral indefinida de f

es $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$

91. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1}\Big|_{x=1/2} = \frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1/2} = 4$

así que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$

93. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{d^2}{dx^2}(1-x)^{-1}\Big|_{x=1/2} = \frac{2}{(1-x)^3}\Big|_{x=1/2} = 16$

así que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,(n-1)}{2^n} = 4.$

95. $\int \sum (1-x)^n\, dx = \int \sum (-1)^n (x-1)^n\, dx = \sum \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$

97. $-\int_{t=0}^{x^2} \frac{1}{1-t}\, dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x^2} t^n\, dx - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$

99. $\int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{x^2} t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{t=0}^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$

101. La integración término a término da

$$\int_0^x \ln t\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n+1}}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(x-1)^{n+1} = (x-1)\ln x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n} = x\ln x - x.$$

103. Tenemos $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ así que

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Por lo tanto,

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+(-1)^{n-1}\right) \frac{x^n}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Cuando $x = \frac{1}{3}$ obtenemos

$\ln(2) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$. Tenemos

$2\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)} = 0{,}69300\ldots$, mientras

$2\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)} = 0{,}69313\ldots$ y

$\ln(2) = 0{,}69314\ldots$; por lo tanto, $N = 4$.

105. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ así que

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{6k} = -\frac{1}{6}\ln\left(1-x^3\right)$.

El radio de convergencia es igual a 1 por el criterio del cociente.

107. Si $y = 2^{-x}$, entonces

$\sum_{k=1}^{\infty} y^k = \frac{y}{1-y} = \frac{2^{-x}}{1-2^{-x}} = \frac{1}{2^x-1}$.

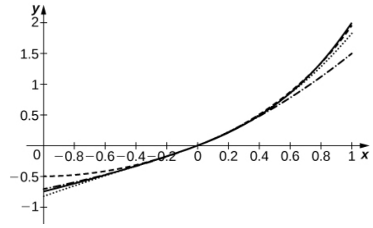
Si $a_k = 2^{-kx}$, entonces

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2^{-x} < 1$ cuando $x > 0$.

Así que la serie converge para todo $x > 0$.

109. Las respuestas variarán.

111.



La curva sólida es S_5. La curva discontinua es S_2, la punteada es S_3 y la punteada es S_4

113. Cuando

$x = -\frac{1}{2}, -\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Dado que

$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n2^n} < \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{10}}$, se

tiene $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n2^n} = 0{,}69306\ldots$ mientras

que $\ln(2) = 0{,}69314\ldots$; por lo tanto, $N = 10$.

115. $6S_N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}$.

Se tiene $\pi - 6S_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}00101\ldots$ y

$\pi - 6S_5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}00028\ldots$ así que

$N = 5$ es la suma parcial más pequeña con una exactitud de 0,001. También,

$\pi - 6S_7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}00002\ldots$ mientras

$\pi - 6S_8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -0{,}000007\ldots$ así que

$N = 8$ es el N más pequeño para obtener una exactitud de 0,00001.

Sección 6.3 ejercicios

117. $f(-1) = 1; f'(-1) = -1; f''(-1) = 2; f(x) = 1 - (x+1) + (x+1)^2$

119. $f'(x) = 2\cos(2x); f''(x) = -4\operatorname{sen}(2x); p_2(x) = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
grandes.

121. $f'(x) = \frac{1}{x}; f''(x) = -\frac{1}{x^2}; p_2(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$

123. $p_2(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2$

125. $\frac{d^2}{dx^2}x^{1/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}} \geq -0{,}00092\ldots$ cuando $x \geq 28$ por lo que la estimación del resto se aplica a la aproximación lineal $x^{1/3} \approx p_1(27) = 3 + \frac{x-27}{27}$, que da $(28)^{1/3} \approx 3 + \frac{1}{27} = 3{,}\overline{037}$, mientras $(28)^{1/3} \approx 3{,}03658$.

127. Utilizando la estimación $\frac{2^{10}}{10!} < 0{,}000283$ podemos utilizar la expansión de Taylor de orden 9 para estimar e^x en $x = 2$. como $e^2 \approx p_9(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \cdots + \frac{2^9}{9!} = 7{,}3887\ldots$ mientras que $e^2 \approx 7{,}3891$.

129. Dado que $\frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, R_{1.000} \approx \frac{1}{1001}$. Se tiene

$$p_{1.000}(1) = \sum_{n=1}^{1.000} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \approx 0{,}6936$$

mientras que $\ln(2) \approx 0{,}6931\cdots$.

131. $$\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720}\right) dx$$

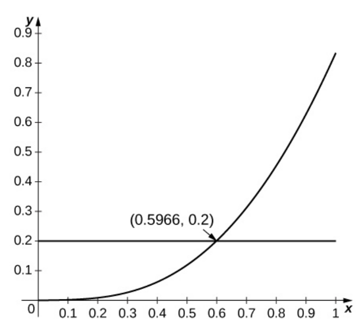
$$= 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{10} - \frac{1^7}{42} + \frac{1^9}{9.24} - \frac{1^{11}}{120.11} + \frac{1^{13}}{720.13} \approx 0{,}74683$$

mientras que $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}74682$.

133. Dado que $f^{(n+1)}(z)$ es $\operatorname{sen} z$ o $\cos z$, tenemos $M = 1$. Dado que $|x - 0| \leq \frac{\pi}{2}$, buscamos el n más pequeño tal que $\frac{\pi^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \leq 0{,}001$. El valor más pequeño es $n = 7$. La estimación del resto es $R_7 \leq 0{,}00092$.

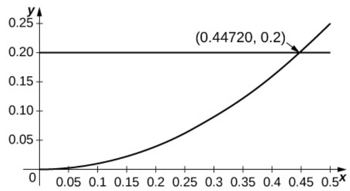
135. Dado que $f^{(n+1)}(z) = \pm e^{-z}$ se tiene $M = e^3$. Dado que $|x - 0| \leq 3$, se busca el menor n tal que $\frac{3^{n+1}e^3}{(n+1)!} \leq 0{,}001$. El valor más pequeño es $n = 14$. La estimación del resto es $R_{14} \leq 0{,}000220$.

137.



Dado que $\operatorname{sen} x$ es creciente para x pequeño y como $\operatorname{se} n''x = -\operatorname{sen} x$, la estimación se aplica siempre que $R^2 \operatorname{sen}(R) \leq 0{,}2$, lo cual aplica hasta $R = 0{,}596$.

139.



Dado que la segunda derivada de $\cos x$ es $-\cos x$ y dado que $\cos x$ es decreciente y se aleja de $x = 0$, la estimación aplica cuando $R^2 \cos R \leq 0{,}2$ o $R \leq 0{,}447$.

141. $(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 2(x+1)$ grandes.

143. Los valores de las derivadas son los mismos que para $x = 0$ así que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

145. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ así que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

que también es $-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

147. Las derivadas son $f^{(n)}(1) = e$ así que

$$e^x = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

149. $\frac{1}{(x-1)^3} = -\left(\frac{1}{2}\right) \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+2)(n+1)x^n}{2}\right)$ grandes.

151. $2 - x = 1 - (x-1)$ grandes.

153. $((x-1) - 1)^2 = (x-1)^2 - 2(x-1) + 1$

155. $\frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$

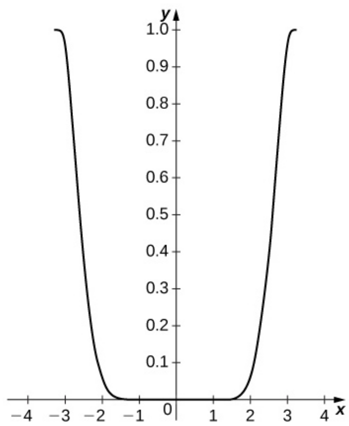
157. $x \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (1-x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^{2n}$

159. $e^{2x} = e^{2(x-1)+2} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n!}$

161. $x = e^2; S_{10} = \frac{34.913}{4725} \approx 7{,}3889947$

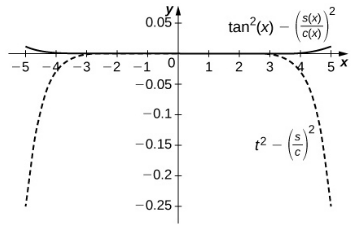
163. $\text{sen}(2\pi) = 0; S_{10} = 8{,}27 \times 10^{-5}$

165.



La diferencia es pequeña en el interior del intervalo pero se acerca a 1 cerca de los extremos. La estimación del resto es $|R_4| = \frac{\pi^5}{120} \approx 2{,}552$.

167.



La diferencia es del orden de 10^{-4} en $[-1, 1]$ mientras que el error de aproximación de Taylor es de alrededor $0{,}1$ cerca de ± 1. La curva superior es un gráfico de $\tan^2 x - \left(\frac{S_5(x)}{C_4(x)}\right)^2$ y el gráfico inferior de líneas discontinuas muestra $t^2 - \left(\frac{S_5}{C_4}\right)^2$.

169. a. Las respuestas variarán. b. Los siguientes son los valores x_n después de 10 iteraciones del método de Newton para aproximar una raíz de $p_N(x) - 2 = 0$: para $N = 4, x = 0{,}6939...$; para $N = 5, x = 0{,}6932...$; para $N = 6, x = 0{,}69315...$; . (*Nota:* $\ln(2) = 0{,}69314...$) c. Las respuestas variarán.

171. $\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2} \to -1$

173. $\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{2x} \approx \frac{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!}-\cdots\right)-1}{2x} \to -\frac{1}{4}$

Sección 6.4 ejercicios

175. $\left(1+x^2\right)^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} x^{2n}$

177. $(1-2x)^{2/3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \binom{\frac{2}{3}}{n} x^n$

179. $\sqrt{2+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(1/2)-n} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n}; \left(\left|x^2\right| < 2\right)$ grandes.

181. $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$ así que $\sqrt{2x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} (x-1)^{2n}$

183. $\sqrt{x} = 2\sqrt{1+\frac{x-4}{4}}$ así que $\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{1-2n} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x-4)^n$

185. $\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{1-3n} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x-9)^n$

187. $10\left(1+\frac{x}{1.000}\right)^{1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}10^{1-3n}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^n$. Utilizando, por ejemplo, una estimación de cuarto orden en $x=1$ da como resultado

$$(1001)^{1/3}\approx 10\left(1+\binom{\frac{1}{3}}{1}10^{-3}+\binom{\frac{1}{3}}{2}10^{-6}+\binom{\frac{1}{3}}{3}10^{-9}+\binom{\frac{1}{3}}{4}10^{-12}\right)$$
$$=10\left(1+\frac{1}{3{,}10^3}-\frac{1}{9{,}10^6}+\frac{5}{81{,}10^9}-\frac{10}{243{,}10^{12}}\right)=10{,}00333222...$$

mientras que $(1001)^{1/3}=10{,}00332222839093$ .... Dos términos serían suficientes para una exactitud de tres dígitos.

189. La aproximación es $2{,}3152$; el valor del CAS es $2{,}23\ldots$.

191. La aproximación es $2{,}583\ldots$; el valor del CAS es $2{,}449\ldots$.

193.
$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\cdots$. Por lo tanto,

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{7.16}-\frac{5x^9}{9.128}+\cdots\Big|_{-1}^{1}\approx 2-\frac{1}{3}-\frac{1}{20}-\frac{1}{56}-\frac{10}{9.128}+\text{error}=1{,}590...$$

mientras que $\frac{\pi}{2}=1{,}570...$

195.
$$(1+4x)^{4/3}=(1+4x)(1+4x)^{1/3}$$
$$=\left(1+4x\right)\left(1+\frac{4x}{3}-\frac{16x^3}{9}+\frac{320x^3}{81}-\frac{2.560x^4}{243}\right)$$
$$=1+\frac{16}{3}x+\frac{32}{9}x^2-\frac{256}{81}x^3+\frac{1280}{243}x^4-\frac{10240}{243}x^5$$

197. $\left(1+(x+3)^2\right)^{1/3}=1+\frac{1}{3}(x+3)^2-\frac{1}{9}(x+3)^4+\frac{5}{81}(x+3)^6-\frac{10}{243}(x+3)^8+\cdots$

199. El doble de la aproximación es $1{,}260\ldots$ mientras que $2^{1/3}=1{,}2599....$

201. $f^{(99)}(0)=0$

203. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln(2)x)^n}{n!}$

205. Para
$x>0,\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(2n+1)/2}}{\sqrt{x}(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}$.

207. $e^{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}$

209. $\operatorname{sen}^2x=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}$

211. $\tan^{-1}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1}$

213. $\operatorname{sen}^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$

215. $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!}$

217. $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$

219. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$

221. $1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots$

223. $1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \cdots$

225. Utilizando la expansión para $\tan x$ da como resultado $1 + \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{15}$.

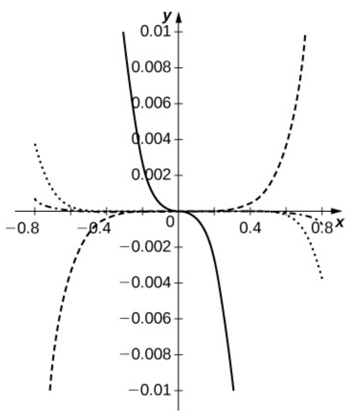
227. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ así que $R = 1$ mediante el criterio del cociente.

229. $\ln\left(1 + x^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n}$ así que $R = 1$ mediante el criterio del cociente.

231. Sume la serie de e^x y e^{-x} término por término. Los términos impares se anulan y

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

233.



La razón $\frac{S_n(x)}{C_n(x)}$ aproxima $\tan x$ mejor que lo hace $p_7(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}$ para $N \geq 3$. Las curvas discontinuas son $\frac{S_n}{C_n} - \tan$ para $n = 1, 2$. La curva punteada corresponde a n $\mathrm{n} = 3$, y la curva punteada y con rayas corresponde a $n = 4$. La curva continua es $p_7 - \tan x$.

235. Por el teorema de diferenciación término a término,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ así que}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \; xy' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n,$$

mientras que

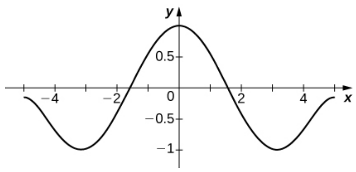
$$y' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \text{ así que}$$

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

237. La probabilidad es $p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-x^2/2} dx$ donde $a = 90$ y $b = 100$, es decir,

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{5} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{5} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)2^n n!} \approx 0{,}6827.$$

239.



Como en el problema anterior se obtiene $a_n = 0$ si n es impar y $a_n = -(n+2)(n+1)a_{n+2}$ si n es par, así que $a_0 = 1$ nos lleva a $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

241. $y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ y

$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ así que

$y'' - y' + y = 0$ implica que

$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_n = 0$

o $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$ para todo

n. $y(0) = a_0 = 1$ y $y'(0) = a_1 = 0$, así que

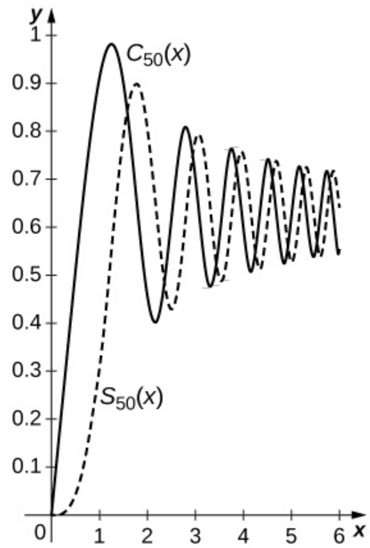
$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = 0$, y $a_5 = -\frac{1}{120}$.

243. a. (Prueba) b. Tenemos $R_s \leq \frac{0{,}1}{(9)!}\pi^9 \approx 0{,}0082 < 0{,}01$. Tenemos

$$\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}\right)dx = \pi - \frac{\pi^3}{3.3!} + \frac{\pi^5}{5.5!} - \frac{\pi^7}{7.7!} + \frac{\pi^9}{9.9!} = 1{,}852...,$$

mientras que $\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt = 1{,}85194...$, por lo que el error real es aproximadamente $0{,}00006$.

245.



Dado que

$\cos\left(t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)\,!}$ y

$\text{sen}\left(t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)\,!}$, se tiene

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)\,!}$

y $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)\,!}$.

Las sumas de los primeros 50 términos distintos de cero se representan a continuación con $C_{50}(x)$ la curva sólida y $S_{50}(x)$ la curva discontinua.

247. $\int_0^{1/4} \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \frac{7x^5}{256}\right) dx$

$= \frac{2}{3}2^{-3} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}2^{-5} - \frac{1}{8}\,\frac{2}{7}2^{-7} - \frac{1}{16}\,\frac{2}{9}2^{-9} - \frac{5}{128}\,\frac{2}{11}2^{-11} - \frac{7}{256}\,\frac{2}{13}2^{-13} = 0{,}0767732...$

mientras que $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,dx = 0{,}076773.$

249. $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{10}{9,8}}\left(1 + \frac{\text{sen}^2(\theta/12)}{4}\right) \approx 6,453$ segundos. La estimación del ángulo pequeño es $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{10}{9,8}} \approx 6,347$. El error relativo es de alrededor de 2 por ciento.

251. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{16}$. Por esto $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{256}k^4\right)$.

Ejercicios de repaso

253. Verdadero

255. Verdadero

257. Radio de convergencia (Radius of Convergence, ROC): 1; IOC: $(0, 2)$ grandes.

259. ROC: 12; IOC: $(-16, 8)$ grandes.

261. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n$; ROC: 3; IOC: $(-3, 3)$ grandes.

263. integración: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(2x)^{2n+1}$

265. $p_4(x) = (x+3)^3 - 11(x+3)^2 + 39(x+3) - 41$; exacta

267. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{2n!}$

269. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$

271. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$

273. $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1}$

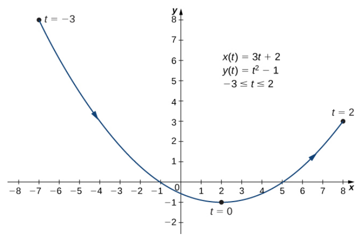
275. Las respuestas pueden variar.

277. $2,5\ \%$

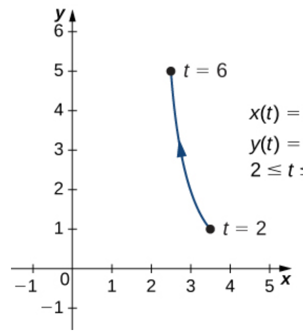
Capítulo 7

Punto de control

7.1



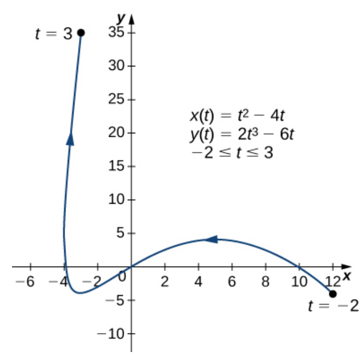
7.2 $x = 2 + \frac{3}{y+1}$, o $y = -1 + \frac{3}{x-2}$. Esta ecuación describe una parte de una hipérbola rectangular centrada en $(2, -1)$.



7.3 Una posibilidad es $x(t) = t, \quad y(t) = t^2 + 2t$. Otra posibilidad es $x(t) = 2t - 3, \quad y(t) = (2t-3)^2 + 2(2t-3) = 4t^2 - 8t + 3.$

De hecho, hay un número infinito de posibilidades.

7.4 $x'(t) = 2t - 4$ en tanto que $y'(t) = 6t^2 - 6$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{6t^2-6}{2t-4} = \frac{3t^2-3}{t-2}$. Esta expresión es indefinida cuando $t = 2$ e igual a cero cuando $t = \pm 1$.



7.5 La ecuación de la línea tangente es $y = 24x + 100$.

7.6 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3t^2-12t+3}{2(t-2)^3}$. Puntos críticos $(5, 4), (-3, -4)$, y $(-4, 4)$.

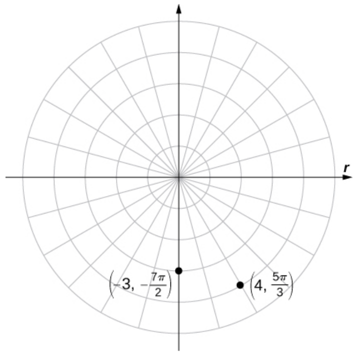
7.7 $A = 3\pi$ (Observe que la fórmula de la integral da en realidad una respuesta negativa. Esto se debe a que $x(t)$ es una función decreciente en el intervalo $[0, 2\pi]$; es decir, la curva se traza de derecha a izquierda).

7.8 $s = 2\left(10^{3/2} - 2^{3/2}\right) \approx 57{,}589$

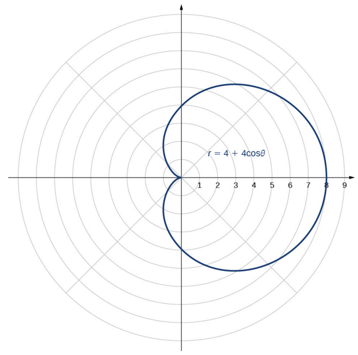
7.9 $A = \frac{\pi\left(494\sqrt{13}+128\right)}{1.215}$

7.10 $\left(8\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ y $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

7.11



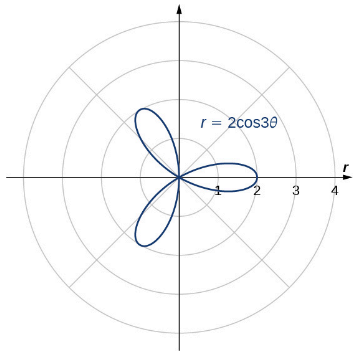
7.12



El nombre de esta forma es cardioide, que estudiaremos más adelante en esta sección.

7.13 $y = x^2$, que es la ecuación de una parábola que se abre hacia arriba.

7.14 Simetría con respecto al eje polar

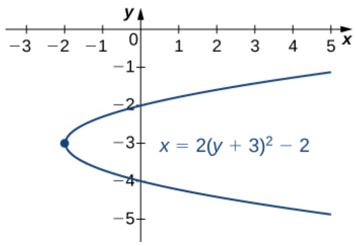


7.15 $A = 3\pi/2$

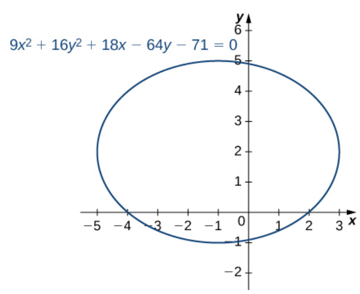
7.16 $A = \frac{4\pi}{3} + 4\sqrt{3}$

7.17 $s = 3\pi$

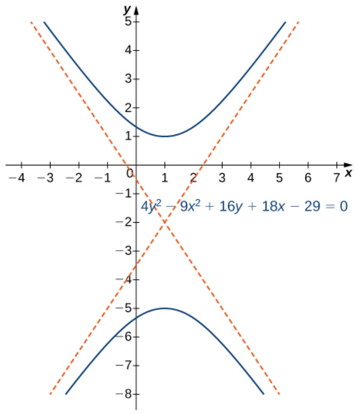
7.18 $x = 2(y+3)^2 - 2$



7.19 $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

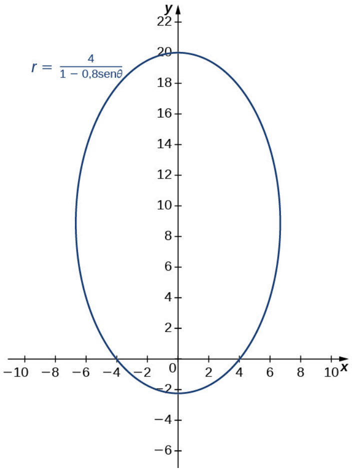


7.20 $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$. Se trata de una hipérbola vertical. Asíntotas $y = -2 \pm \frac{3}{2}(x-1)$.



7.21 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{74}}{7} \approx 1{,}229$

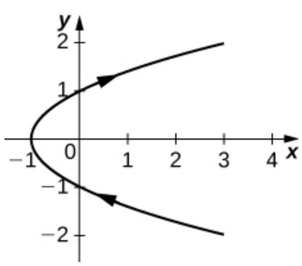
7.22 Aquí $e = 0{,}8$ y $p = 5$. Esta sección cónica es una elipse



7.23 La sección cónica es una hipérbola y el ángulo de rotación de los ejes es $\theta = 22{,}5°$.

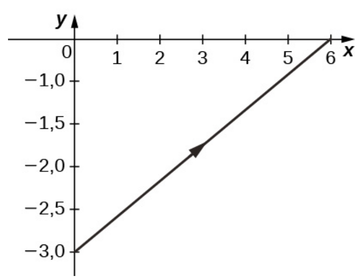
Sección 7.1 ejercicios

1.



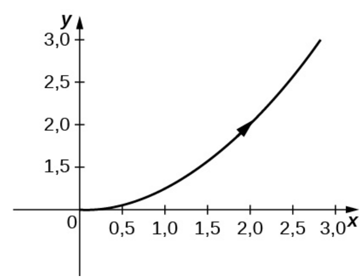
orientación: de abajo a arriba

3.

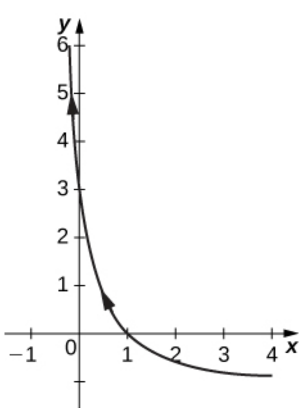


orientación: de izquierda a derecha

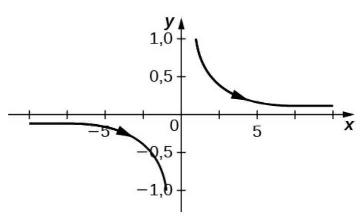
5. $y = \frac{x^2}{4} + 1$



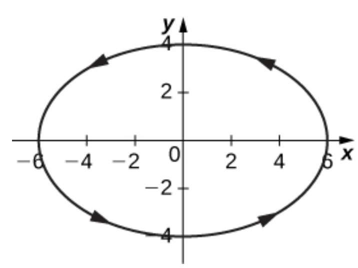
7.



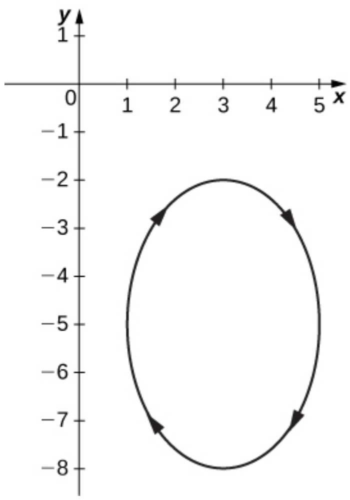
9.



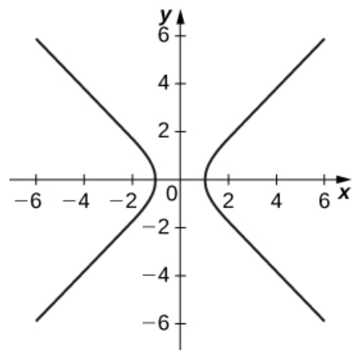
11.



13.

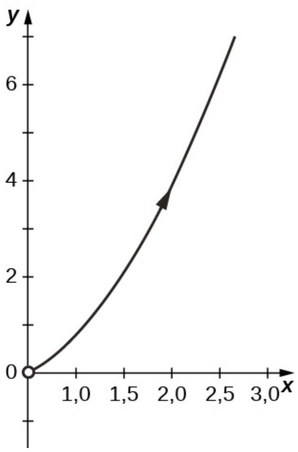


15.

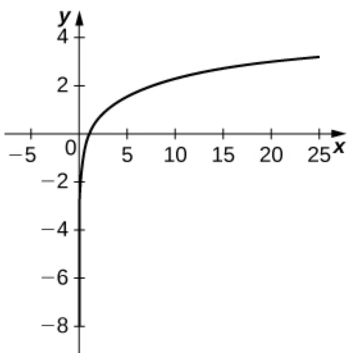


Las asíntotas son $y = x$ como $y = -x$

17.



19.



21. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{2}$; dominio: $x \in [1, -\infty)$.

23. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; dominio $x \in [-4, 4]$.

25. $y = 3x + 2$; dominio: todos los números reales.

27. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$; dominio: $x \in [0, 2]$.

29. $y = \sqrt{x^2 - 1}$; dominio: $x \in (-\infty, -1]$.

31. $y^2 = \frac{1-x}{2}$; dominio: $x \in \left[2, \infty\right) \cup \left(-\infty, -2\right]$.

33. $y = \ln x$; dominio: $x \in [1, \infty)$.

35. $y = \ln x$; dominio: $x \in (0, \infty)$.

37. $x^2 + y^2 = 4$; dominio: $x \in [-2, 2]$.

39. línea

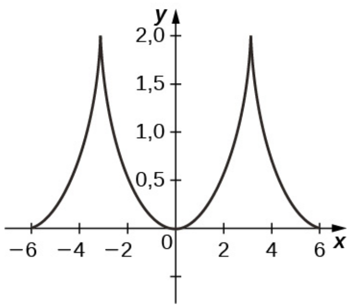
41. parábola

43. círculo

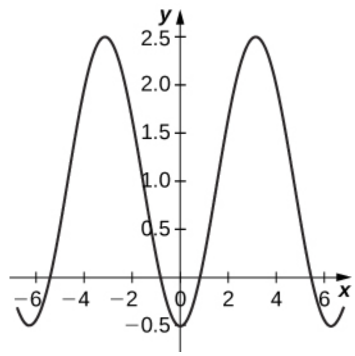
45. elipse

47. hipérbola

51. Las ecuaciones representan una cicloide.

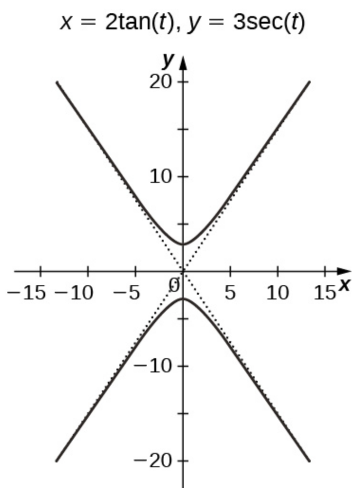


53.

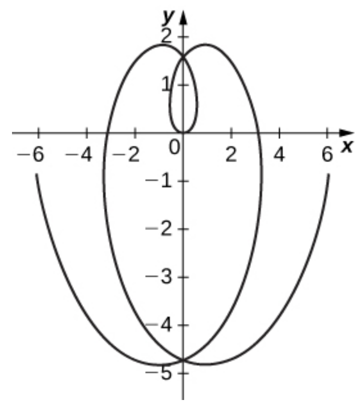


55. 22.092 metros a aproximadamente 51 segundos.

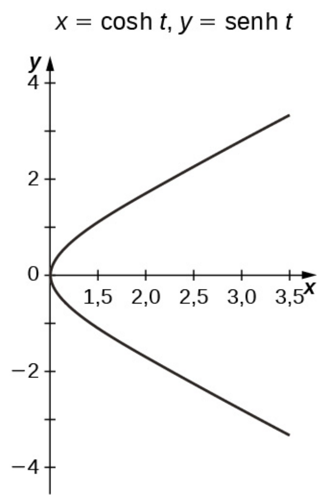
57.



59.



61.



Sección 7.2 ejercicios

63. 0

65. $\frac{-3}{5}$

67. $\text{Pendiente} = 0; y = 8.$

69. La pendiente no está definida; $x = 2$.

71. $\tan\, t \;=\; -2$ $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{-8}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{-8}{\sqrt{5}}\right).$

73. No hay puntos posibles; expresión indefinida.

75. $y = -\left(\frac{4}{e}\right)x + 5$

77. $y = -2x + 3$

79. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

81. $\frac{dy}{dx} = -\tan(t)$

83. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, para que la curva no sea ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo en $t = 3$. Por lo tanto, el gráfico es lineal y tiene una pendiente constante pero ninguna concavidad.

85. $\frac{dy}{dx} = 4, \frac{d^2y}{dx^2} = -6\sqrt{3}$; la curva es cóncava hacia abajo en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

87. No hay tangentes horizontales. Tangentes verticales en $(1, 0), (-1, 0)$.

89. $-\sec^2(\pi t)$ grandes.

91. Horizontal $(0, -9)$; vertical $(\pm 2, -6)$.

93. 1

95. 0

97. 4

99. Cóncava hacia arriba en $t > 0$.

101. $\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2}$

103. $\frac{3\pi}{2}$

105. $6\pi a^2$

107. $2\pi ab$

109. $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ grandes.

111. $7{,}075$

113. $6a$

115. $6\sqrt{2}$

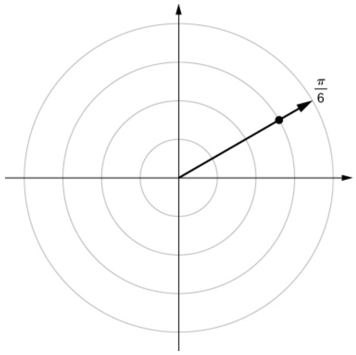
119. $\frac{2\pi\left(247\sqrt{13}+64\right)}{1.215}$

121. 59,101

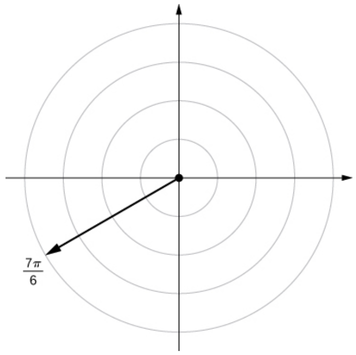
123. $\frac{8\pi}{3}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$

Sección 7.3 ejercicios

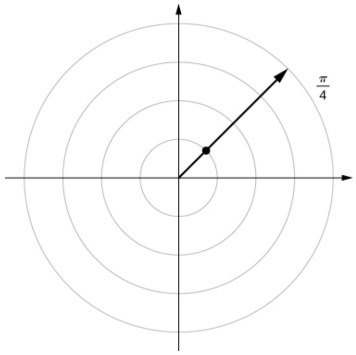
125.



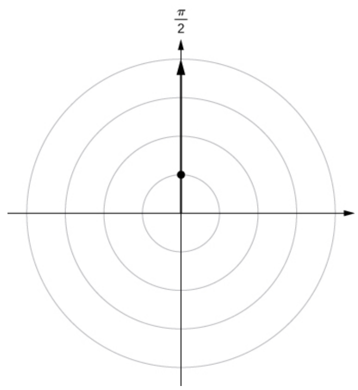
127.



129.



131.



133. $B\left(3, \frac{-\pi}{3}\right)$ $B\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$

135. $D\left(5, \frac{7\pi}{6}\right)$ $D\left(-5, \frac{\pi}{6}\right)$

137. $(5, -0{,}927)$ $(-5, -0{,}927 + \pi)$ grandes.

139. $(10, -0{,}927)$ $(-10, -0{,}927 + \pi)$ grandes.

141. $\left(2\sqrt{3}, -0{,}524\right)$ $\left(-2\sqrt{3}, -0{,}524 + \pi\right)$

143. $\left(-\sqrt{3}, \ -1\right)$ grandes.

145. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{-1}{2}\right)$ grandes.

147. $\left(0, \ 0\right)$ grandes.

149. Simetría con respecto al eje *x*, al eje *y* y al origen.

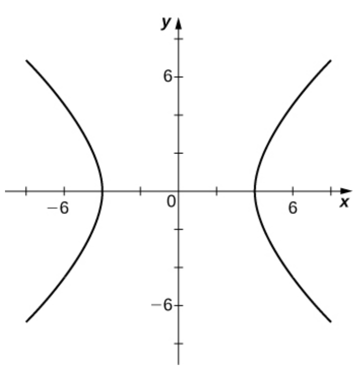
151. Simetría con respecto al eje *x* solamente.

153. Simetría con respecto al eje *x* solamente.

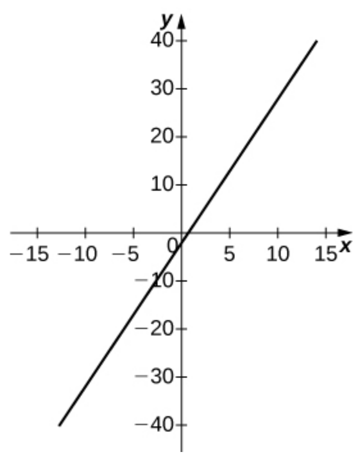
155. La línea $y = x$

157. $y = 1$

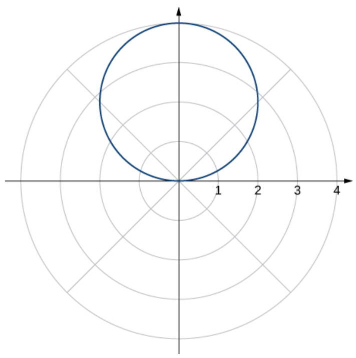
159. Hipérbola; forma polar $r^2\cos(2\theta) = 16$ o $r^2 = 16\sec(2\theta)$.



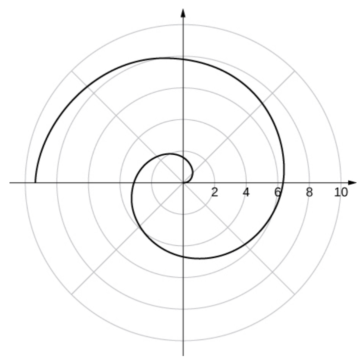
161. $r = \frac{2}{3\cos\theta - \text{sen}\,\theta}$



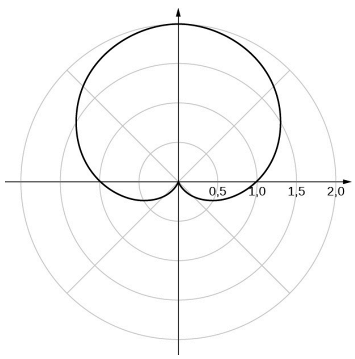
163. $x^2 + y^2 = 4y$



165. $x \tan \sqrt{x^2 + y^2} = y$

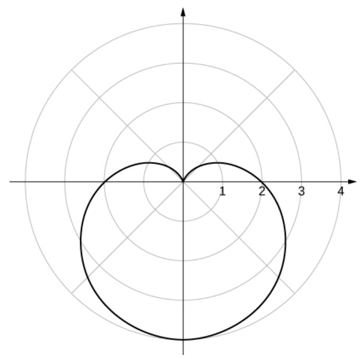


167.



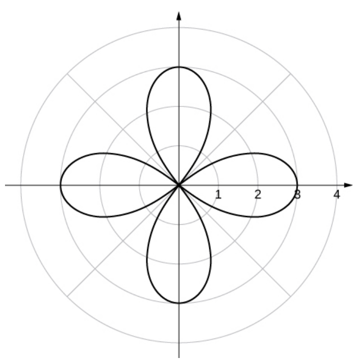
simetría del eje *y*

169.



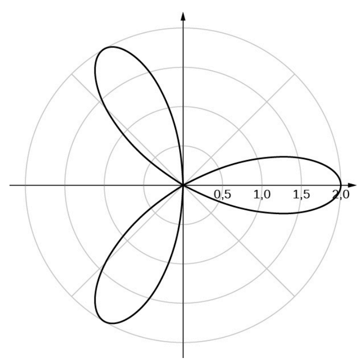
simetría del eje *y*

171.



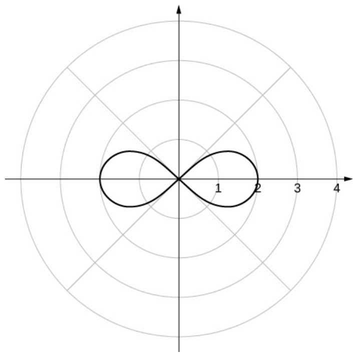
simetría de los ejes *x* y *y* y simetría con respecto al polo

173.



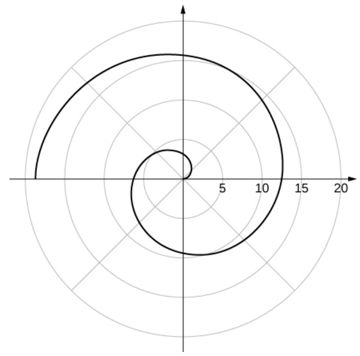
simetría del eje *x*

175.



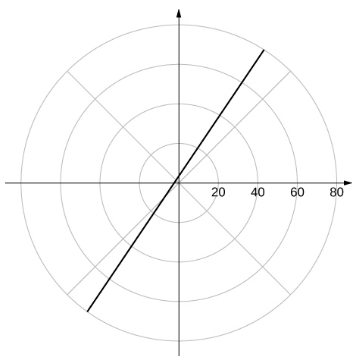
simetría de los ejes x y y y simetría con respecto al polo

177.



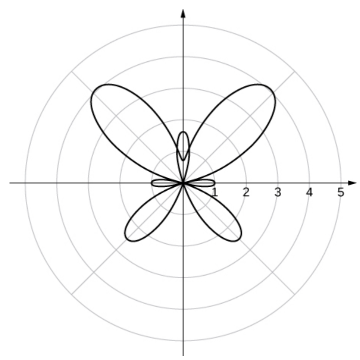
sin simetría

179.

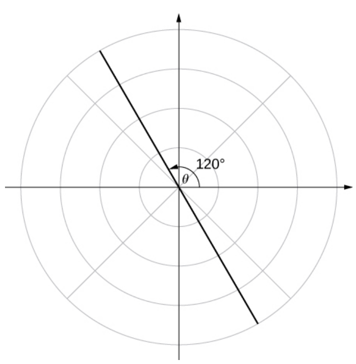


una línea

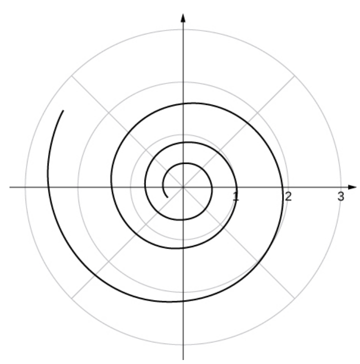
181.



183.



185.



187. Las respuestas varían. Una posibilidad es que las líneas espirales se acerquen y el número total de espirales aumente.

Sección 7.4 ejercicios

189. $\frac{9}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$

191. $32\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)d\theta$

193. $\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$

195. $\int_{\operatorname{sen}^{-1}(2/3)}^{\pi/2} (2 - 3\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$

197. $\int_{\pi/3}^{\pi} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta - \int_0^{\pi/3} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta$

199. $4\int_0^{\pi/3} d\theta + 16\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\cos^2\theta\right) d\theta$

201. 9π

203. $\frac{9\pi}{4}$

205. $\frac{9\pi}{8}$

207. $\frac{18\pi-27\sqrt{3}}{2}$

209. $\frac{4}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

211. $\frac{3}{2}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

213. $2\pi - 4$

215. $\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\text{sen }\theta)^2 + \cos^2\theta d\theta}$

217. $\sqrt{2}\int_0^1 e^\theta d\theta$

219. $\frac{\sqrt{10}}{3}\left(e^6 - 1\right)$ grandes.

221. 32

223. 6,238

225. 2

227. 4,39

229. $A = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + 2\text{ sen }\theta\cos\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

231. $C = 2\pi\left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi$ y $\int_0^\pi 3d\theta = 3\pi$

233. $C = 2\pi(5) = 10\pi$ y $\int_0^\pi 10\, d\theta = 10\pi$

235. $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\text{sen }\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\text{sen }\theta}$

237. La pendiente es $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

239. La pendiente es 0.

241. En $(4, 0)$, la pendiente es indefinida. En $\left(-4, \frac{\pi}{2}\right)$, la pendiente es 0.

243. La pendiente es indefinida en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

245. Pendiente = –1.

247. La pendiente es $\frac{-2}{\pi}$.

249. Respuesta de la calculadora: –0,836.

251. Tangente horizontal en $\left(\pm\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\pm\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

253. Tangentes horizontales en $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. Tangentes verticales en $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ y también en el polo $(0, 0)$.

Sección 7.5 ejercicios

255. $y^2 = 16x$

257. $x^2 = 2y$

259. $x^2 = -4(y-3)$

261. $(x+3)^2 = 8(y-3)$

263. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

265. $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$

267. $\frac{(y-1)^2}{16} + \frac{(x+3)^2}{12} = 1$

269. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

271. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

273. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$

275. $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{32} = 1$

277. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$

279. $e = 1$, parábola

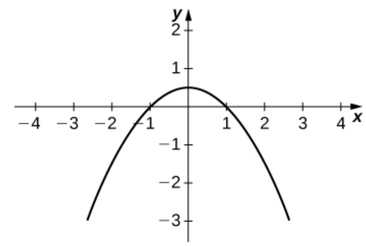
281. $e = \frac{1}{2}$, elipse

283. $e = 3$, hipérbola

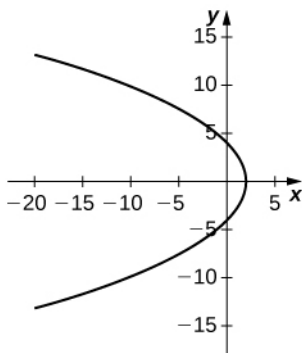
285. $r = \frac{4}{5+\cos\theta}$

287. $r = \frac{4}{1+2\text{ sen }\theta}$

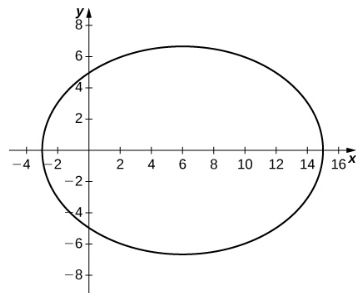
289.



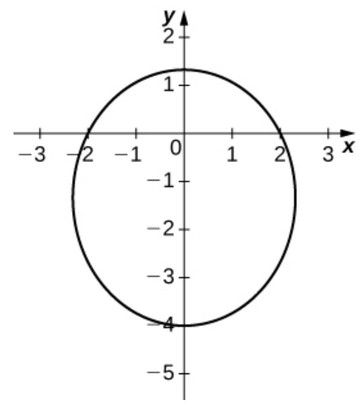
291.



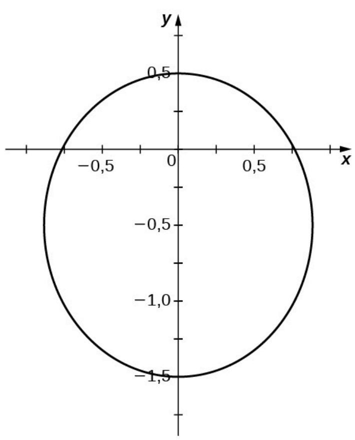
293.



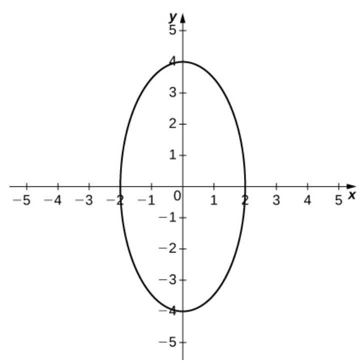
295.



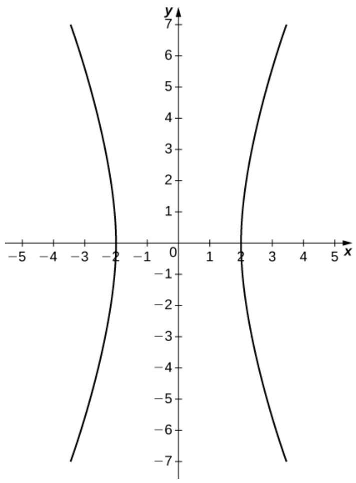
297.



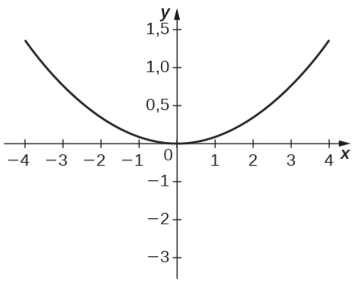
299.



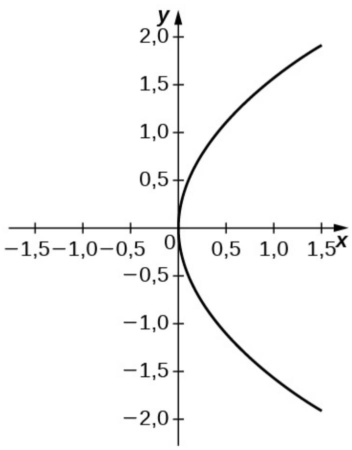
301.



303.



305.



307. Hipérbola

309. Elipse

311. Elipse

313. En el punto 2,25 pies por encima del vértice.

315. 0,5625 pies

317. La longitud es de 96 pies y la altura es de aproximadamente 26,53 pies.

319. $r = \frac{2{,}616}{1+0{,}995 \cos \theta}$

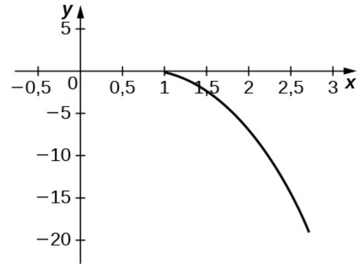
321. $r = \frac{5{,}192}{1+0{,}0484 \cos \theta}$

Ejercicios de repaso

323. Verdadero.

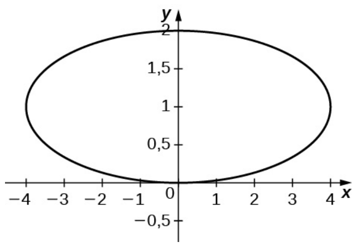
325. Falso. Imagine $y = t + 1$, $x = -t + 1$.

327.



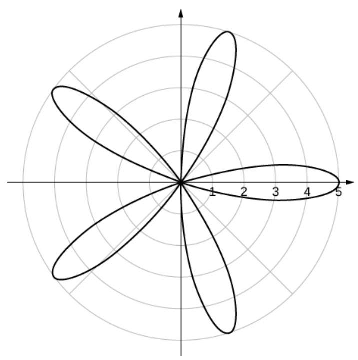
$y = 1 - x^3$

329.



$\frac{x^2}{16} + (y - 1)^2 = 1$

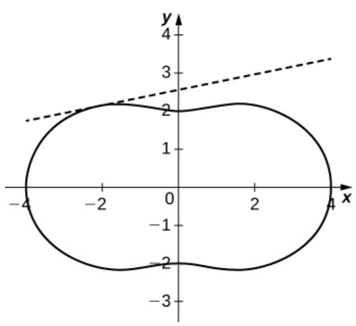
331.



Simetría alrededor del eje polar

333. $r^2 = \frac{4}{\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta}$

335.



$y = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{5}\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

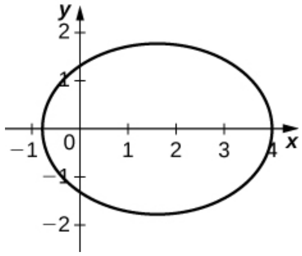
337. $\frac{e^2}{2}$

339. $9\sqrt{10}$

341. $(y + 5)^2 = -8x + 32$

343. $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

345. $e = \frac{2}{3}$, elipse



347. $\frac{y^2}{19{,}03^2} + \frac{x^2}{19{,}63^2} = 1$,
$e = 0{,}2447$

Índice